

СБОРНИК ЗАДАНИЙ

**для
курсовых
работ
по
теоретической
механике**

Под общей редакцией
проф. А. А. Яблонского

Издание 3-е, исправленное

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия
для студентов высших
технических учебных заведений



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 19

531

С23

УДК 531.8(075)

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедры теоретической механики Московского авиационного и Харьковского политехнического институтов;
профессор М. М. Гернет

Л. А. Яблонский, С. С. Норейко, С. А. Вольфсон,
Н. В. Карпова, Б. Н. Квасников, Ю. Г. Минкин,
Н. И. Никитина, В. Е. Павлов, Ю. М. Тепанков

С 20302—063
001(01)—78 80—78

© ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА», 1978 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теоретическая механика как одна из важнейших физико-математических дисциплин играет существенную роль в подготовке инженеров любых специальностей.

На основных законах и принципах теоретической механики базируются многие общеспециальные дисциплины, такие, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др.

В различных курсах по машиностроительным, механическим, строительным, приборостроительным и по другим специальностям также широко используются важнейшие положения теоретической механики.

На основе теорем и принципов теоретической механики решаются многие инженерные задачи и осуществляется проектирование новых машин, конструкций и сооружений. Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам курса из соответствующих сборников и выполнить ряд специальных заданий.

Третье издание настоящего сборника содержит 50 заданий по всем разделам курса: 12 — по статике, 12 — по кинематике и 26 — по динамике, из которых 14 — по аналитической механике. Каждое задание содержит тридцать вариантов.

Большое число заданий по каждому из разделов курса обеспечивает возможность устанавливать тематику и количество курсовых работ в зависимости от профиля подготовки специалистов, т. е. от объема и содержания изучаемого курса теоретической механики.

Набор вариантов индивидуальных заданий, входящих в курсовую работу, студент может определить по своему шифру, пользуясь специальной таблицей, приведенной в конце книги. Шифр каждому студенту устанавливает преподаватель.

В сборнике приведены примеры выполнения заданий. Основываясь на этих примерах, студенты (особенно заоч-

ных и вечерних факультетов), а также специалисты, желающие углубить свои знания по теоретической механике, смогут самостоятельно выполнять задания из этого сборника.

В сборник включен ряд задач, выполнение которых требует проведения некоторых исследований. Эти задания могут служить основой для организации учебно-исследовательской работы студентов по теоретической механике.

При подготовке к печати рукописи третьего издания учтены замечания кафедры Московского авиационного института, давшей развернутую рецензию сборника, замечания коллективов ряда кафедр и отдельных преподавателей, а также профессоров *В. Г. Веретенникова*, *М. М. Гернета* и *А. Г. Ишковой*, которым авторы выражают глубокую благодарность.

Отзывы и пожелания, направленные на улучшение этого издания, просим посыпать в адрес издательства «Высшая школа».

Авторы

РАЗДЕЛ ПЕРВЫЙ.

СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

В этом разделе содержатся 12 заданий. По некоторым темам предлагаются задания различной сложности. Так, на плоскую систему сил наряду с простейшими схемами (задание С-2), требующими применения только трех уравнений равновесия, включены задания на составные конструкции из двух (С-5) и трех (С-4 и С-6) тел. На равновесие пространственной системы сил имеются два задания (С-10 и С-11). Выбор каждого из них может определяться профилем подготовки студентов.

I. Плоская система сил

СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Задание С-1. Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы

К одному из узлов плоской фермы приложена сила \vec{P} . Определить реакции опор фермы (при помощи теоремы о равновесии трех непараллельных сил), а также усилия во всех ее стержнях способом вырезания узлов. Вес стержней не учитывать. Результаты аналитического расчета проверить для каждого узла путем построения силового многоугольника.

Основываясь на полученных значениях усилий в стержнях, определить реакции опор фермы также и аналитическим способом.

Схемы ферм и необходимые для расчета данные приведены на рис. 1-3.

Пример выполнения задания. Дано: схема фермы (рис. 4, a); $P = 11 \text{ кН}$, $\alpha = 30^\circ$. Найти реакции R_A , R_B и усилия в стержнях.

Решение. 1. *Определение реакций опор.* Рассмотрим внешние силы, приложенные к ферме: задаваемую силу \vec{P} и реакции опор \vec{R}_A и \vec{R}_B . Так как опора A стержневая, то линия действия реакции \vec{R}_A известна: она направлена по оси стержня AD . Линию действия реакции \vec{R}_B определяем, применяя теорему о равновесии трех непараллельных сил (рис. 4, a).

Три силы \vec{P} , \vec{R}_A и \vec{R}_B взаимно уравновешиваются, следовательно, линии их действия пересекаются в одной точке.

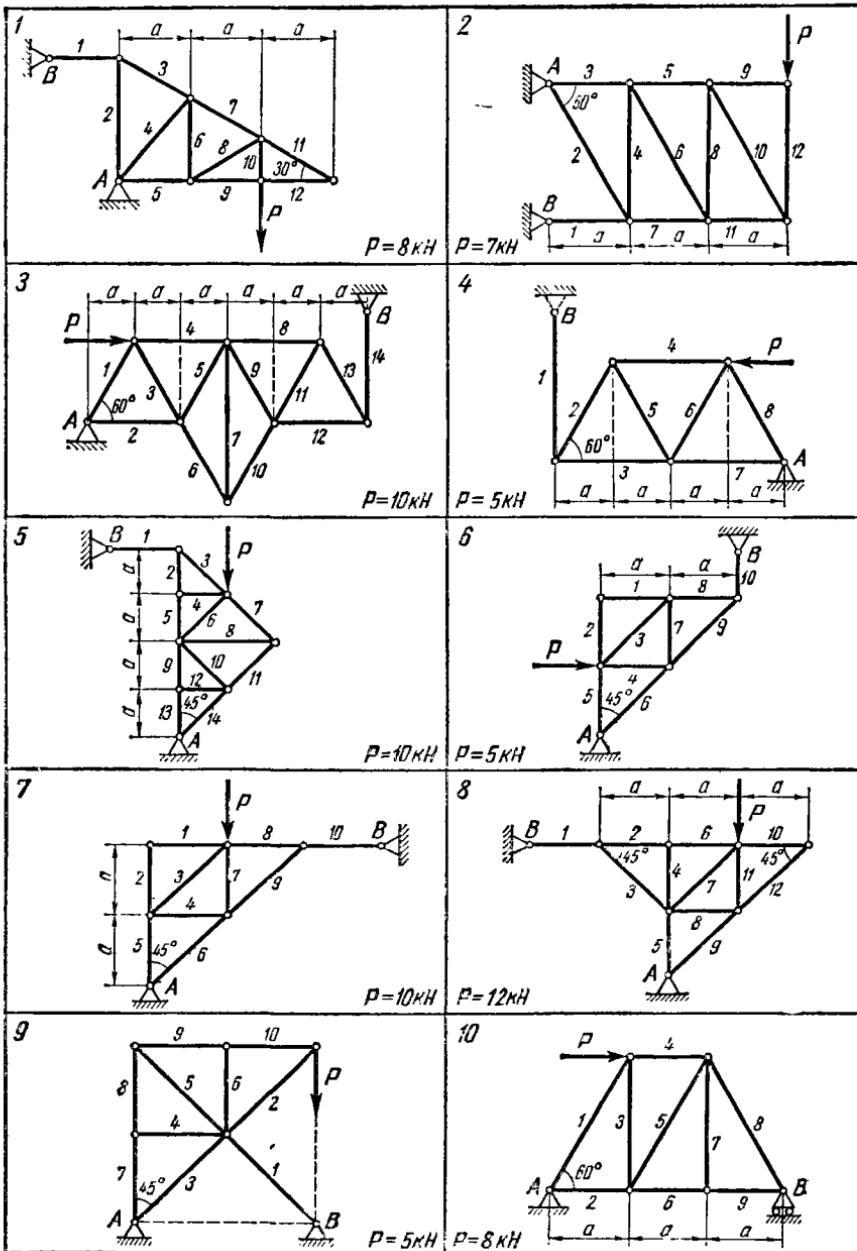


Рис. 1

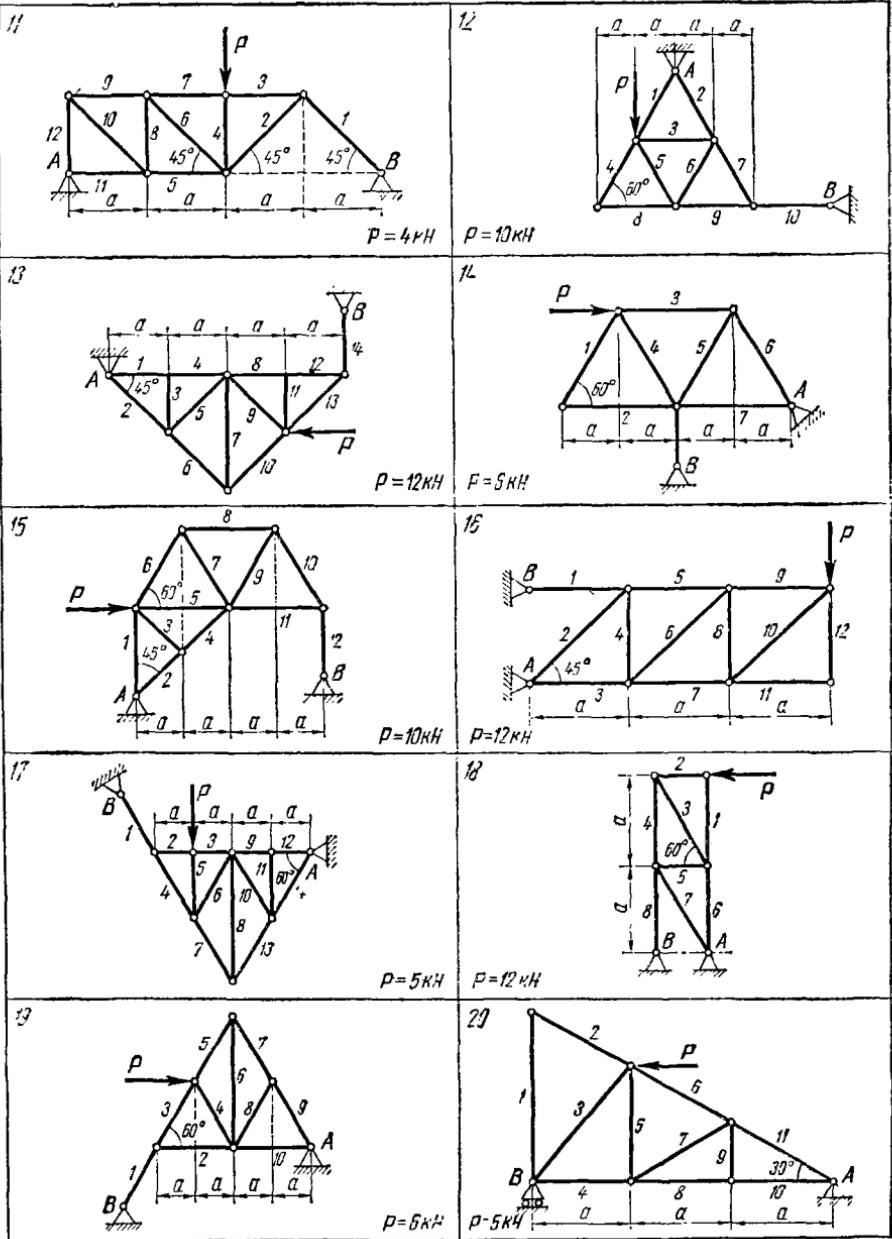
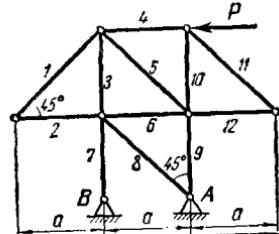
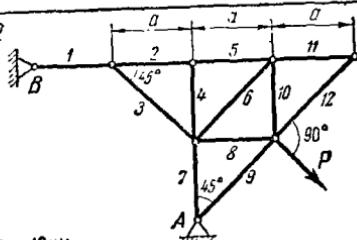


Fig. 2

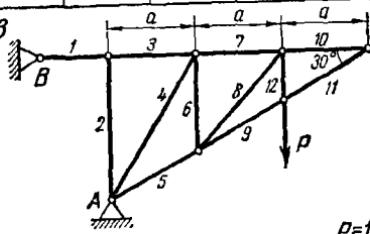
21



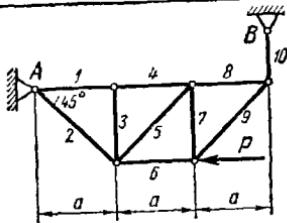
22



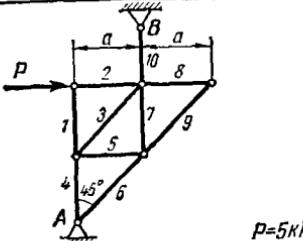
23



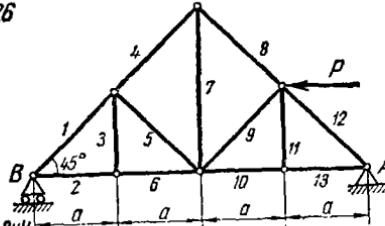
24



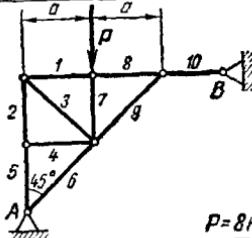
25



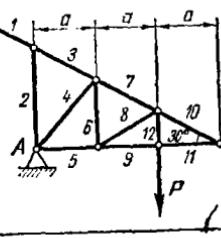
26



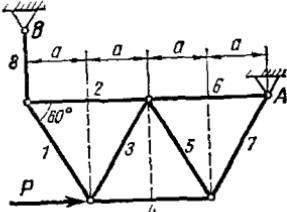
27



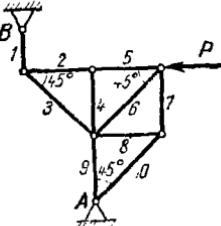
28



29



30



Pic 3

Находим точку пересечения линий действия сил \vec{P} и \vec{R}_A . Линия действия реакции \vec{R}_B проходит через эту точку (точку C) и центр шарнира B . Строим замкнутый силовой треугольник (рис. 4, б). Его построение начинаем с силы \vec{P} . Через начало вектора \vec{P} проводим прямую, параллельную линии действия одной реакции, например \vec{R}_A , а через конец — прямую, параллельную линии действия \vec{R}_B до их взаимного пересечения.

Стороны полученного замкнутого силового треугольника определяют модули и направления опорных реакций \vec{R}_A и \vec{R}_B . Из подобия силового треугольника и треугольника ABC находим R_A и R_B

$$R_A/AC = P/AB = R_B/BC.$$

Приняв $AB = a$, получим:

$$AC = 3CE = 3a \operatorname{tg} \alpha = 3a \sqrt{3}/3 = a\sqrt{3};$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(AC)^2 + (AB)^2} = \\ &= \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_A/a\sqrt{3} = P/a = R_B/2a,$$

откуда

$$R_A = P\sqrt{3} = 11\sqrt{3} = 19,05 \text{ кН};$$

$$R_B = 2P = 2 \cdot 11 = 22 \text{ кН.}$$

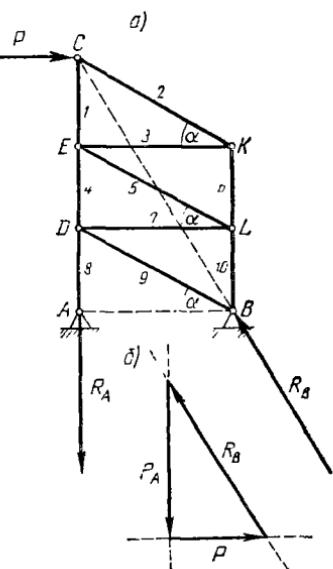


Рис. 4

2. Определение усилий в стержнях фермы. Кроме внешних сил, которые могут быть приложены к узлу фермы, на каждый ее узел действуют реакции сходящихся в нем стержней. Эти реакции равны усилиям в стержнях.

Рассматриваем равновесие сил, приложенных к каждому узлу фермы, выбирая узлы в такой последовательности, чтобы число неизвестных сил в узле не превышало двух.

Условию предполагаем, что все стержни растянуты, т. е. реакции стержней направлены от узлов (рис. 5). Отрицательные знаки найденных реакций показывают, что соответствующие стержни не растянуты, а сжаты, т. е. реакции этих стержней направлены к узлам.

Реакции каждого стержня обозначим S и S' , причем $\vec{S} = -\vec{S}'$. Расчет начинаем с узла C .

Составим два уравнения равновесия сил, приложенных к этому узлу:

$$\Sigma X_t = 0; \quad P + S_2 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\Sigma Y_t = 0; \quad -S_1 - S_2 \cos 60^\circ = 0,$$



откуда

$$S_2 = -\frac{P}{\cos 30^\circ} = -\frac{11 \cdot 2}{\sqrt{3}} = -12,7 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_2 \cos 60^\circ = -(-12,7) 0,5 = 6,35 \text{ кН}.$$

Значение S_2 получается отрицательным, S_1 — положительным. Следовательно, стержень 1 растянут, а стержень 2 сжат.

Для проверки расчета строим в масштабе треугольник сил \vec{P} , \vec{S}_1 и \vec{S}_2 , учитывая, что направление \vec{S}_2 в этом треугольнике должно быть противоположно направлению \vec{S}_2 на рис. 5, так как стержень 2 сжат (рис. 6).

Треугольник сил получается замкнутым, т. е. реакции \vec{S}_1 и \vec{S}_2 определены правильно. Реакции других стержней

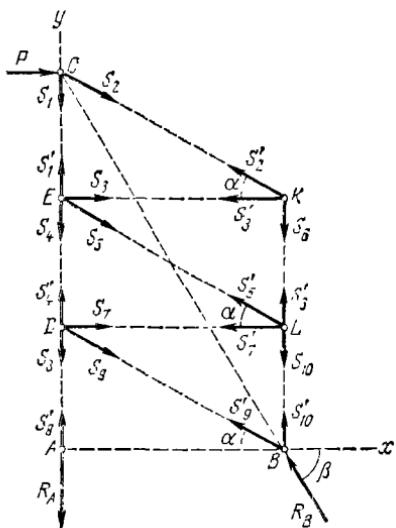


Рис. 5

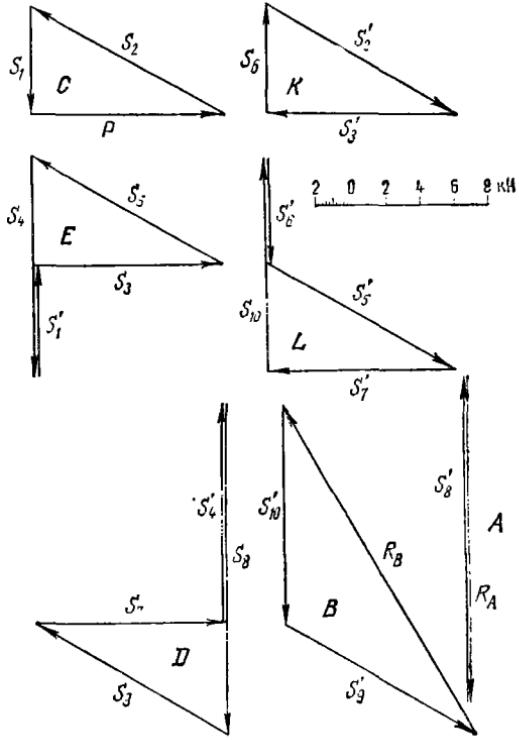


Рис. 6

фермы определяем аналогично. Замкнутые многоугольники сил, приложенных к каждому из узлов фермы, показаны на рис. 6.

Узел K :

$$\Sigma X_i = 0; \quad -S'_2 \cos 30^\circ - S'_3 = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad -S_6 + S'_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Подставляя в эти уравнения $S'_2 = S_2 = -12,7 \text{ кН}$, получаем:

$$S'_3 = -S'_2 \cos 30^\circ = -(-12,7) \sqrt{3}/2 = 11 \text{ кН};$$

$$S_6 = S'_1 \cos 60^\circ = -12,7 \cdot 0,5 = -6,35 \text{ кН}.$$

Узел E:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; \quad S_3 + S_5 \cos 30^\circ = 0; \\ \Sigma Y_i &= 0; \quad S'_1 - S_4 - S_5 \cos 60^\circ = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}S_3 &= -S_4 / \cos 30^\circ = -11,0 / 0,866 = -12,7 \text{ кН}, \\ S_4 &= S'_1 - S_5 \cos 60^\circ = 6,35 - (-12,7) \cdot 0,5 = 12,7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Узел L:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; \quad -S'_7 - S'_8 \cos 30^\circ = 0; \\ \Sigma Y_i &= 0; \quad S'_6 + S'_3 \cos 60^\circ - S_{10} = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}S'_7 &= -S'_8 \cos 30^\circ = -(-12,7) \cdot 0,866 = 11,0 \text{ кН}; \\ S_{10} &= S'_6 + S'_3 \cos 60^\circ = -6,35 - 12,7 \cdot 0,5 = -12,7 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Узел D:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= 0; \quad S_7 + S_9 \cos 30^\circ = 0; \\ \Sigma Y_i &= 0; \quad S'_4 - S_8 - S_9 \cos 60^\circ = 0,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}S_9 &= -S_7 / \cos 30^\circ = -11,0 / 0,866 = -12,7 \text{ кН}; \\ S_8 &= S'_4 - S_9 \cos 60^\circ = 12,7 - (-12,7) \cdot 0,5 = 19,05 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Таким образом, реакции всех стержней фермы определены.

Заметим, что реакции опор рассматриваемой фермы можно определить, составив уравнения равновесия сил, приложенных к узлам A и B (рис. 7).

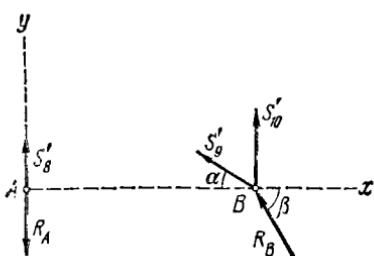


Рис. 7

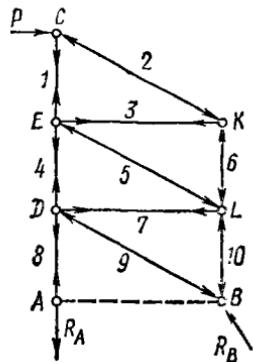


Рис. 8

Узел A:

$$\Sigma Y_i = 0; \quad S'_8 - R_A = 0. \quad R_A = S'_8 = 19,05 \text{ кН}.$$

Узел B:

$$\Sigma X_i = 0; \quad -S'_9 \cos 30^\circ - R_B \cos \beta = 0;$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad S'_10 + S'_9 \cos 60^\circ + R_B \sin \beta = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем:

$$R_B = 22 \text{ кН}, \beta = \arctg 1,73 = 60^\circ.$$

Числовые значения реакций R_A и R_B , полученные двумя способами, совпадают.

Замкнутые многоугольники сил, приложенных к опорным узлам фермы, показаны на рис. 6.

3. Составление таблицы усилий в стержнях фермы и построение схемы фермы с действительными направлениями этих усилий. По результатам расчета составляем таблицу усилий в стержнях фермы (табл. 1).

Таблица 1

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Знак усилия	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
Усилие (кН)	6,35	12,7	11,0	12,7	12,7	6,35	11,0	19,05	12,7	12,7

Схема фермы с действительными направлениями усилий в стержнях показана на рис. 8.

СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Задание С-2. Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций представлены на рис. 9—11 (размеры — в м), нагрузка указана в табл. 2.

Таблица 2

Номер варианта задания (рис. 9—11)	G кН	P кН	M , кН·м	q , кН/м	α , град	Номер варианта задания (рис. 9—11)	G кН	P кН	M , кН·м	q , кН/м	α , град
	G кН	P кН					G кН	P кН			
1	10	5	20	1	30	16	20	10	—	2	45
2	12	8	10	4	60	17	25	5	—	0,5	45
3	8	4	5	2	60	18	20	10	10	—	30
4	14	—	8	3	30	19	—	4	8	1	45
5	—	6	7	1	45	20	—	10	6	0,5	45
6	—	10	4	2	60	21	—	8	7	0,5	30
7	—	6	5	1	45	22	—	10	8	1	30
8	16	7	6	2	60	23	—	7	10	2	30
9	6	6	4	2	30	24	—	6	7	1,5	30
10	10	8	9	1	30	25	—	14	20	0,5	45
11	—	4	7	0,5	45	26	—	16	14	1	30
12	10	6	8	—	45	27	5	4	8	2,5	45
13	12	10	6	2	30	28	—	10	7	3	30
14	10	6	10	1	45	29	—	6	8	1	15
15	4	4	4	2	60	30	15	10	14	—	30

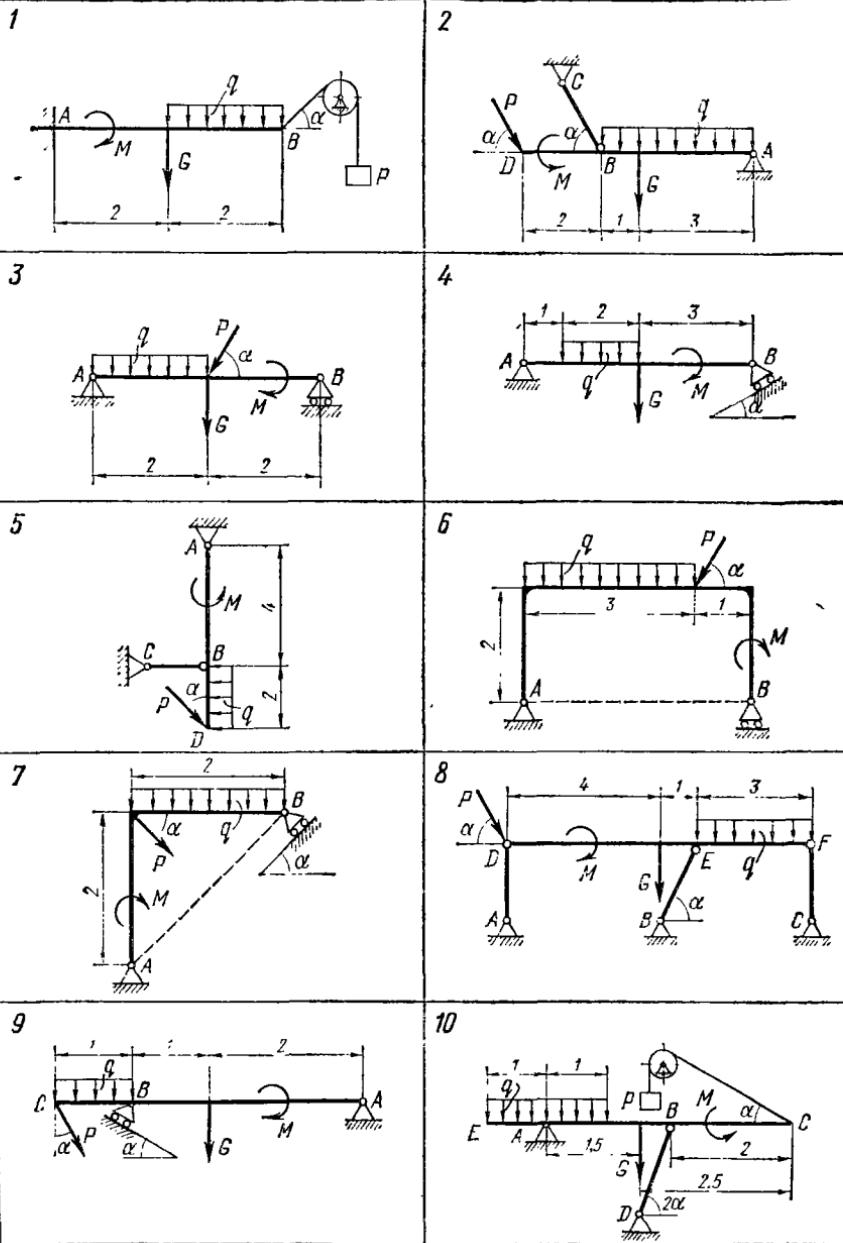
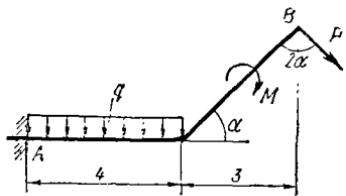
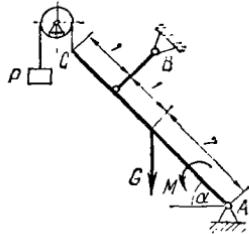


Рис. 9

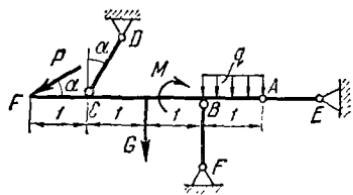
11



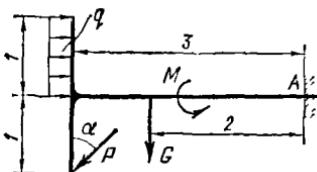
12



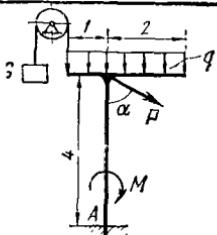
13



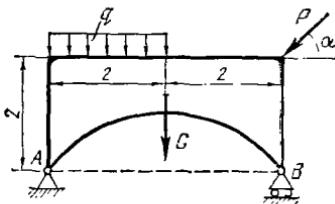
14



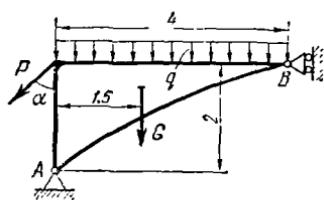
15



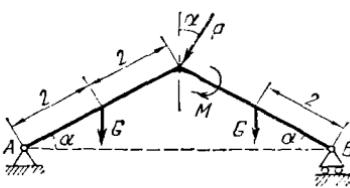
16



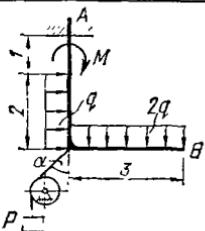
17



18



19



20

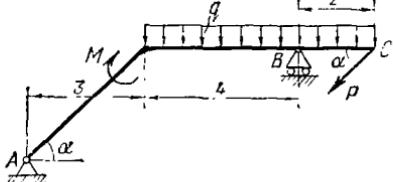
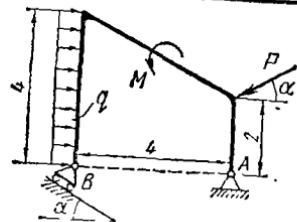
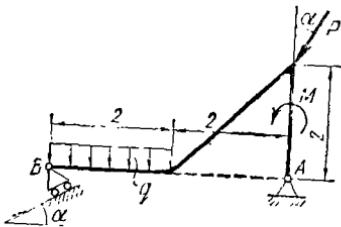


Рис. 10

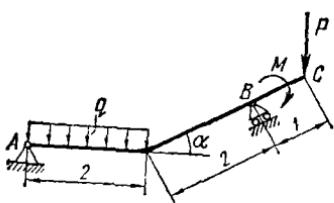
21



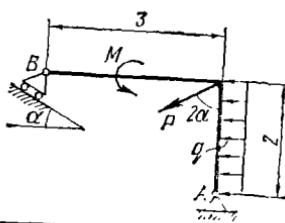
22



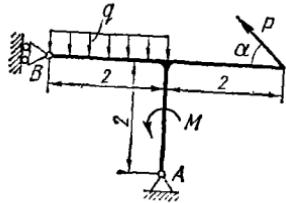
23



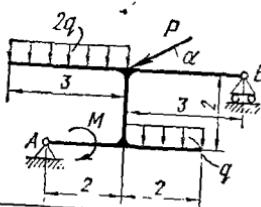
24



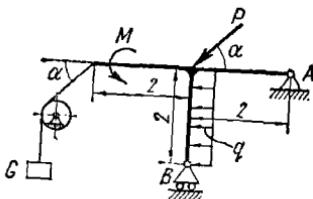
25



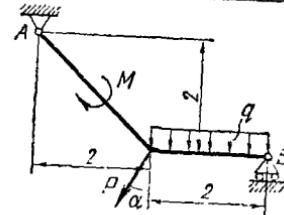
26



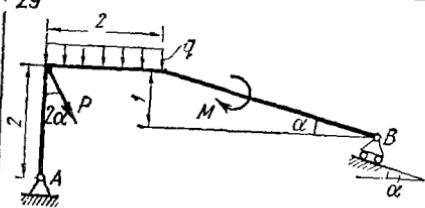
27



28



29



30

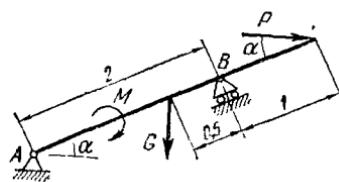


Рис. 11

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 12); $G = 10 \text{ кН}$; $P = 5 \text{ кН}$, $M = 8 \text{ кНм}$; $q = 0,5 \text{ кН/м}$; $\alpha = 30^\circ$, размеры — в м.

Определить реакцию опоры A и реакцию стержня CD .

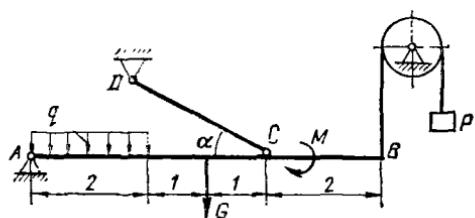


Рис. 12

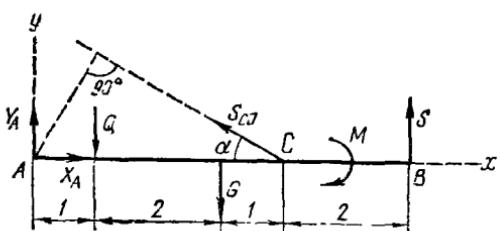


Рис. 13

Для плоской системы сил, приложенных к балке, составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma M_{iA} = 0; -Q \cdot 1 - G \cdot 3 + S_{CD} \cdot 4 \sin 30^\circ - M + S \cdot 6 = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma X_i = 0; X_A - S_{CD} \cos 30^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma Y_i = 0; Y_A - Q - G + S_{CD} \cos 60^\circ + S = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1)

$$S_{CD} = \frac{Q \cdot 1 + G \cdot 3 + M - S \cdot 6}{4 \sin 30^\circ} = \frac{1 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 8 - 5 \cdot 6}{4 \cdot 0,5} = 4,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$X_A = S_{CD} \cos 30^\circ = 4,5 \cdot 0,866 = 3,90 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$Y_A = Q + G - S_{CD} \cos 60^\circ - S = 1 + 10 - 4,5 \cdot 0,5 - 5 = 3,75 \text{ кН.}$$

Значения X_A , Y_A , S_{CD} получаются положительными. Это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями.

Задание С-3. Определение усилий в стержнях плоской фермы способом Риттера

Найти способом Риттера усилия в стержнях 1, 2, 3, 4, 5 фермы. Схемы ферм представлены на рис. 14 — 16, а нагрузка указана в табл. 3.

Таблица 3

Номер варианта (рис. 14 — 16)	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	$a, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$\alpha, \text{ град}$
	кН							
1	5	5	5	20	30	—	—	—
2	5	10	20	30	—	—	—	30
3	10	5	20	20	—	2	6,0	—
4	10	30	50	—	—	—	—	—
5	5	5	20	20	—	—	—	30
6	10	20	10	10	20	—	—	30
7	5	10	20	—	—	—	—	30
8	10	20	30	—	—	2	5,0	—
9	10	20	30	—	—	—	—	—
10	20	10	10	20	—	—	—	45
11	10	20	40	—	—	—	—	45
12	10	20	30	30	—	2	6,0	—
13	10	10	10	20	20	—	—	45
14	10	10	10	10	20	—	—	—
15	10	20	10	—	—	2	1,5	—
16	10	20	20	30	—	—	—	—
17	10	20	20	—	—	3	5,0	—
18	10	40	20	20	—	3	3,5	—
19	10	10	40	20	—	3	3,5	—
20	10	40	20	—	—	—	—	—
21	10	20	10	40	—	3	4,0	—
22	10	10	20	30	—	—	—	—
23	5	10	10	40	20	—	—	—
24	10	20	20	20	—	2	2,4	—
25	10	20	20	—	—	2	2,4	—
26	10	20	20	—	—	2	2,3	—
27	10	20	10	—	—	2	3,0	—
28	20	20	10	—	—	—	—	—
29	10	20	20	40	—	2	2,2	—
30	10	10	20	30	30	—	—	—

Пример выполнения задания. Дано: схема фермы (рис. 17); $P_1 = 58 \text{ кН}$; $P_2 = 50 \text{ кН}$; $P_3 = 85 \text{ кН}$. Найти усилия S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 .

Решение. 1. *Аналитическое определение реакций опор.* Рассмотрим систему уравновешивающих сил, приложенных к ферме. Отбросим связи (опоры A B), заменив их действие на ферму реакциями. Реакцию опоры A разложим на составляющие \bar{X}_A и \bar{Y}_A , направленные вдоль осей координат. Реакцию шарнира B направляем вверх по оси опорного стержня BN.

Силу \bar{P}_3 разложим на две составляющие \bar{P}'_3 и \bar{P}''_3 , имеющие модули $P'_3 = P_3 \cos \alpha$ и $P''_3 = P_3 \sin \alpha$ (рис. 18).

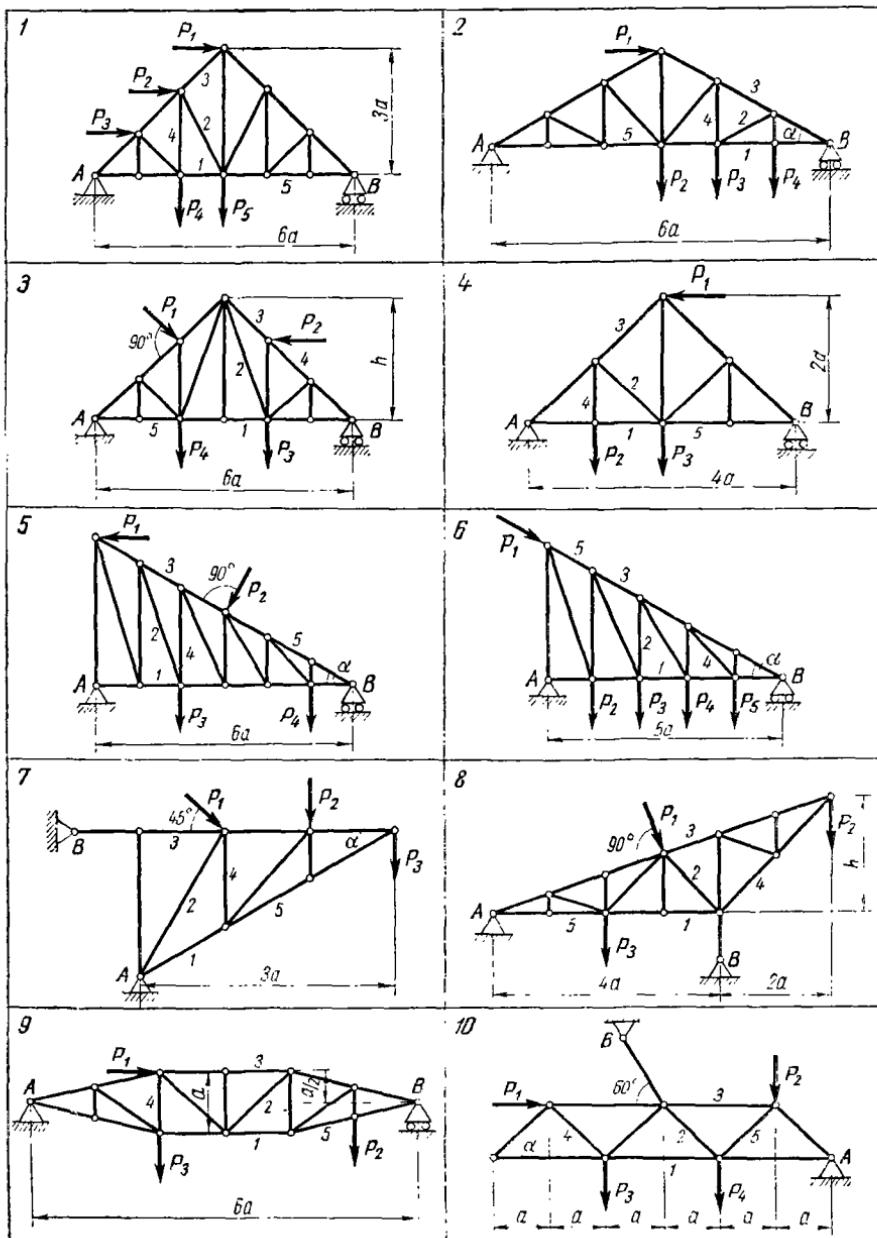


Рис. 14

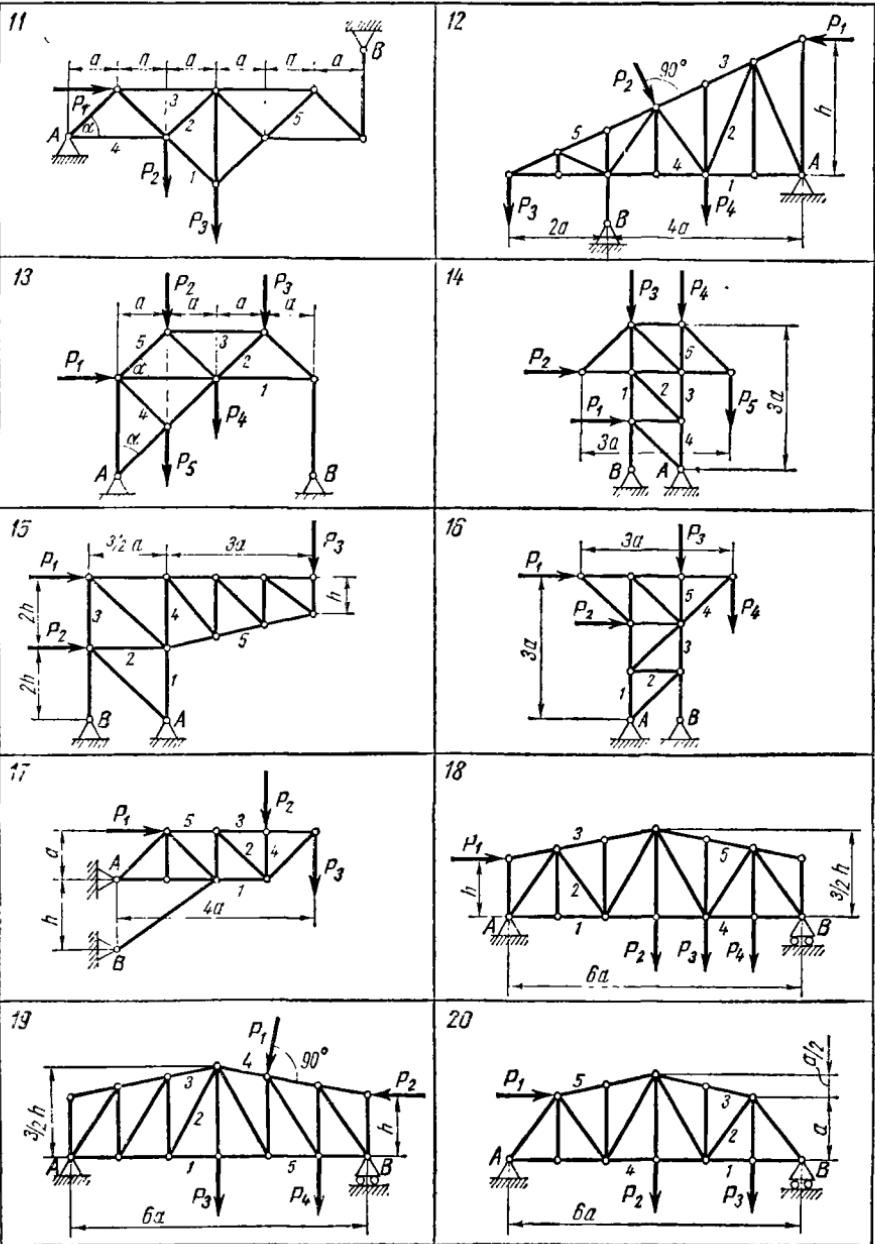


Рис. 15

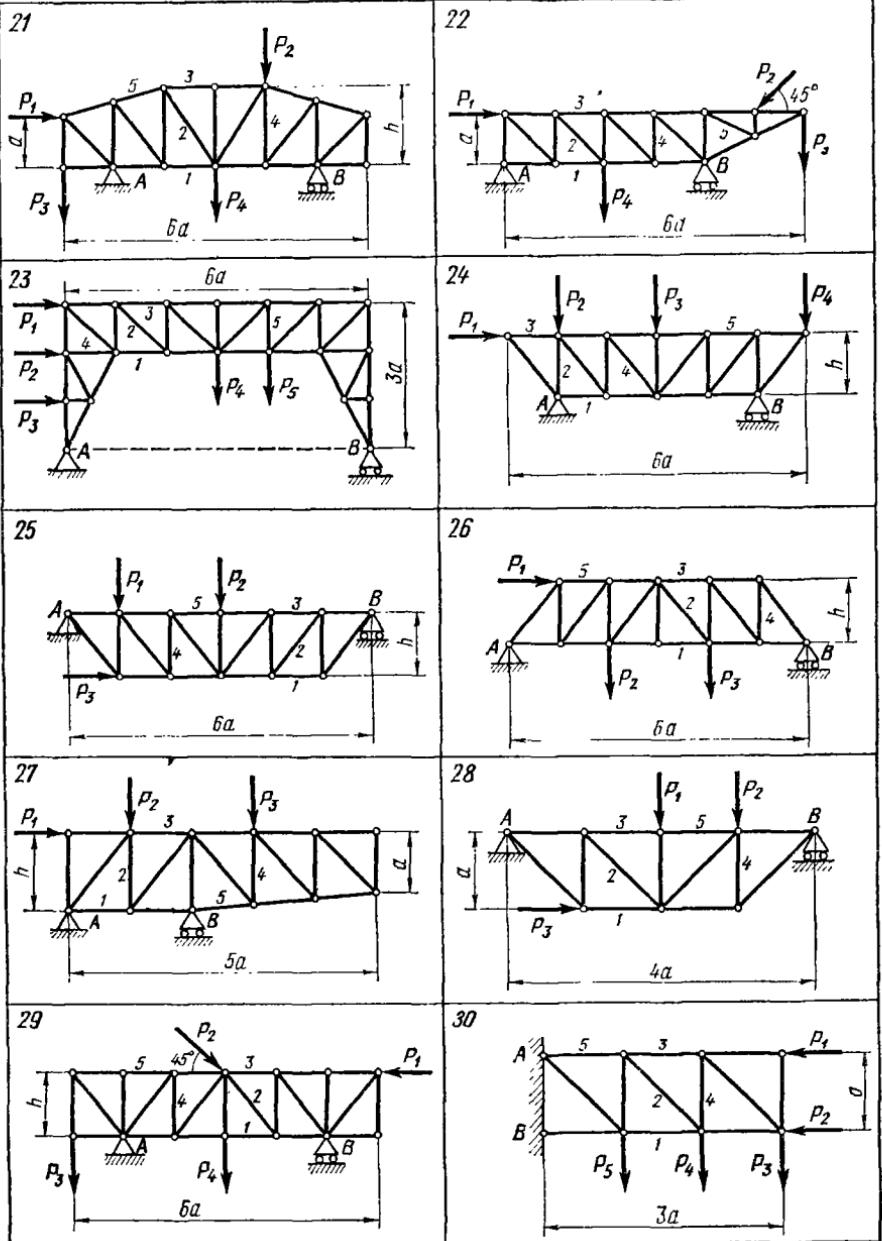


FIG. 16

Вычисляем $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$:

$$\sin \alpha = \frac{DE}{CD} = \frac{a}{2\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = 0,447;$$

$$\cos \alpha = \frac{CE}{CD} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (a/2)^2}} = 0,894.$$

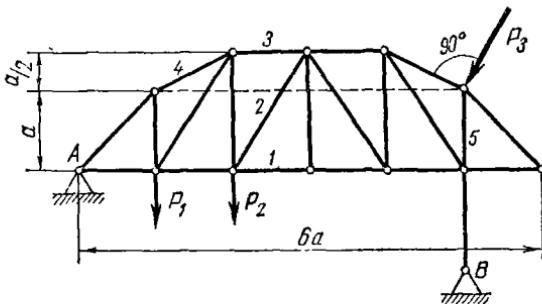


Рис. 17

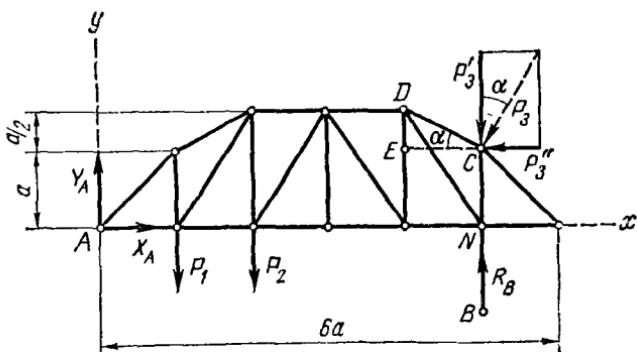


Рис. 18

Определяем модули сил P'_3 и P''_3 :

$$P'_3 = 85 \cdot 0,894 = 76,0 \text{ кН}; \quad P''_3 = 85 \cdot 0,447 = 38,0 \text{ кН}.$$

Для плоской системы сил, приложенных к ферме, составляем три уравнения равновесия:

$$\Sigma M_{iA} = 0; \quad -P_1 \cdot a - P_2 \cdot 2a - P'_3 \cdot 5a + P''_3 \cdot a + R_B \cdot 5a = 0; \quad (1)$$

$$\Sigma X_i = 0; \quad -P''_3 + X_A = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 - P'_3 + R_B = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1)

$$R_B = \frac{P_1 + P_2 \cdot 2 + P'_3 \cdot 5 - P''_3}{5} = \frac{58 + 50 \cdot 2 + 76 \cdot 5 - 38}{5} = 100 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2)

$$X_A = P_3'' = 38 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$Y_A = P_1 + P_2 + P_3' - R_B = 58 + 50 + 76 - 100 = 84 \text{ кН.}$$

2. Определение усилий в стержнях фермы. Найдем усилия в пяти стержнях фермы способом Риттера. Для определения усилий в стерж-

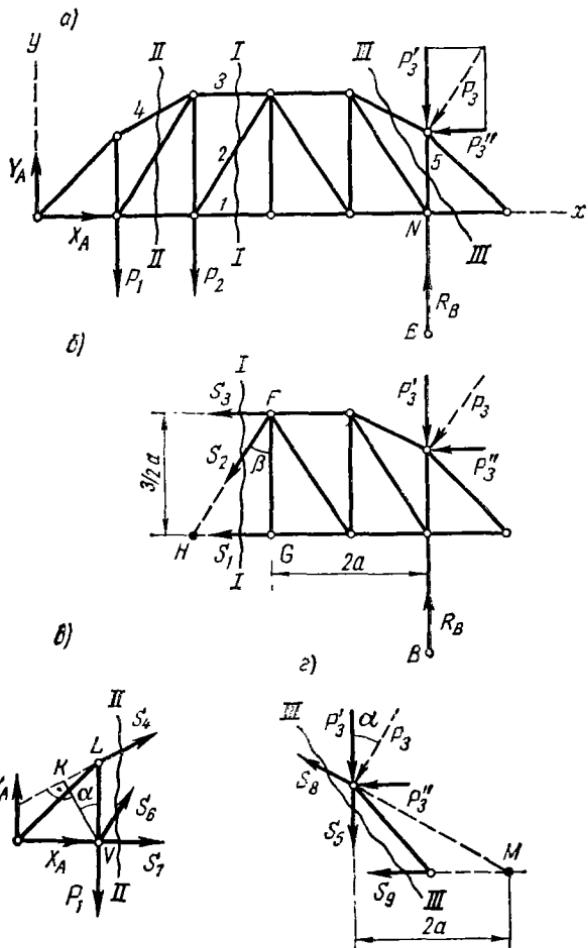


Рис. 19

нях 1, 2, 3 (рис. 19, а) делаем разрез I—I и рассматриваем равновесие сил, приложенных к одной части фермы (рис. 19, б).

Целесообразно рассматривать равновесие той части фермы, для которой объем вычислительной работы меньше. Следует составлять такие уравнения равновесия, каждое из которых содержало бы лишь

одно неизвестное — искомое усилие. Это позволит определить каждое усилие независимо от усилий в других стержнях.

По-прежнему условно предполагаем все стержни растянутыми. Знак минус в ответе укажет на то, что стержень сжат.

Для определения S_1 составляем уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия \bar{S}_2 и \bar{S}_3 :

$$\Sigma M_{II} = 0; -S_1 \cdot 1,5a - P'_3 \cdot 2a - P''_3 \cdot 0,5a + R_B \cdot 2a = 0,$$

откуда

$$S_1 = \frac{R_B \cdot 2 - P'_3 \cdot 2 - P''_3 \cdot 0,5}{1,5} = \frac{100 \cdot 2 - 76 \cdot 2 - 38 \cdot 0,5}{1,5} = 19,3 \text{ кН.}$$

Для определения S_2 проектируем силы на ось Ay :

$$\Sigma Y_i = 0; -S_2 \cos \beta - P'_3 + R_B = 0,$$

где

$$\cos \beta = \frac{FG}{FH} = \frac{1,5a}{\sqrt{a^2 + (1,5a)^2}} = 0,832,$$

откуда

$$S_2 = \frac{R_B - P'_3}{\cos \beta} = \frac{100 - 76}{0,832} = 28,8 \text{ кН.}$$

Для определения S_3 составляем уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия \bar{S}_1 и \bar{S}_2 :

$$\Sigma M_{III} = 0; S_3 \cdot 1,5a - P'_3 \cdot 3a + P''_3 \cdot a + R_B \cdot 3a = 0,$$

откуда

$$S_3 = \frac{P''_3 \cdot 3 - P'_3 \cdot 3 - R_B \cdot 3}{1,5} = \frac{76 \cdot 3 - 38 - 100 \cdot 3}{1,5} = -73,3 \text{ кН.}$$

Для определения усилия в стержне 4 делаем разрез $II - II$ и рассматриваем равновесие сил, приложенных к левой части фермы (рис. 19, б). Составляем уравнение

$$\Sigma M_{IV} = 0; -Y_A \cdot a - S_4 \cdot VK = 0,$$

где

$$VK = VL \cos \alpha = a \cdot 0,894.$$

Отсюда

$$S_4 = -Y_A \cdot a / 0,894 = -84 / 0,894 = -94 \text{ кН.}$$

Для определения усилия S_5 делаем разрез $III - III$ и рассматриваем равновесие сил, приложенных к правой части фермы (рис. 19 г).

Составляем уравнение

$$\Sigma M_{IM} = 0; P'_3 \cdot 2a - S_5 \cdot 2a + P''_3 \cdot a = 0.$$

Отсюда

$$S_5 = -\frac{P'_3 \cdot 2 + P''_3}{2} = -\frac{76 \cdot 2 + 38}{2} = -95 \text{ кН.}$$

Задание С-4. Определение реакций опор составной балки

Найти реакции опор и давления в промежуточных шарнирах составной балки. Схемы балок представлены на рис. 20–22 (размеры – в м), нагрузка указана в табл. 4.

Таблица 4

Номер варианта (рис. 20–22)	P_1	P_2	P_3	M_1	M_2	q , кН/м
	кН	кН	кН	кНм	кНм	
1	6,0	10,0	—	25,0	—	0,8
2	7,0	4,0	—	20,0	—	1,0
3	12,0	18,0	—	36,0	—	1,4
4	8,0	10,0	5,0	30,0	25,0	—
5	9,0	15,0	—	32,0	—	1,8
6	10,0	7,0	—	18,0	—	0,9
7	4,0	6,0	9,0	20,0	28,0	—
8	5,0	4,0	—	16,0	—	1,5
9	10,0	7,0	14,0	24,0	—	1,2
10	8,0	14,0	—	26,0	—	1,0
11	10,0	5,0	13,0	12,0	20,0	—
12	7,0	12,0	—	15,0	—	1,5
13	8,0	12,0	6,0	24,0	—	1,6
14	10,0	7,0	—	30,0	—	1,2
15	14,0	9,0	5,0	26,0	18,0	—
16	11,0	15,0	—	40,0	—	1,0
17	8,0	12,0	—	20,0	28,0	—
18	10,0	15,0	8,0	35,0	—	—
19	9,0	13,0	—	25,0	—	1,4
20	12,0	6,0	—	32,0	—	0,8
21	6,0	10,0	—	30,0	—	1,5
22	12,0	20,0	—	30,0	24,0	2,0
23	8,0	14,0	—	25,0	—	1,0
24	9,0	15,0	—	28,0	—	1,2
25	9,0	15,0	12,0	24,0	35,0	—
26	6,0	12,0	16,0	26,0	—	1,5
27	10,0	16,0	—	32,0	—	1,4
28	7,0	10,0	14,0	26,0	—	1,3
29	5,0	13,0	—	30,0	—	2,0
30	18,0	7,0	12,0	16,0	—	—

Пример выполнения задания. Дано: схема составной балки (рис. 23); $P_1 = 12,0$ кН; $P_2 = 20,0$ кН; $M = 50,0$ кНм; $q = 2,0$ кН/м.

Решение. Составная балка представляет собой систему простых балок, соединенных шарнирами. Поэтому рассматриваем системы уравновешивающихся сил, приложенных к каждой простой балке в отдельности, учитывая давления в шарнирах, соединяющих эти балки.

Начинаем с балки DE (рис. 24), так как число неизвестных сил (\bar{R}_E , \bar{X}_D , \bar{Y}_D) приложенных к этой балке, равно числу уравнений равновесия:

$$\Sigma M_{ED} = 0; R_E \cdot 4 - P_2 \cdot 2 \cos 30^\circ - Q_1 \cdot 1 = 0, \quad (1)$$

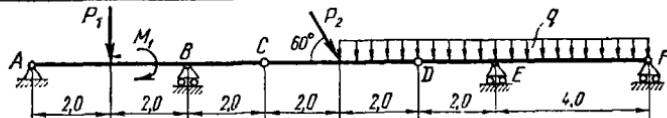
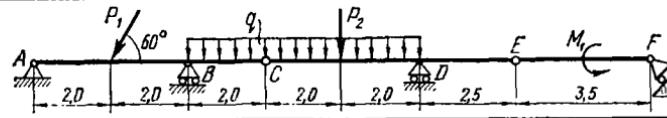
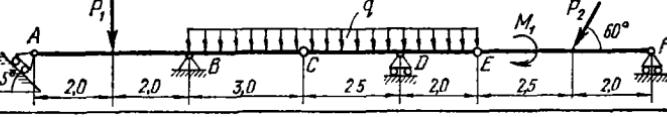
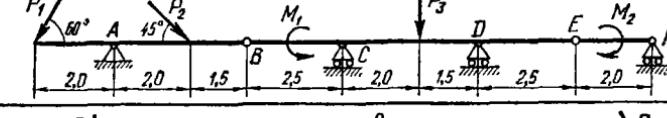
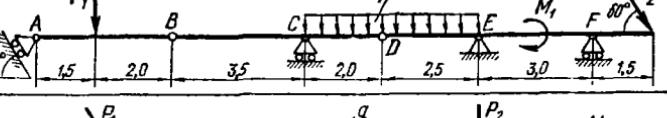
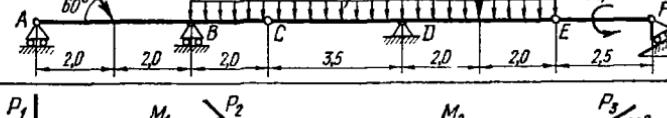
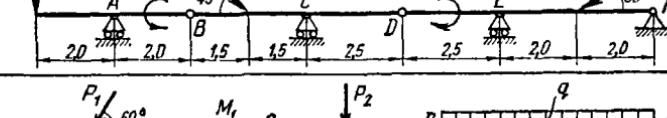
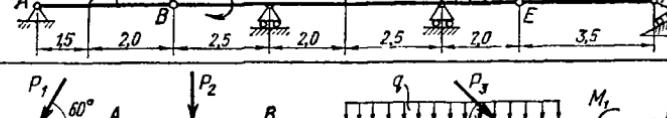
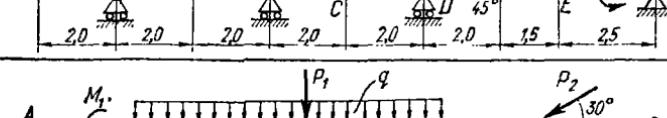
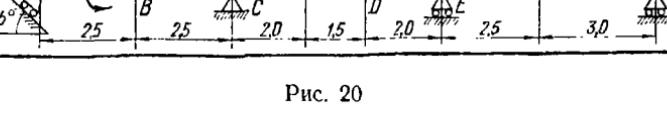
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Рис. 20

11	
12	
13	
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	

Рис. 21

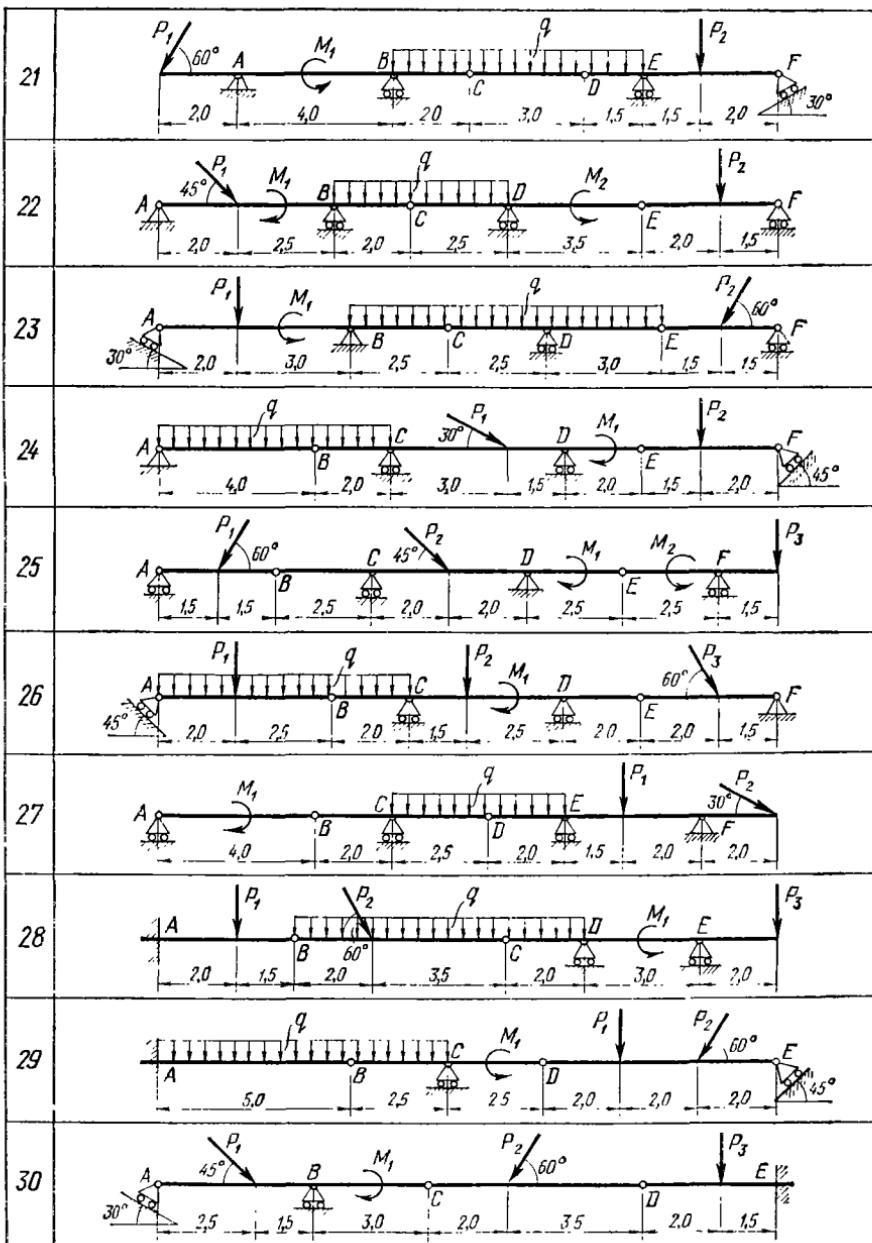


Рис. 22

где

$$Q_1 = q \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН};$$

$$\sum X_t = 0; X_D - P_2 \cos 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum Y_t = 0; Y_D - Q_1 - P_2 \cos 30^\circ + R_E = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1)

$$R_E = \frac{P_2 \cdot 2 \cos 30^\circ + Q_1 \cdot 1}{4} = \frac{20 \cdot (2\sqrt{3}/2) + 4 \cdot 1}{4} = 9,66 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$X_D = P_2 \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10,0 \text{ кН.}$$

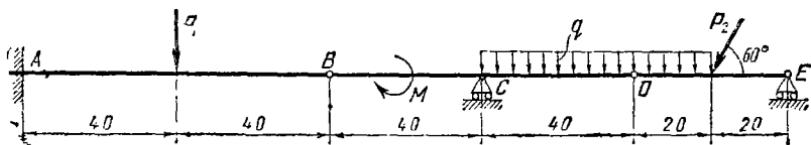


Рис. 23

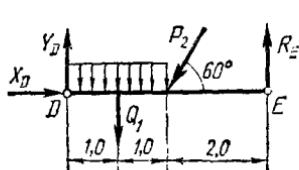


Рис. 24

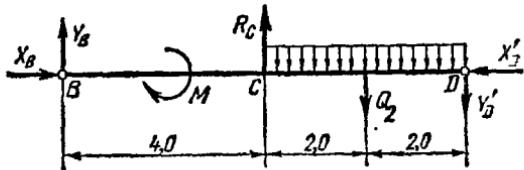


Рис. 25

Из уравнения (3)

$$Y_D = Q_1 + P_2 \cos 30^\circ - R_E = 4 + 20(\sqrt{3}/2) - 9,66 = 11,6 \text{ кН.}$$

Для балки BD (рис. 24):

$$\sum M_{tB} = 0; -M + R_C \cdot 4 - Q_2 \cdot 6 - Y'_D \cdot 8 = 0, \quad (4)$$

где

$$Q_2 = q \cdot 4 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ кН};$$

$$\sum X_t = 0; X_B - X'_D = 0; \quad (5)$$

$$\sum Y_t = 0; Y_B + R_C - Q_2 - Y'_D = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (4)

$$R_C = \frac{M + Q_2 \cdot 6 + Y'_D \cdot 8}{4} = \frac{50 + 8 \cdot 6 + 11,6 \cdot 8}{4} = 47,7 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$X_B = X'_D = 10,0 \text{ кН.}$$

Из уравнения (6)

$$Y_B = -R_C + Q_2 + Y'_D = -47,7 + 8 + 11,6 = -28,1 \text{ кН.}$$

Для балки AB (рис. 26):

$$\Sigma M_{iA} = 0; M_A - P_1 \cdot 4 - Y'_B \cdot 8 = 0; \quad (7)$$

$$\Sigma X_i = 0; X_A - X'_B = 0; \quad (8)$$

$$\Sigma Y_i = 0; Y_A - P_1 - Y'_B = 0. \quad (9)$$

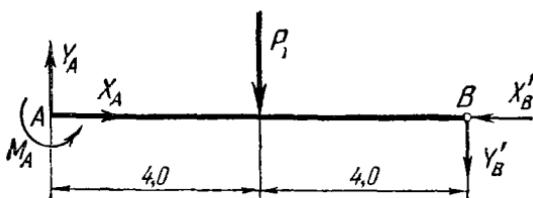


Рис. 26

Из уравнения (7)

$$M_A = P_1 \cdot 4 + Y'_B \cdot 8 = 12 \cdot 4 - 28,1 \cdot 8 = -177 \text{ кНм.}$$

Из уравнения (8)

$$X_A = X'_B = 10,0 \text{ кН.}$$

Из уравнения (9)

$$Y_A = P_1 + Y'_B = 12 - 28,1 = -16,1 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности произведенных расчетов следует убедиться в том, что соблюдается любое из уравнений равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции, например:

$$\Sigma Y_i = 0; Y_A - P_1 + R_C - Q_2 - Q_1 - P_2 \cos 30^\circ + R_E = 0.$$

$$-16,1 - 12 + 47,7 - 8 - 4 - 20 (\sqrt{3}/2) + 9,66 \approx -57,4 + 57,4 = 0.$$

Результаты расчета приведены в табл. 5

Таблица 5

X_A	Y_A	M_A	R_C	R_E	X_B	Y_B	X_D	Y_D
10,0 кН	-16,1 кН	-177 кНм	47,7 кН	9,66 кН	10,0 кН	-28,1 кН	10,0 кН	11,6 кН

Задание С-5. Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)

Найти реакции опор и давление в промежуточном шарнире составной конструкции. Схемы конструкций представлены на рис. 27 – 29 (размеры – в м), нагрузка указана в табл. 6.

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 30); $P_1 = 10 \text{ кН}$; $P_2 = 12 \text{ кН}$; $M = 25 \text{ кНм}$; $q = 2 \text{ кН/м}$, $\alpha = 60^\circ$.

Определить реакции опор и давление в промежуточном шарнире.

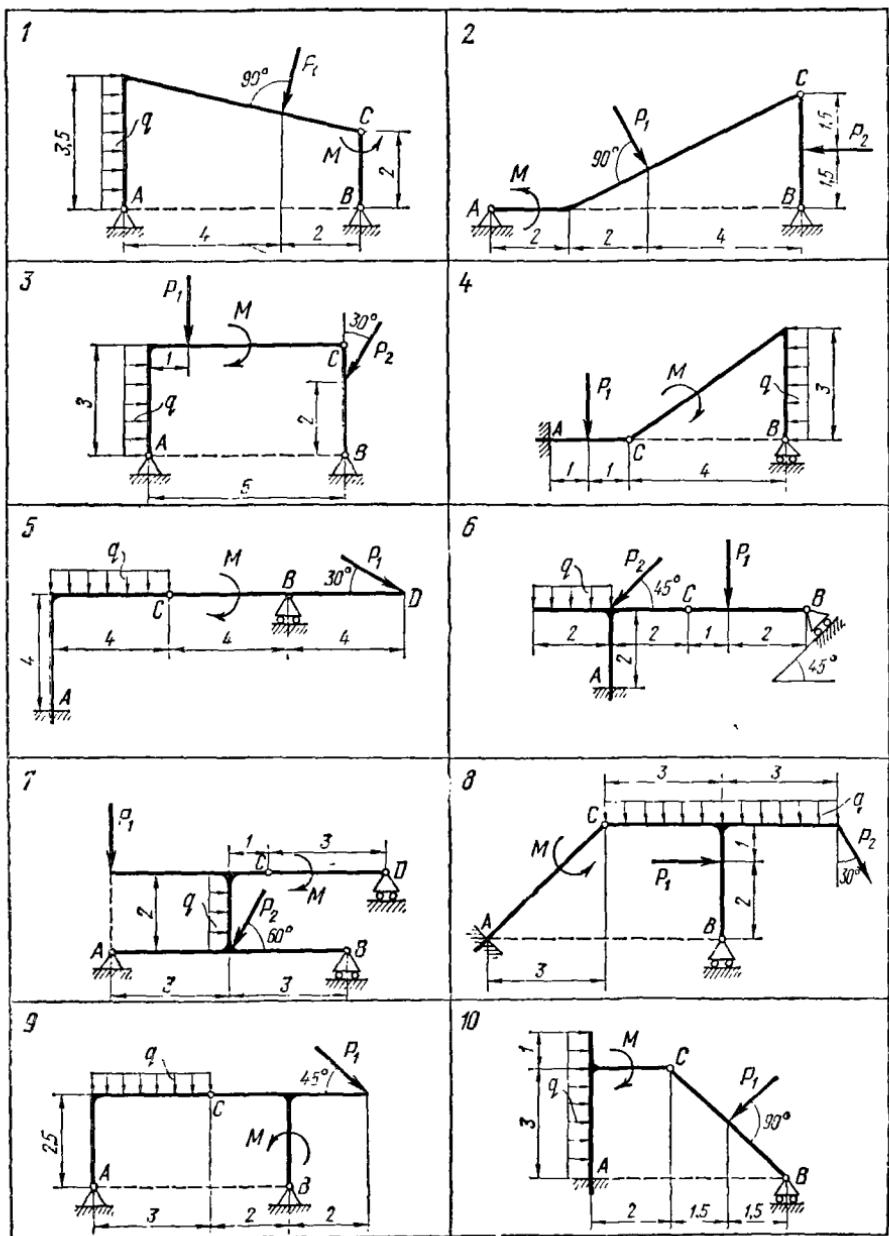


Рис. 27

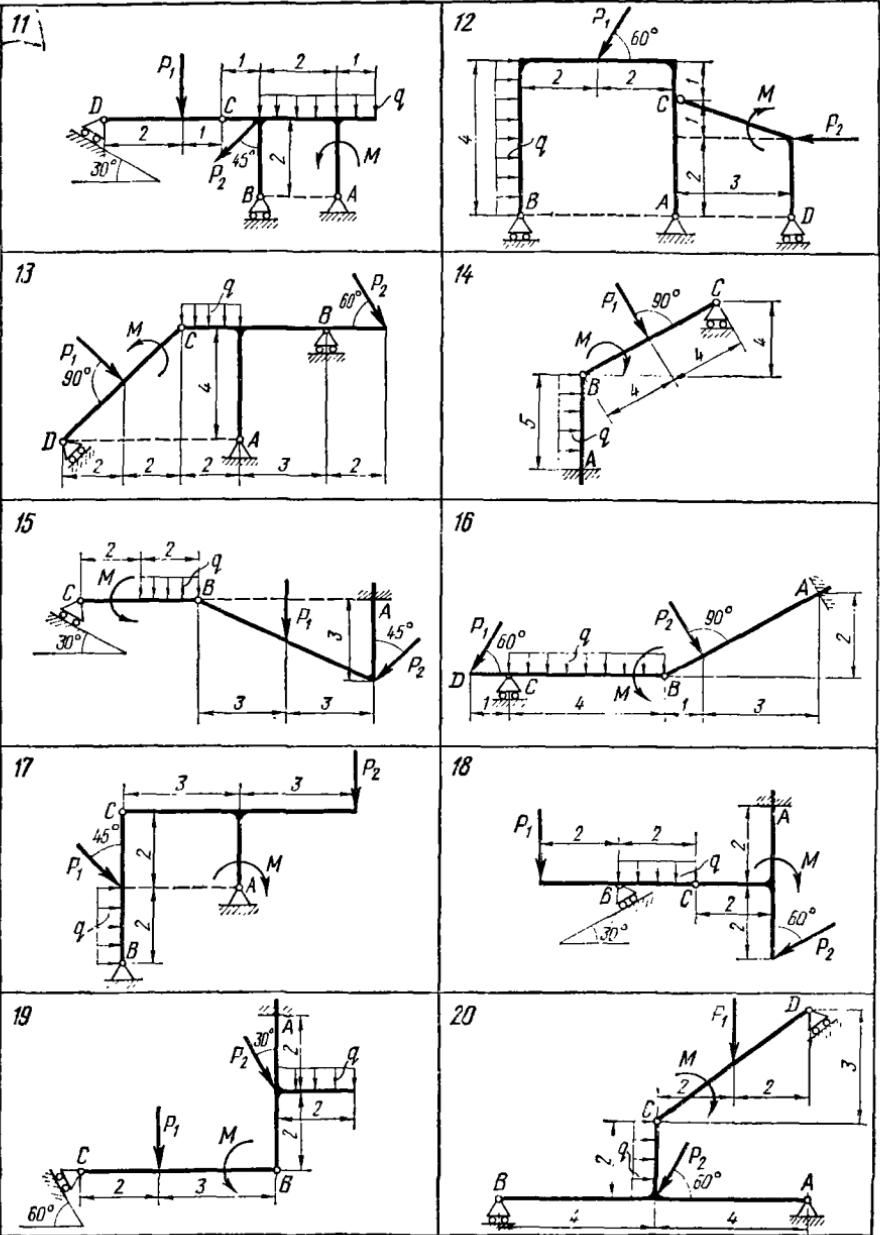


Рис. 28

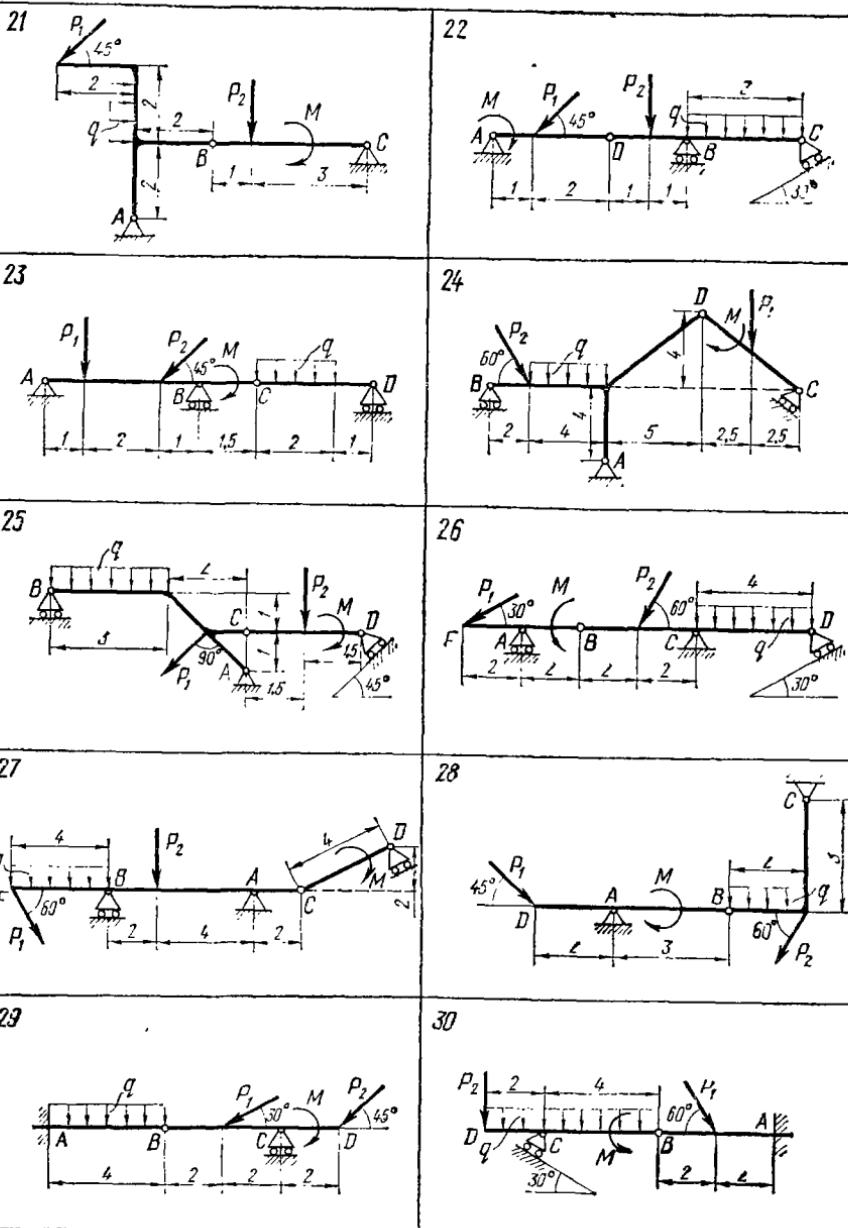


Рис 29

Таблица 6

Номер варианта (рис. 27—29)	P_1	P_2	M	q	Номер в фрагментах (рис. 27—29)	P_1	P_2	M	q
	кН	кН	кН·м	кН·м		кН	кН	кН·м	кН·м
1	6,0	—	25,0	0,8	16	8,0	11,0	31,0	0,8
2	5,0	8,0	26,0	—	17	9,0	15,0	26,0	1,1
3	8,0	10,0	33,0	1,1	18	7,0	16,0	27,0	0,8
4	10,0	—	25,0	1,3	19	6,0	18,0	35,0	1,4
5	12,0	—	27,0	1,0	20	7,0	16,0	32,0	0,8
6	14,0	12,0	—	0,9	21	8,0	17,0	30,0	1,2
7	16,0	8,0	18,0	1,4	22	5,0	6,0	34,0	1,5
8	12,0	6,0	20,0	1,0	23	14,0	10,0	36,0	1,2
9	14,0	—	28,0	1,4	24	10,0	13,0	28,0	1,3
10	8,0	—	26,0	0,9	25	11,0	10,0	33,0	1,0
11	15,0	10,0	29,0	1,0	26	15,0	15,0	18,0	1,4
12	15,0	8,0	28,0	1,5	27	11,0	14,0	36,0	1,5
13	7,0	6,0	15,0	1,1	28	12,0	12,0	30,0	1,1
14	5,0	—	30,0	0,9	29	10,0	9,0	35,0	1,3
15	6,0	10,0	24,0	1,5	30	9,0	10,0	29,0	1,5

Решение. Сначала рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных ко всей конструкции (рис. 31), что позволит определить вертикальные составляющие реакции опор A и B .

Для упрощения вычисления момента силы P_1 раскладываем ее на составляющие P'_1 и P''_1 :

$$P'_1 = P_1 \cos \alpha = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН};$$

$$P''_1 = P_1 \sin \alpha = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН}.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\Sigma M_A = 0, \quad P'_1 \cdot 4 + P'_1 \cdot 3 - Q \cdot 2 - M - P_2 \cdot 5 + Y_B \cdot 7 = 0, \quad (1)$$

где $Q = 4$, $q = 4 \cdot 2 = 8$ кН,

$$\Sigma Y_t = 0; \quad P''_1 + Y_A - P_2 + Y_B = 0; \quad (2)$$

$$\Sigma X_t = 0; \quad X_A + X_B - P'_1 + Q = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (1)

$$Y_B = \frac{-P'_1 \cdot 4 - P'_1 \cdot 3 + Q \cdot 2 + M + P_2 \cdot 5}{7} = \\ = \frac{-5 \cdot 4 - 8,66 \cdot 3 + 8 \cdot 2 + 25 + 12 \cdot 5}{7} = 7,86 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2)

$$Y_A = P'_1 + P_2 - Y_B = 8,66 + 12 - 7,86 = 12,8 \text{ кН}.$$

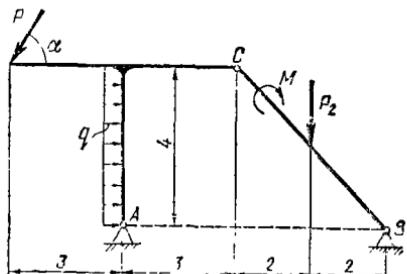


Рис. 30

Уравнение (3), содержащее два неизвестных, не позволяет определить их числовые значения и устанавливает лишь зависимость между ними.

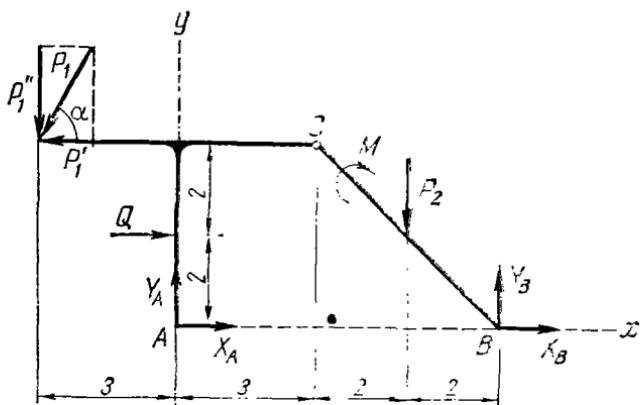


Рис. 31

Рассмотрим теперь систему уравновешивающихся сил, приложенных к правой части конструкции (рис. 32).

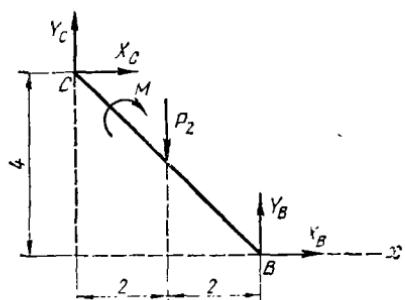
$$\sum M_{iC} = 0; -M - P_2 \cdot 2 + X_B \cdot 4 + Y_B \cdot 4 = 0; \quad (4)$$

$$\sum X_i = 0; X_B + X_C = 0; \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0; Y_C - P_2 + Y_B = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (4)

$$X_B = \frac{M + P_2 \cdot 2 - Y_B \cdot 4}{4} = \frac{25 + 12 \cdot 2 - 7,86 \cdot 4}{4} = 4,39 \text{ кН.}$$



Из уравнения (5)

$$X_C = -X_B = -4,39 \text{ кН.}$$

Из уравнения (6)

$$Y_C = P_2 - Y_B = 12 - 7,86 = 4,14 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$X_A = -X_B + P'_1 - Q = \\ = -4,39 + 5 - 8 = -7,39 \text{ кН.}$$

Для проверки правильности произведенных расчетов убедимся в том, что соблюдается любое из уравнений равновесия для сил, приложенных ко всей конструкции (см. рис. 31), например,

$$\sum M_{iB} = 0; P'_1 \cdot 10 + P''_1 \cdot 10 - Q \cdot 2 - Y_A \cdot 7 - M + P_2 \cdot 2 = \\ = 5 \cdot 4 + 8,66 \cdot 10 - 8 \cdot 2 - 12,8 \cdot 7 - 25 + 12 \cdot 2 = 130,6 - 130,6 = 0.$$

Результаты расчета приведены в табл. 7.

Таблица 7

Сили, кН

X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C
-7,39	12,8	4,39	7,86	-4,39	4,14

Задание С-6. Определение реакций опор составной конструкции (система трех тел)

Найти реакции опор и давления в промежуточных шарнирах составной конструкции. Схемы конструкций представлены на рис. 33—35 (размеры — в м), нагрузка указана в табл. 8.

Таблица 8

Номер варианта (рис 33—35)	P_1	P_2	M_1	M_2	q кН/м	Номер варианта (рис 33—35)	P_1	P_2	M_1	M_2	q кН/м
	кН	кН	кНм	кНм			кН	кН	кНм	кНм	
1	6,0	—	25,0	—	0,8	16	13,0	—	26,0	—	0,9
2	11,0	8,0	34,0	—	—	17	7,0	—	23,0	34,0	—
3	9,0	12,0	20,0	—	1,0	18	9,0	—	29,0	—	1,3
4	10,0	14,0	30,0	—	—	19	12,0	7,0	33,0	—	—
5	8,0	15,0	22,0	—	1,1	20	11,0	—	38,0	—	1,5
6	10,0	17,0	28,0	—	—	21	8,0	—	36,0	—	1,0
7	16,0	—	36,0	30,0	—	22	14,0	9,0	28,0	—	—
8	13,0	—	25,0	34,0	—	23	13,0	—	32,0	—	1,4
9	11,0	—	29,0	37,0	—	24	10,0	—	35,0	—	1,2
10	12,0	—	34,0	—	1,4	25	15,0	—	40,0	—	1,5
11	8,0	—	28,0	—	1,0	26	12,0	—	37,0	—	1,1
12	12,0	14,0	36,0	—	—	27	9,0	—	29,0	—	0,8
13	15,0	—	30,0	21,0	—	28	6,0	—	25,0	—	1,0
14	10,0	16,0	35,0	—	—	29	8,0	14,0	30,0	—	—
15	12,0	8,0	32,0	—	1,2	30	15,0	—	34,0	—	1,2

Пример выполнения задания. Даю: схема конструкции (рис. 36); $P_1 = 10,0$ кН; $P_2 = 15,0$ кН; $M = 40,0$ кНм; $q = 1,6$ кН/м.

Определить реакции опор и давления в промежуточных шарнирах.

Решение. Сначала рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к балке BC , и определим вертикальные составляющие реакций шарниров B и C (рис. 37).

Уравнения равновесия имеют вид.

$$\sum M_{tB} = 0, -P_2 \cdot 2 \sin 60^\circ + Y_C \cdot 4 = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{tC} = 0, -Y_B \cdot 4 + P_2 \cdot 2 \sin 60^\circ = 0; \quad (2)$$

$$\sum X_t = 0, X_B - P_2 \cos 60^\circ - X_C = 0. \quad (3)$$

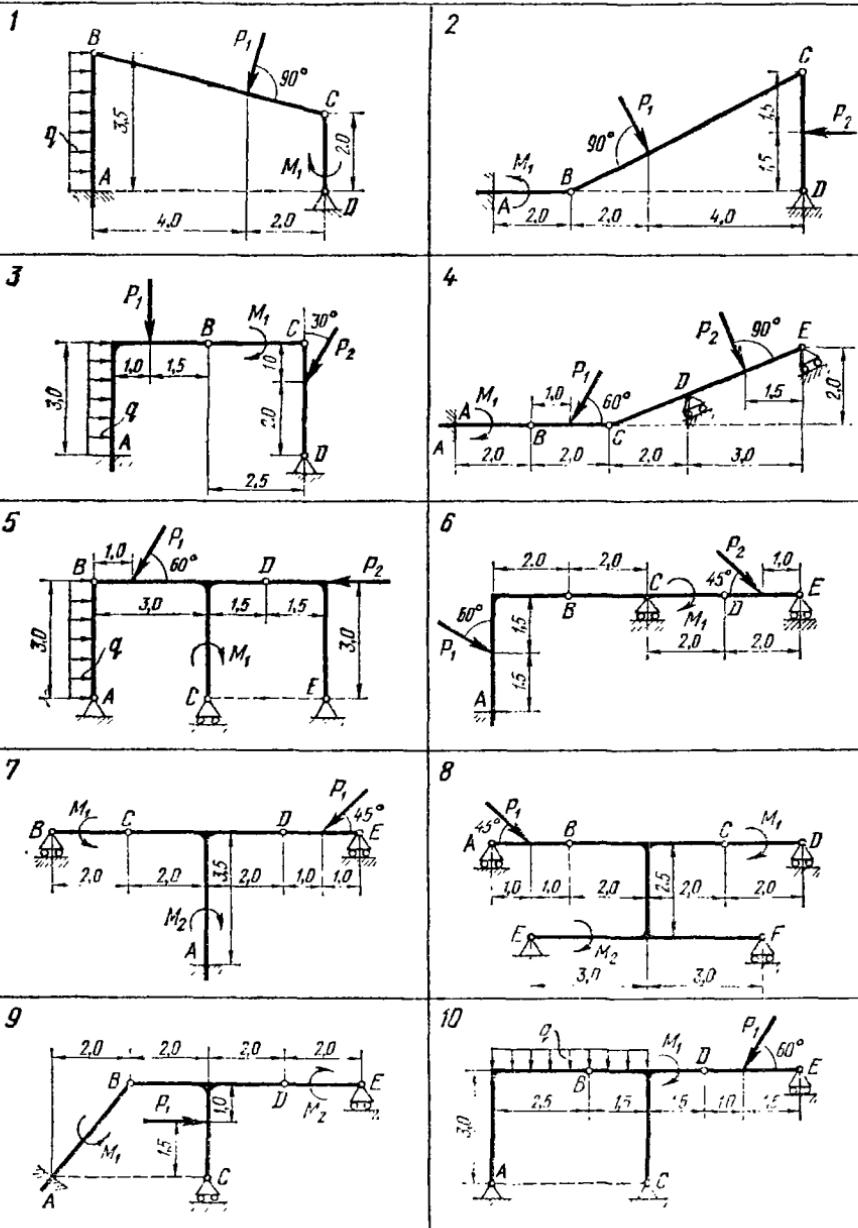


FIG. 33

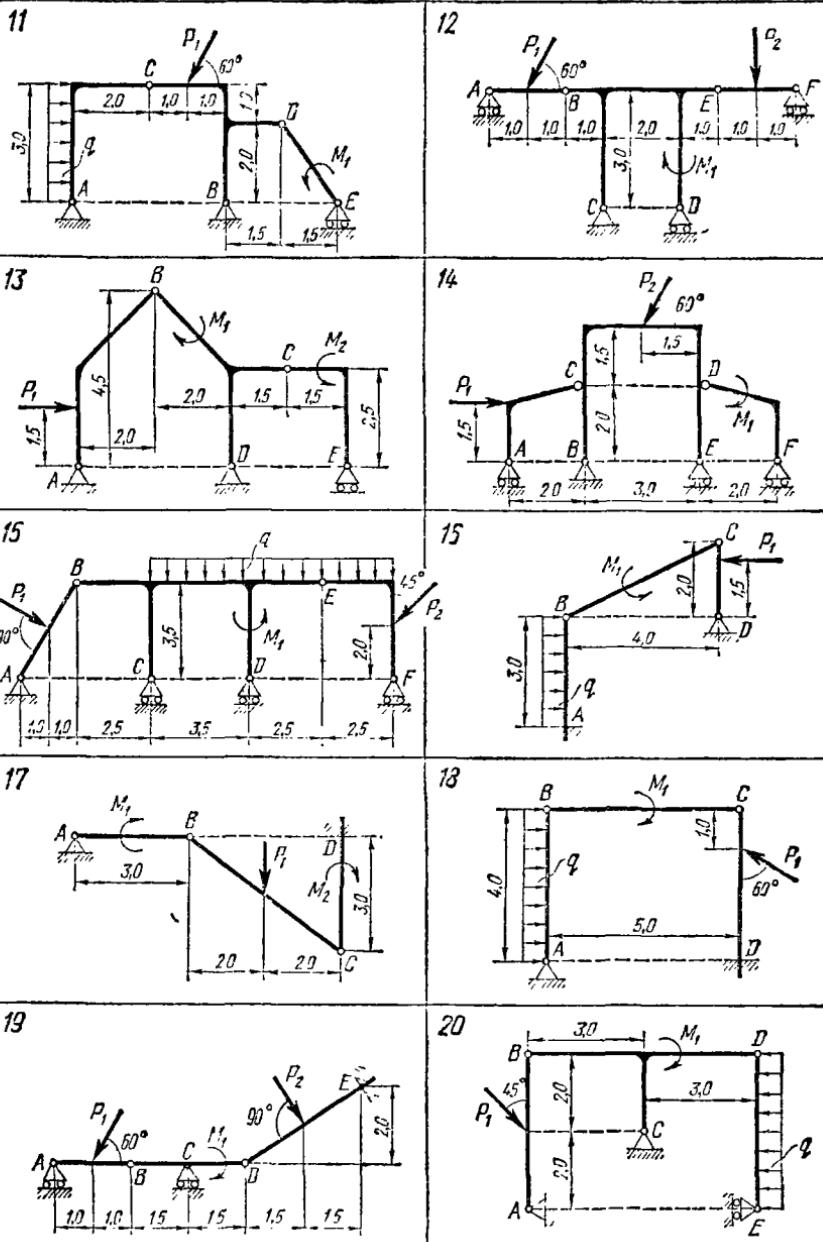
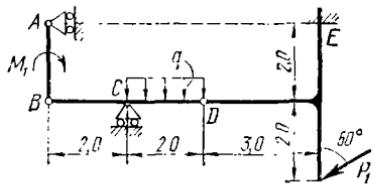
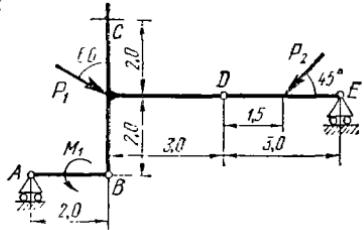


Рис. 34

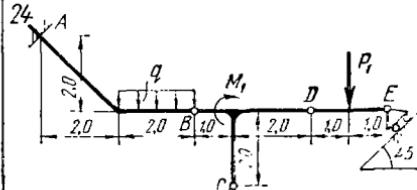
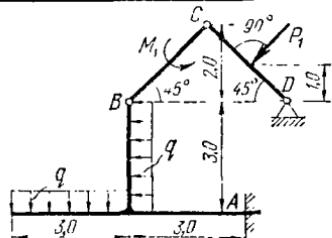
21



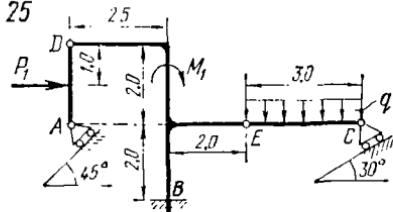
22



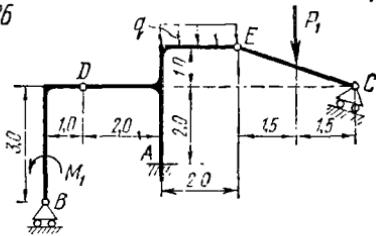
23



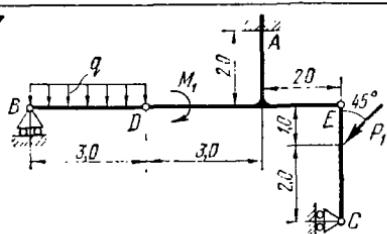
25



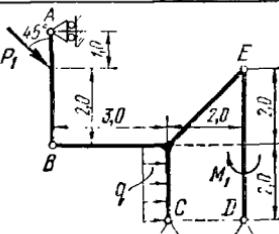
26



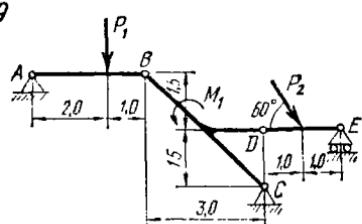
27



28



29



30

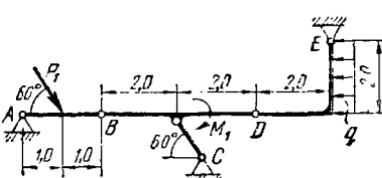


Рис. 35

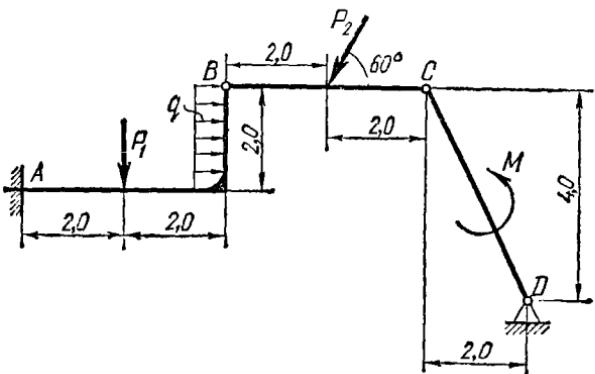


Рис. 36

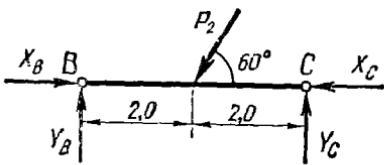


Рис. 37

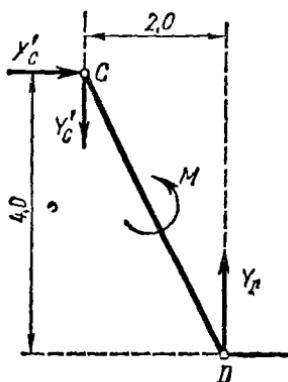


Рис. 38

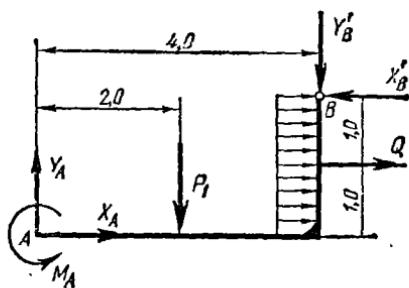


Рис. 39

Из уравнения (1)

$$Y_C = \frac{P_2 \cdot 2 \sin 60^\circ}{4} = \frac{15 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}/2}{4} = 6,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$Y_B = \frac{P_2 \cdot 2 \sin 60^\circ}{4} = Y_C = 6,5 \text{ кН.}$$

Составляющие X_B и X_C определяются из уравнений равновесия сил, приложенных к элементу CD .

Рассмотрим систему уравновешивающих сил, приложенных к элементу CD (рис. 38):

$$\sum Y_t = 0; -Y'_C + Y_D = 0; \quad (4)$$

$$\sum M_{tC} = 0; M + Y_D \cdot 2 + X_D \cdot 4 = 0; \quad (5)$$

$$\sum X_t = 0; X'_C + X_D = 0. \quad (6)$$

Из уравнения (4)

$$Y_D = Y'_C = 6,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$X_D = -\frac{M + Y_D \cdot 2}{4} = -\frac{40 + 6,5 \cdot 2}{4} = -13,3 \text{ кН.}$$

Из уравнения (6)

$$X'_C = -X_D = 13,3 \text{ кН.}$$

Из уравнения (3)

$$X_B = P_2 \cos 60^\circ + X_C = 15 \cdot 0,5 + 13,3 = 20,8 \text{ кН.}$$

Переходим к рассмотрению системы уравновешивающих сил, приложенных к элементу AB (рис. 39):

$$\sum X_t = 0; X_A + Q - X'_B = 0, \quad (7)$$

где $Q = q \cdot 2 = 1,6 \cdot 2 = 3,2 \text{ кН};$

$$\sum Y_t = 0; Y_A - P_1 - Y'_B = 0; \quad (8)$$

$$\sum M_{tB} = 0; M_A + X_A \cdot 2 - Y_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 + Q \cdot 1 = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (7)

$$X_A = -Q + X'_B = -3,2 + 20,8 = 17,6 \text{ кН.}$$

Из уравнения (8)

$$Y_A = P_1 + Y'_B = 10,0 + 6,5 = 16,5 \text{ кН.}$$

Из уравнения (9)

$$\begin{aligned} M_A &= -X_A \cdot 2 + Y_A \cdot 4 - P_1 \cdot 2 - Q \cdot 1 = \\ &= -17,6 \cdot 2 + 16,5 \cdot 4 - 10 \cdot 2 - 3,2 \cdot 1 = 7,6 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Для проверки правильности произведенных расчетов следует убедиться в том, что соблюдается любое из уравнений равновесия для

сил, приложенных ко всей конструкции. Например,

$$\sum X_i = 0; \quad X_A + Q - P_2 \cos 60^\circ + X_D = 0;$$

$$17,6 + 3,2 - 15 \cdot 0,5 - 13,3 = 20,8 - 20,8 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad Y_A - P_1 - P_2 \cos 30^\circ + Y_D = 0,$$

$$16,5 - 10 - 15(\sqrt{3}/2) + 6,5 = 23,0 - 23,0 = 0.$$

Результаты расчета приведены в табл. 9.

Таблица 9

Момент M_A , кНм	Силы, кН							
	X_A	Y_A	X_B	Y_B	X_C	Y_C	X_D	Y_D
7,6	17,6	16,5	20,8	6,5	13,3	6,5	-13,3	6,5

Задание С-7. Равновесие сил с учетом сцепления (трения покоя)

Определить минимальное (в вариантах 1—20, 25, 26, 29, 30) или максимальное (в вариантах 21—24, 27, 28) значение силы P и реакции опор системы, находящейся в покое. Схемы вариантов представлены на рис. 40—42, а необходимые для расчета данные — в табл. 10. Трением в опорных устройствах пренебречь. Веса стержней, колодок и пинт не учитывать.

Пример выполнения задания (к вариантам 1—20). Дано: $G = 2$ кН; $Q = 20$ кН; коэффициент сцепления (трения покоя) $f_{\text{сп}} = 0,1$; $\alpha = 20^\circ$; $a = 10$ см; $b = 20$ см (рис. 43).

Определить минимальное значение силы P и реакции опор O , A и B .

Решение. Рассмотрим сначала систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу Q (рис. 44). На тело действуют: сила тяжести Q , реакция нити \bar{T} и нормальная реакция N_1 .

Рассматривая тело Q как материальную точку, составим уравнения равновесия указанных сил:

$$\sum X_i = 0; \quad Q \cos 45^\circ - T = 0,$$

откуда $T = Q \cos 45^\circ = 20 \cdot 0,707 = 14,1$ кН.

Затем рассмотрим равновесие сил, приложенных к барабану (рис. 45):

$$\sum M_{IO} = 0; \quad -T' \cdot R + F_{\text{сп}} \cdot 1,5R = 0, \quad (4)$$

где $F_{\text{сп}}$ — сила сцепления (сила трения покоя);

$$\sum X_i = 0; \quad T' + F_{\text{сп}} \cos \alpha - N_2 \sin \alpha + X_0 = 0; \quad (5)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_2 \cos \alpha + F_{\text{сп}} \sin \alpha + Y_0 - G = 0. \quad (6)$$

Таблица 10

Номер варианта (рис. 40–42)	<i>G</i>	<i>Q</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	α , град.	Коэффициент цепления (коэффициент трения покоя)	Точки, в которых определяются реакции
	кН		м					
1	1,0	10	0,20	0,10	0,04	30	0,10	<i>O, A</i>
2	1,1	—	0,10	0,15	—	30	0,15	<i>O, A, B</i>
3	1,3	14	0,45	0,40	0,05	45	0,20	<i>O, A</i>
4	1,8	15	0,10	0,40	0,06	—	0,25	<i>O, A</i>
5	1,5	16	0,20	0,30	0,04	45	0,30	<i>O, A</i>
6	1,6	18	0,15	0,10	—	45	0,35	<i>O, A, B</i>
7	2,0	20	0,20	0,50	0,05	30	0,40	<i>O, A</i>
8	2,2	18	0,20	0,10	—	30	0,35	<i>O, A, B</i>
9	2,1	20	0,10	0,20	—	30	0,30	<i>O, A, B</i>
10	1,8	22	0,30	0,30	0,04	45	0,25	<i>O, A</i>
11	1,9	24	0,40	0,50	0,06	—	0,20	<i>O, A</i>
12	2,0	25	0,10	0,25	—	30	0,15	<i>O, A, B</i>
13	1,6	20	0,10	0,10	—	45	0,10	<i>O, A, B</i>
14	1,7	24	0,10	0,25	0,04	60	0,15	<i>O, A</i>
15	1,8	20	0,10	0,15	—	45	0,20	<i>O, A, B</i>
16	1,2	15	0,20	0,45	0,04	45	0,25	<i>O, A</i>
17	1,3	12	0,15	0,15	—	45	0,30	<i>O, A, B, C</i>
18	1,4	14	0,20	0,30	0,05	60	0,35	<i>O, A</i>
19	1,7	16	0,50	0,20	0,06	30	0,40	<i>A, C, D</i>
20	1,6	18	0,10	0,15	—	—	0,45	<i>O, A, B</i>
21	1,0	—	2	0,50	—	45	0,45	<i>A, B, C, D</i>
22	1,5	—	3	0,80	—	30	0,35	<i>A, B, C, D</i>
23	2	—	5	1,4	—	—	0,40	<i>A, B, C</i>
24	3	—	4	0,8	—	—	0,30	<i>A, B, C, D</i>
25	1,0	—	0,8	0,4	—	30	0,25	<i>A, B, C, D</i>
26	2,0	—	0,4	—	—	—	0,25	<i>A, B, C</i>
27	4	—	4	1,0	—	45	0,35	<i>A, B, C, D</i>
28	5	—	5	0,8	—	30	0,40	<i>A, B, C, D</i>
29	2,0	—	2	0,3	—	30	0,20	<i>A, B, C</i>
30	1	—	2	8,0	—	30	0,20	<i>A, B, C, D</i>

Для случая предельного равновесия система уравнений (4)–(6) дополняется уравнением

$$F_{\text{сц}} = f_{\text{сц}} N_2. \quad (7)$$

Из уравнения (4)

$$F_{\text{сц}} = T' R / 1,5 R = 14,1 / 1,5 = 9,4 \text{ кН.}$$

Из уравнения (7)

$$N_2 = F_{\text{сц}} / f_{\text{сц}} = 9,4 / 0,1 = 94 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$\begin{aligned} X_6 &= -T' - F_{\text{сц}} \cos \alpha + N_2 \sin \alpha = \\ &= -14,1 - 9,4 \cdot 0,940 + 94 \cdot 0,342 = 9,2 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Из уравнения (6)

$$\begin{aligned} Y_0 &= -N_2 \cos \alpha - F_{\text{сц}} \sin \alpha + G = \\ &= -94 \cdot 0,940 - 9,4 \cdot 0,342 + 2 = -89,6 \text{ кН.} \end{aligned}$$

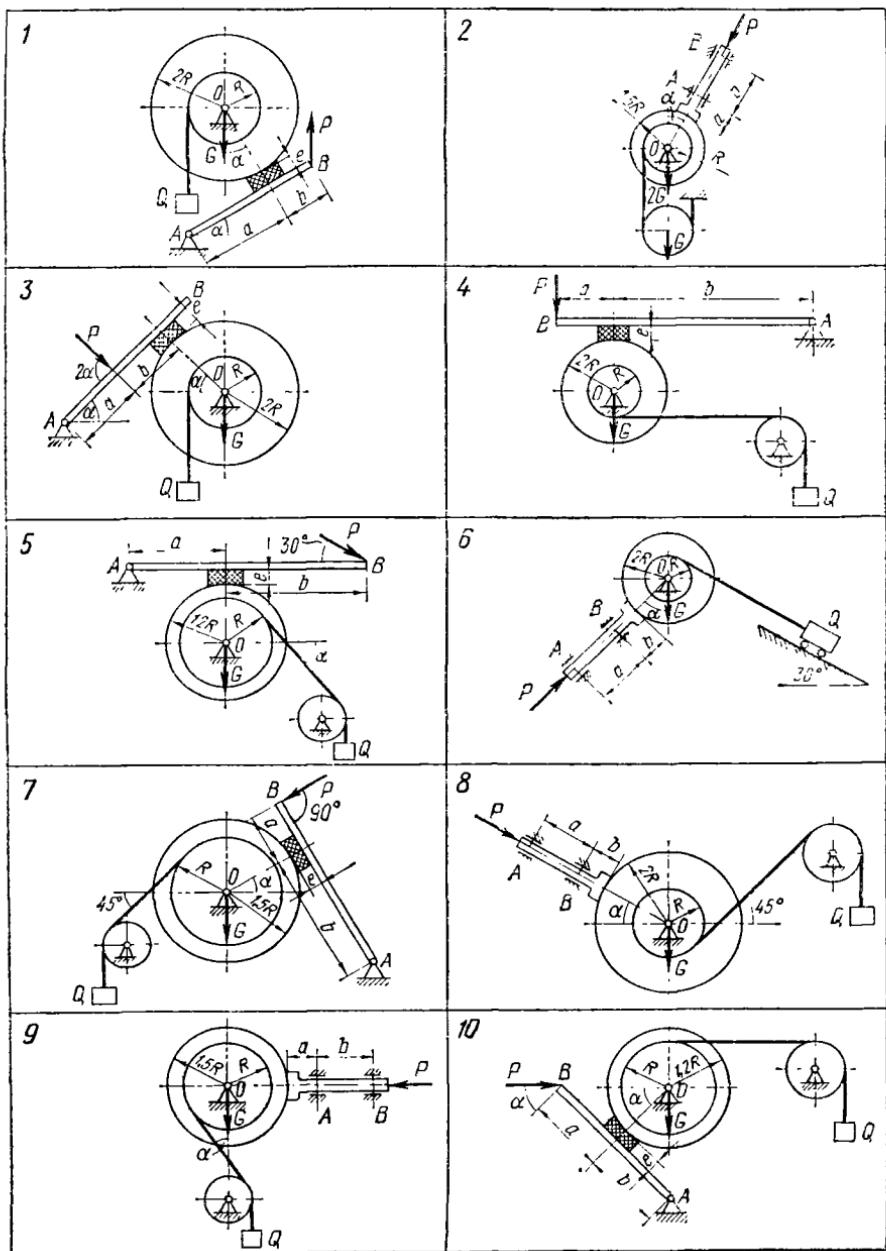


Рис. 40

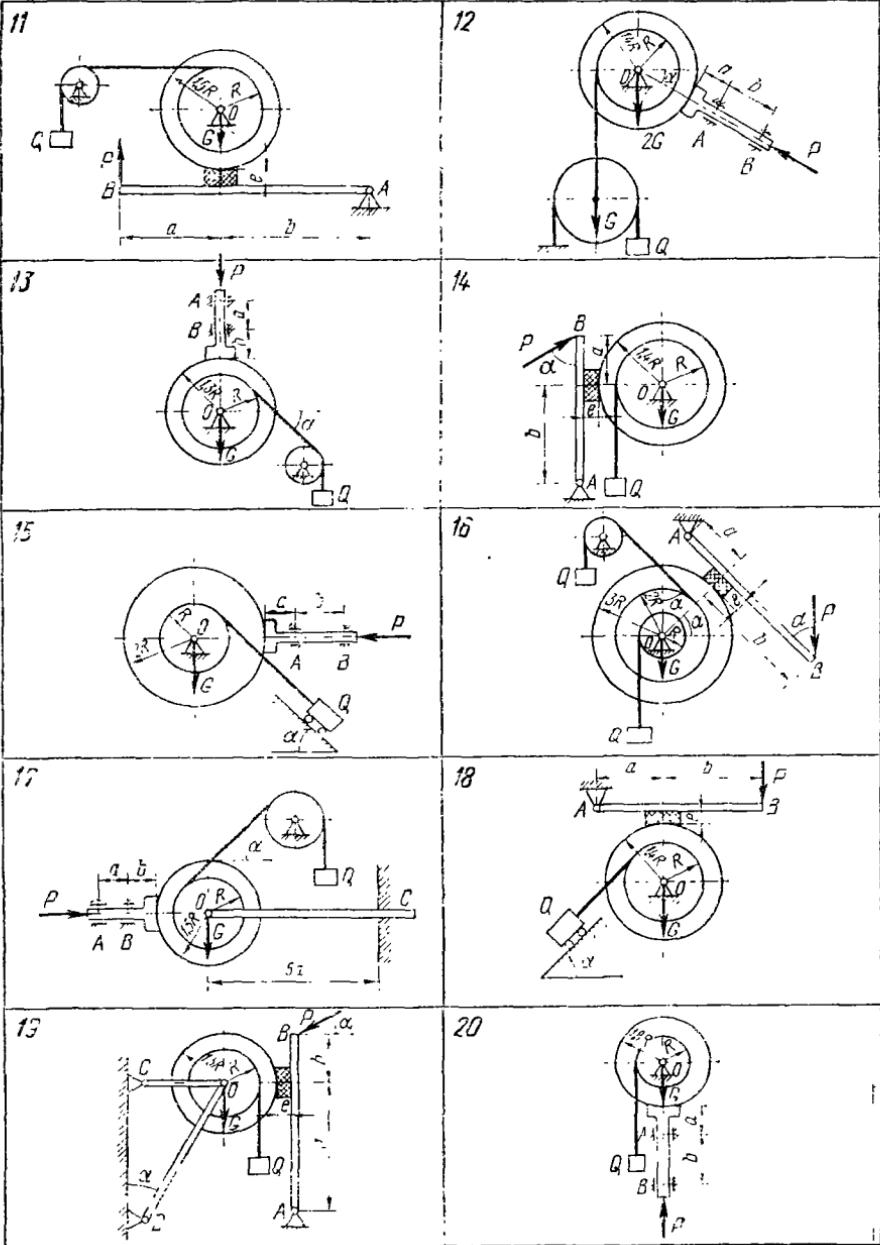
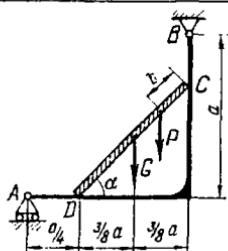
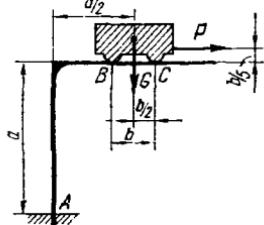


FIG. 41

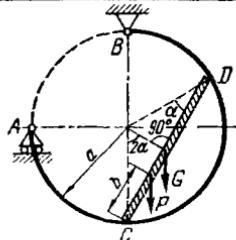
21



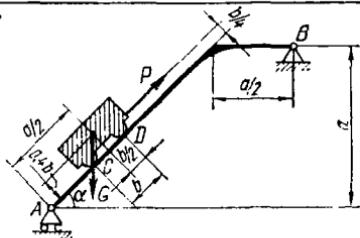
23



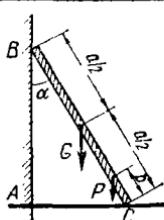
25



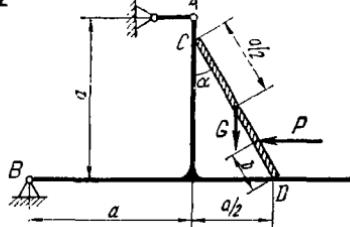
27



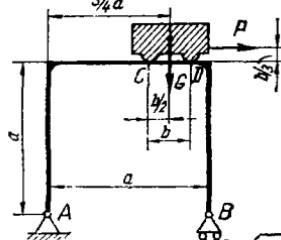
29



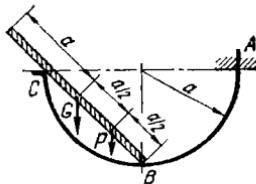
22



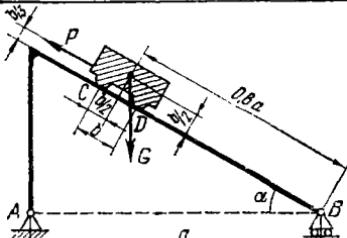
24



26



28



30

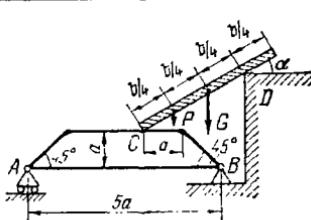


FIG. 42

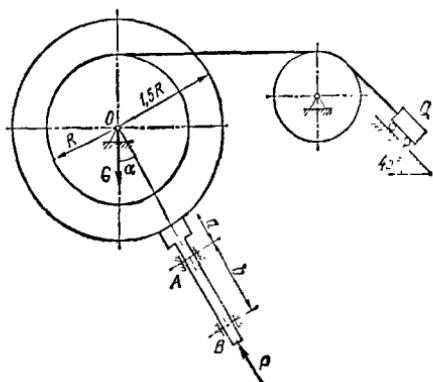


Рис. 43

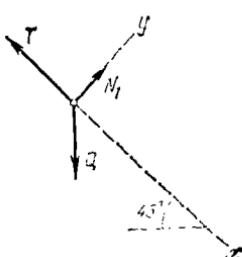


Рис. 44

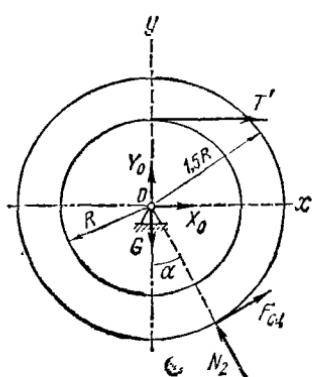


Рис. 45

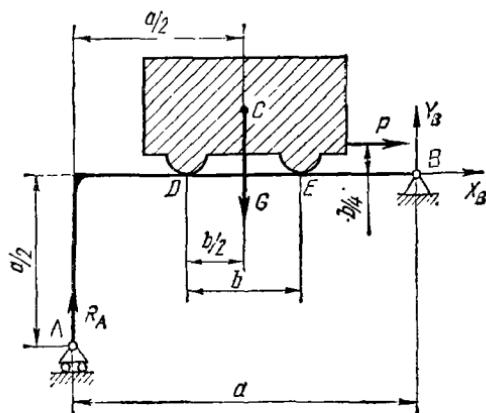


Рис. 47

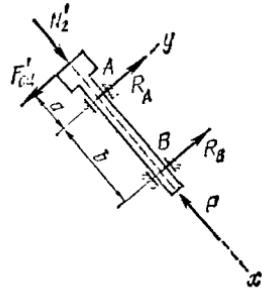


Рис. 46

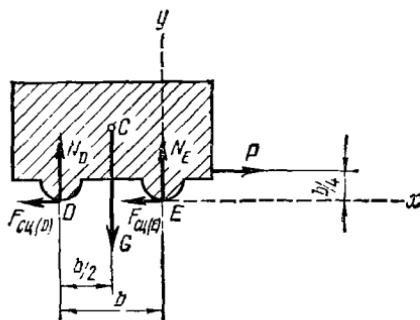


Рис. 48

Для определения минимального значения силы P и реакций опор A и B (эти реакции перпендикулярны к направляющим A и B) рассмотрим равновесие сил, приложенных к тормозному устройству (рис. 46):

$$\sum M_{iA} = 0; \quad F'_{\text{сн}} \cdot a + R_B \cdot b = 0; \quad (8)$$

$$\sum X_i = 0; \quad N'_2 - P_{\min} = 0; \quad (9)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A + R_B - F'_{\text{сн}} = 0. \quad (10)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$R_B = -(F'_{\text{сн}} \cdot a)/b = -(9,4 \cdot 0,1)/0,22 = -4,7 \text{ кН};$$

$$P_{\min} = N'_2 = 94 \text{ кН};$$

$$R_A = -R_B + F'_{\text{сн}} = -(-4,7) + 9,4 = 14,1 \text{ кН}.$$

Пример выполнения задания (к вариантам 21—30). Дано: $G = 1 \text{ кН}$; $f_{\text{сн}} = 0,4$; $a = 6 \text{ м}$; $b = 2 \text{ м}$ (рис. 47). Определить максимальное значение силы P и реакции в точках A , B , D и E .

Решение. Рассмотрим сперва систему уравновешивающихся сил, приложенных к телу весом G (рис. 48). К телу приложены: сила тяжести \vec{G} , сила \vec{P} , нормальные реакции \vec{N}_D и \vec{N}_E , а также силы сцепления $\vec{F}_{\text{сн}(D)}$ и $\vec{F}_{\text{сн}(E)}$ (силы трения покоя).

Составим три уравнения равновесия указанных сил:

$$\sum X_i = 0; \quad -F_{\text{сн}(D)} - F_{\text{сн}(E)} + P = 0; \quad (1)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad N_D + N_E - G = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad -G \cdot b/2 + N_E \cdot b - P \cdot b/4 = 0. \quad (3)$$

В случае предельного равновесия $P = P_{\max}$. В этом случае система уравнений (1)–(3) дополняется уравнениями

$$F_{\text{сн}D} = f_{\text{сн}}N_D; \quad (4)$$

$$F_{\text{сн}E} = f_{\text{сн}}N_E. \quad (5)$$

Подставив (4) и (5) в уравнение (1), получаем

$$-f_{\text{сн}}N_D - f_{\text{сн}}N_E + P_{\max} = 0. \quad (1')$$

Из уравнения (2)

$$N_D + N_E = G. \quad (2')$$

Из уравнений (1') и (2')

$$P_{\max} = f_{\text{сн}}(N_D + N_E) = f_{\text{сн}}G = 0,4 \cdot 1 = 0,4 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3)

$$N_E = \frac{P_{\max} \cdot b/4 + G \cdot b/2}{b} = \frac{f_{\text{сн}}G \cdot b/4 + G \cdot b/2}{b} = \frac{0,4 \cdot 1 \cdot 0,5 + 1 \cdot 2/2}{2} = 0,6 \text{ кН}.$$

Из уравнения (2)

$$N_D = G - N_E = 1 - 0,6 = 0,4 \text{ кН}.$$

Из уравнений (4) и (5)

$$F_{\text{сн}D} = f_{\text{сн}}N_D = 0,4 \cdot 0,4 = 0,16 \text{ кН};$$

$$F_{\text{сн}E} = f_{\text{сн}}N_E = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \text{ кН}.$$

Совокупности сил N_D и $\vec{F}_{\text{сн}(D)}$, N_E и $\vec{F}_{\text{сн}(E)}$ образуют соответственно опорные реакции в точках D и E .

Рассмотрим теперь равновесие системы сил \vec{R}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{G} и $\vec{P} = \vec{P}_{\max}$, приложенных ко всей системе (см. рис. 47):

$$\sum X_i = 0; \quad X_B + P_{\max} = 0; \quad (6)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad R_A - G + Y_B = 0; \quad (7)$$

$$\sum M_{iB} = 0; \quad -P_{\max} \cdot b/4 + G \cdot a/2 - R_A \cdot a = 0. \quad (8)$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$X_B = -P_{\max} = -0,4 \text{ кН};$$

$$R_A = \frac{G \cdot a/2 - P_{\max} \cdot b/4}{a} = \frac{1 \cdot 3 - 0,4 \cdot 0,5}{6} = 0,467 \text{ кН};$$

$$Y_B = G - R_A = 1 - 0,467 = 0,533 \text{ кН}.$$

II. Система сил, не лежащих в одной плоскости СИСТЕМА СХОДЯЩИХСЯ СИЛ

Задание С-8. Определение усилий в стержнях пространственной конструкции

Найти методом вырезания узлов усилия в шести стержнях шарниро-стержневой конструкции. Сила \vec{P} действует в направлении AB , сила \vec{Q} (в вариантах 2,4–6,8, 10–14, 16–25, 27, 29, 30) – в направлении DE . Схемы конструкций показаны на рис. 49–51, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 11.

Таблица 11

Номер варианта (рис 49–51)	Нагрузка, кН		Размеры, м				Номер варианта (рис 49–51)	Нагрузка, кН		Размеры, м			
	P	Q	прямоугольного параллелепипеда			d		P	Q	прямоугольного параллелепипеда			d
			a	b	c					a	b	c	
1	9	—	4,0	5,0	4,0	1,0	16	2	4	4,0	5,0	4,5	—
2	6	8	4,5	5,0	4,0	—	17	3	5	3,5	4,5	4,0	—
3	3	5	2,0	3,0	2,5	—	18	4	6	4,0	5,0	4,5	—
4	5	3	3,5	5,5	4,0	—	19	6	4	4,5	5,0	4,0	—
5	7	5	4,0	5,0	4,5	—	20	8	6	2,5	3,0	3,0	—
6	8	6	4,5	5,5	4,0	—	21	3	5	4,5	5,0	4,0	—
7	2	—	3,5	5,0	4,0	—	22	5	3	4,0	5,5	4,5	—
8	4	6	4,0	5,0	3,5	—	23	6	4	3,5	5,0	3,5	1,0
9	5	6	4,5	5,0	3,5	—	24	2	3	4,0	5,5	4,0	—
10	6	4	3,5	5,0	4,5	—	25	4	6	3,5	5,0	4,0	—
11	8	4	4,0	5,5	3,5	—	26	8	—	4,0	6,0	4,0	—
12	7	9	4,5	5,0	4,0	—	27	9	7	2,0	3,0	2,5	—
13	4	6	2,0	3,5	2,5	—	28	3	—	4,5	5,5	3,5	1,5
14	5	7	3,5	5,5	4,0	1,5	29	7	6	3,5	5,0	4,0	1,0
15	9	—	4,5	5,5	4,0	—	30	6	5	4,0	5,5	3,5	—

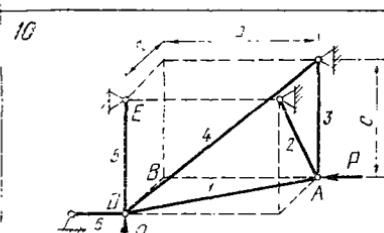
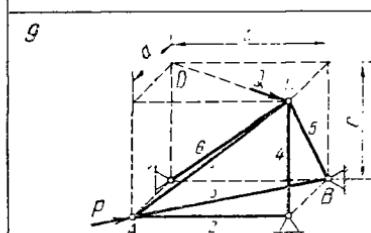
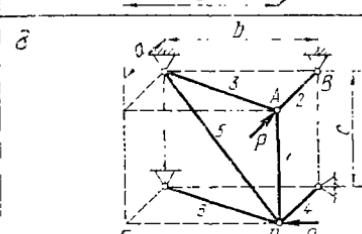
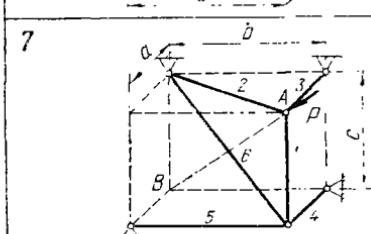
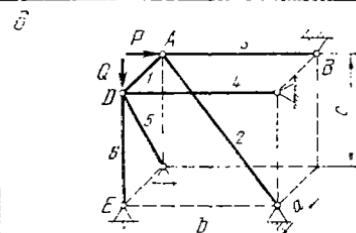
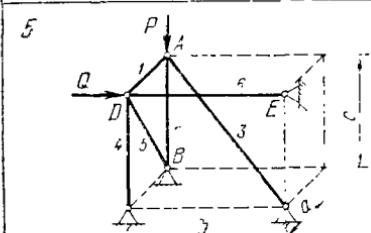
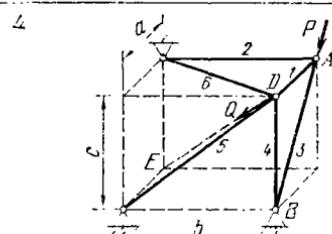
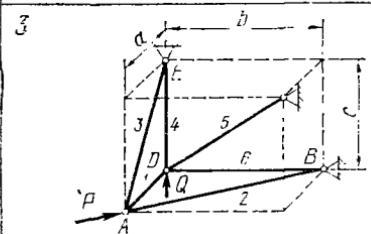
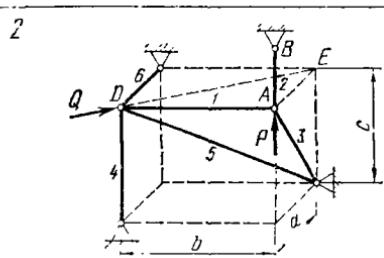
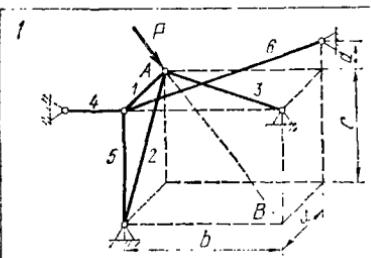
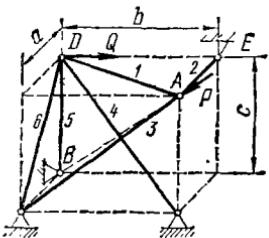
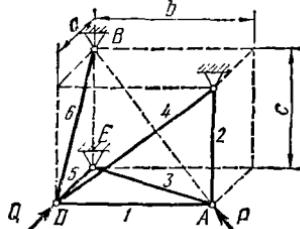


FIG. 49

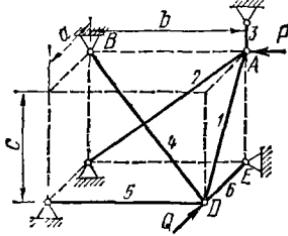
11



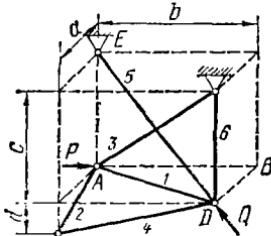
12



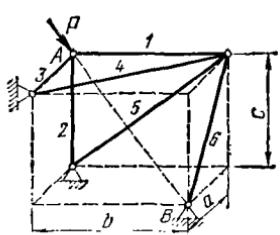
13



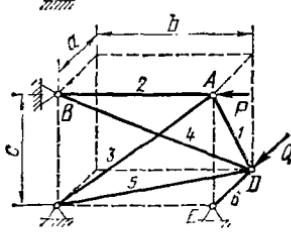
14



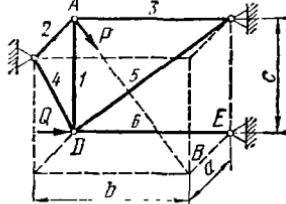
15



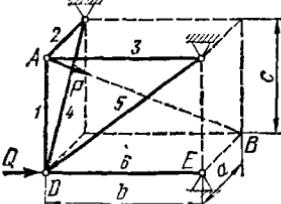
16



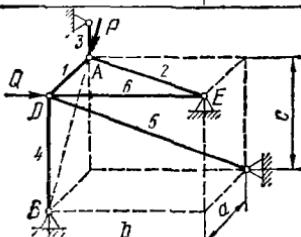
17



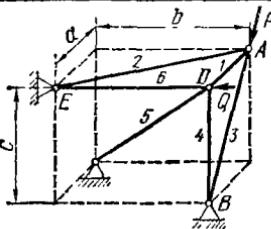
18



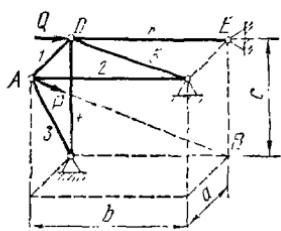
19



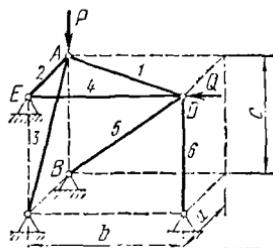
20



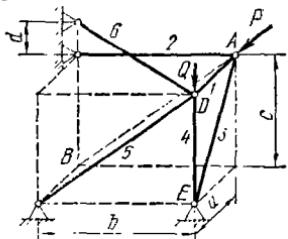
21



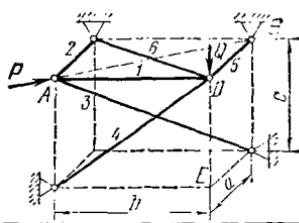
22



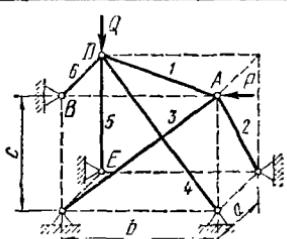
23



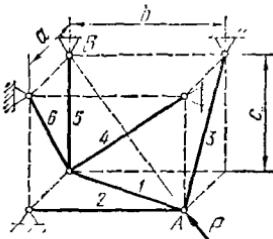
24



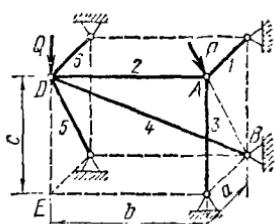
25



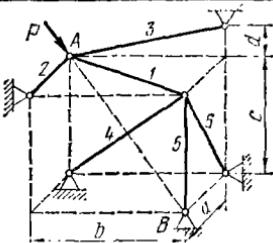
26



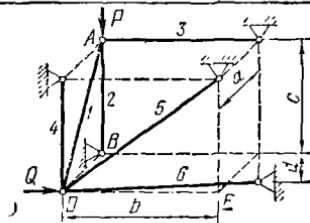
27



28



29



30

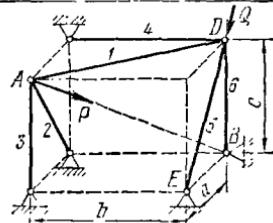


FIG. 51

Пример выполнения задания. Дано: стержневая конструкция (рис. 52); $P = 4$ кН; $a = 4$ м; $b = 5$ м; $c = 4$ м; $d = 1$ м.

Определить усилия S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 , S_6 .

Решение. Рассмотрим сначала узел A (рис. 53), так как в нем сходятся три стержня. На этот узел действует сила P . Предполагаем, что все стержни растянуты и поэтому направляем реакции \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}_3 от узла A . Сила P и реакции \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}_3 взаимно уравновешиваются.

Составим три уравнения равновесия сил, сходящихся в узле A :

$$\begin{aligned}\sum X_i &= 0; -P \cos \psi \sin \varphi - \\ &- S_1 \sin \beta - S_2 - S_3 \sin \varphi = 0; (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= 0; -P \cos \psi \cos \varphi - \\ &- S_3 \cos \varphi = 0; (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum Z_i &= 0; -P \sin \psi - \\ &- S_1 \cos \beta = 0. (3)\end{aligned}$$

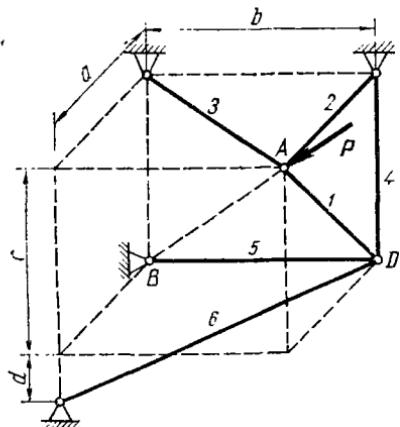


Рис. 52

По заданным размерам вычисляем синусы и косинусы углов φ , ψ , β :

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}};$$

$$\cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}};$$

$$\sin \psi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{57}};$$

$$\cos \psi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}};$$

$$\sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{4^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Из уравнения (3)

$$S_1 = -\frac{P \sin \psi}{\cos \beta} = -\frac{4 \cdot 4 \sqrt{57}}{1/\sqrt{2}} = -2,99 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2)

$$S_3 = -P \cos \psi = -4 \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}} = -3,39 \text{ кН.}$$

Из уравнения (1)

$$S_2 = -P \cos \psi \sin \varphi - S_1 \sin \beta - S_3 \sin \varphi = \\ = -4 \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} + 16 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = 2,12 \text{ кН.}$$

Переходим к рассмотрению системы уравновешивающихся сил, приложенных к узлу D :

$$\vec{S}'_1 (\vec{S}'_1 = -\vec{S}_1), \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6.$$

Введем угол θ . Направления осей координат сохраняем без изменения.

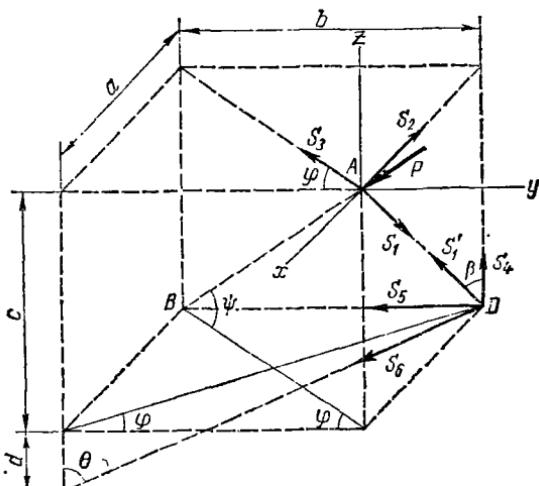


Рис. 53

Составим три уравнения равновесия сил, сходящихся в узле D :

$$\sum X_i = 0; S'_1 \sin \beta + S_6 \sin \theta \sin \varphi = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; -S_5 - S_6 \sin \theta \cos \varphi = 0; \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; S'_1 \cos \beta + S_4 - S_6 \cos \theta = 0. \quad (6)$$

Вычисляем синус и косинус угла θ :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{42}}; \\ \cos \theta = \frac{d}{\sqrt{a^2 + b^2 + d^2}} = \frac{1}{\sqrt{42}}.$$

Из уравнения (4)

$$S_6 = -S'_1 \frac{\sin \beta}{\sin \theta \sin \varphi} = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{41}} \cdot \frac{\sqrt{41}}{4} = 3,44 \text{ кН.}$$

Из уравнения (5)

$$S_3 = -S_4 \sin \theta \cos \varphi = -4 \frac{1}{\sqrt{57}} \cdot \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{42}} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}} = -2,65 \text{ кН.}$$

Из уравнения (6)

$$\begin{aligned} S_4 = S_6 \cos \theta - S'_1 \cos \beta &= -4 \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{57}} \cdot \frac{1}{\sqrt{42}} - \\ &- \left(-16 \cdot \frac{1}{\sqrt{57}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2,65 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Результаты расчета приведены в табл. 12, в которой знак плюс соответствует растяжению, минус — сжатию.

Таблица 12

Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Знак усилия	—	+	—	+	—	+
Усилие, кН	2,99	2,12	3,39	2,65	2,65	3,44

Из табл. 12 видно, что стержни 2, 4, 6 растянуты, а стержни 1, 3, 5, сжаты.

СИСТЕМА ПРОИЗВОЛЬНО РАСПОЛОЖЕННЫХ СИЛ

Задание С-9. Приведение системы сил к простейшему виду

Определить главный вектор \vec{R}^* и главный момент \vec{M}_O заданной системы сил относительно центра O и установить, к какому простейшему виду приводится эта система. Размеры параллелепипеда (рис. 54), а также модули и направления сил указаны в табл. 13.

При выполнении задания необходимо сделать следующее:

1. Изобразить заданную систему сил, выполнив построение параллелепипеда в масштабе, показав $\angle xQy$ на чертеже равным 135° ; сокращение размеров по оси Ox принять равным $1 : 2$.

2. Выбрав систему координатных осей, определить модуль и направление главного вектора заданной системы сил по его проекциям на координатные оси и изобразить \vec{R}^* на чертеже.

3. Вычислить главный момент заданной системы сил относительно центра O по его проекциям на координатные оси и изобразить \vec{M}_O на чертеже.

4. Вычислить наименьший главный момент заданной системы сил.

5. На основании результатов вычисленный главного вектора и наименьшего главного момента \vec{M}^* установить, к какому простейшему

виду приводится заданная система сил. При этом необходимо сделать следующее:

а) если заданная система сил приводится к паре сил, то показать момент этой пары, приложив его к точке O ;

б) если заданная система сил приводится к равнодействующей силе, то найти уравнение линии действия равнодействующей, определить точки пересечения этой линией координатных плоскостей и изобразить \vec{R} на чертеже;

в) если заданная система сил приводится к диполю (силовому винту), то найти уравнения центральной оси, определить точки пере-

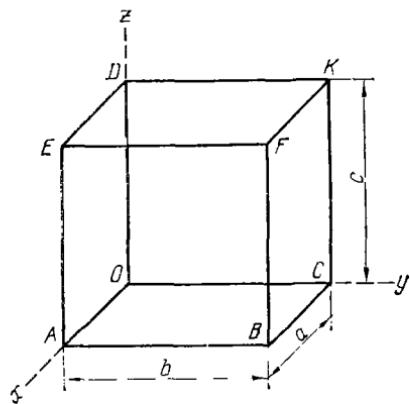


Рис. 54

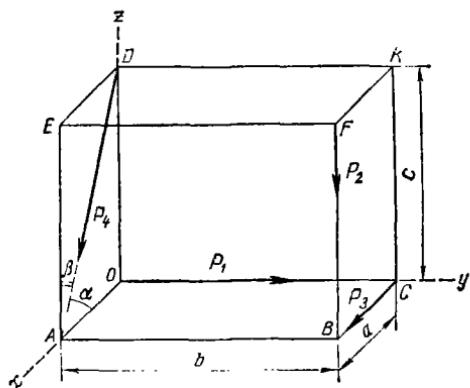


Рис. 55

сечения этой осью координатных плоскостей и изобразить \vec{R}^* и \vec{M}^* на чертеже.

Пример выполнения задания. Даны система сил $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \vec{P}_4$; модули, точки приложения и направления этих сил указаны в табл. 14.

Решение. 1. *Определение модуля и направления главного вектора заданной системы сил по его проекциям на координатные оси.* Заданная система сил показана на рис. 55. Так как

$$AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ см},$$

то

$$\cos \alpha = AO/AD = 30/50 = 0,6; \quad \cos \beta = AE/AD = 40/50 = 0,8.$$

Проекции главного вектора на оси координат:

$$X = P_3 + P_4 \cos \alpha = 4 + 11 \cdot 0,6 = 10,6 \text{ Н};$$

$$Y = P_1 = 10 \text{ Н};$$

$$Z = -P_2 - P_4 \cos \beta = -4 - 11 \cdot 0,8 = -12,8 \text{ Н}.$$

Модуль главного вектора

$$R^* = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{10,6^2 + 10^2 + (-12,8)^2} = \sqrt{376,2} = 19,4 \text{ Н}.$$

Таблица 13

Размеры проекций угольника при динамическом методе (рис. 54), см			\vec{P}_1			\vec{P}_4			\vec{P}_3			\vec{P}_2			
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	Мо- дуль, <i>H</i>	точка при- ложе- ния	направ- ление										
1	60	30	20	4	<i>F</i>	6	<i>A</i>	<i>AE</i>	8	<i>B</i>	<i>BA</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
2	30	40	40	4	<i>A</i>	24	<i>O</i>	<i>OD</i>	10	<i>K</i>	<i>KB</i>	—	—	—	—
3	20	10	10	4	<i>B</i>	2	<i>C</i>	<i>CK</i>	8	<i>E</i>	<i>ED</i>	—	—	—	—
4	30	40	20	15	<i>A</i>	20	<i>D</i>	<i>DF</i>	—	<i>K</i>	<i>KC</i>	10	<i>B</i>	<i>BO</i>	<i>B</i>
5	20	20	20	8	<i>O</i>	10	<i>E</i>	<i>EF</i>	8	<i>F</i>	<i>FB</i>	20	<i>D</i>	<i>DF</i>	<i>D</i>
6	30	40	40	10	<i>A</i>	4	<i>C</i>	<i>CO</i>	6	<i>F</i>	<i>DF</i>	—	—	—	—
7	30	40	40	10	<i>BK</i>	16	<i>B</i>	<i>BF</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>	—	—	—	—
8	20	30	10	10	<i>O</i>	10	<i>B</i>	<i>KB</i>	—	<i>K</i>	<i>KE</i>	30	<i>K</i>	<i>KA</i>	<i>E</i>
9	30	40	30	10	<i>A</i>	20	<i>O</i>	<i>OD</i>	20	<i>Q</i>	<i>OK</i>	16	<i>D</i>	<i>KD</i>	<i>D</i>
10	10	10	20	20	<i>A</i>	30	<i>C</i>	<i>CB</i>	20	<i>E</i>	<i>CK</i>	8	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
11	10	40	30	8	<i>A</i>	12	<i>C</i>	<i>FA</i>	10	<i>C</i>	<i>CE</i>	—	—	—	—
12	4	8	6	6	<i>A</i>	20	<i>F</i>	<i>CD</i>	8	<i>E</i>	<i>EK</i>	—	—	—	—
13	20	20	8	8	<i>O</i>	8	<i>C</i>	<i>OD</i>	—	<i>B</i>	<i>BF</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
14	20	5	8	40	<i>R</i>	30	<i>O</i>	<i>FE</i>	15	<i>K</i>	<i>KO</i>	—	<i>D</i>	<i>DO</i>	<i>D</i>
15	40	20	40	15	<i>E</i>	10	<i>F</i>	<i>FK</i>	20	<i>Q</i>	<i>OC</i>	32	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
16	30	30	30	6	<i>O</i>	10	<i>B</i>	<i>BK</i>	10	<i>D</i>	<i>DE</i>	—	—	—	—
17	15	15	20	30	<i>LB</i>	40	<i>K</i>	<i>KC</i>	16	<i>D</i>	<i>DK</i>	—	—	—	—
18	10	15	20	40	<i>A</i>	20	<i>K</i>	<i>DF</i>	—	<i>K</i>	<i>KB</i>	20	<i>D</i>	<i>DF</i>	<i>D</i>
19	20	15	15	40	<i>C</i>	20	<i>B</i>	<i>BO</i>	10	<i>K</i>	<i>KF</i>	8	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
20	20	20	10	10	<i>A</i>	20	<i>B</i>	<i>BA</i>	6	<i>C</i>	<i>CD</i>	25	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
21	20	20	20	20	<i>O</i>	8	<i>E</i>	<i>EB</i>	50	<i>K</i>	<i>KD</i>	—	—	—	—
22	40	20	30	30	<i>O</i>	50	<i>F</i>	<i>FB</i>	8	<i>F</i>	<i>KE</i>	—	—	—	—
23	50	20	40	10	<i>O</i>	5	<i>O</i>	<i>AD</i>	20	<i>A</i>	<i>KE</i>	—	—	—	—
24	30	40	40	40	<i>O</i>	40	<i>A</i>	<i>AC</i>	20	<i>B</i>	<i>BA</i>	25	<i>K</i>	<i>KF</i>	<i>K</i>
25	30	40	40	25	<i>A</i>	20	<i>E</i>	<i>LA</i>	12	<i>O</i>	<i>OC</i>	10	<i>D</i>	<i>DK</i>	<i>D</i>
26	30	40	20	10	<i>E</i>	20	<i>O</i>	<i>OD</i>	6	<i>C</i>	<i>CF</i>	16	<i>C</i>	<i>CK</i>	<i>C</i>
27	30	20	40	8	<i>O</i>	100	<i>O</i>	<i>OB</i>	100	<i>B</i>	<i>DC</i>	—	<i>K</i>	<i>KB</i>	<i>K</i>
28	10	14	40	4	<i>O</i>	10	<i>B</i>	<i>BK</i>	5	<i>D</i>	<i>BO</i>	5	<i>D</i>	<i>DF</i>	<i>D</i>
29	30	30	40	30	<i>O</i>	30	<i>B</i>	<i>AD</i>	30	<i>D</i>	<i>AD</i>	—	—	—	—
30	40	20	30	30	<i>O</i>	30	<i>B</i>	<i>AD</i>	5	<i>D</i>	<i>AD</i>	—	—	—	—

Г а б л и ц а 14

Размеры прямоугольного параллелепипеда, см			Силы системы											
<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	\vec{P}_1			\vec{P}_2			\vec{P}_3			\vec{P}_4		
			модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление	модуль, Н	точка приложения	направление
30	50	40	10	<i>O</i>	<i>OC</i>	4	<i>F</i>	<i>FB</i>	4	<i>C</i>	<i>CB</i>	11	<i>D</i>	<i>DA</i>

Направляющие косинусы

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{i}) = X/R^* = 10,6/19,4 = 0,547;$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{j}) = Y/R^* = 10/19,4 = 0,515;$$

$$\cos(\vec{R}^*, \vec{k}) = Z/R^* = -12,8/19,4 = -0,660.$$

Главный вектор показан на рис. 56.

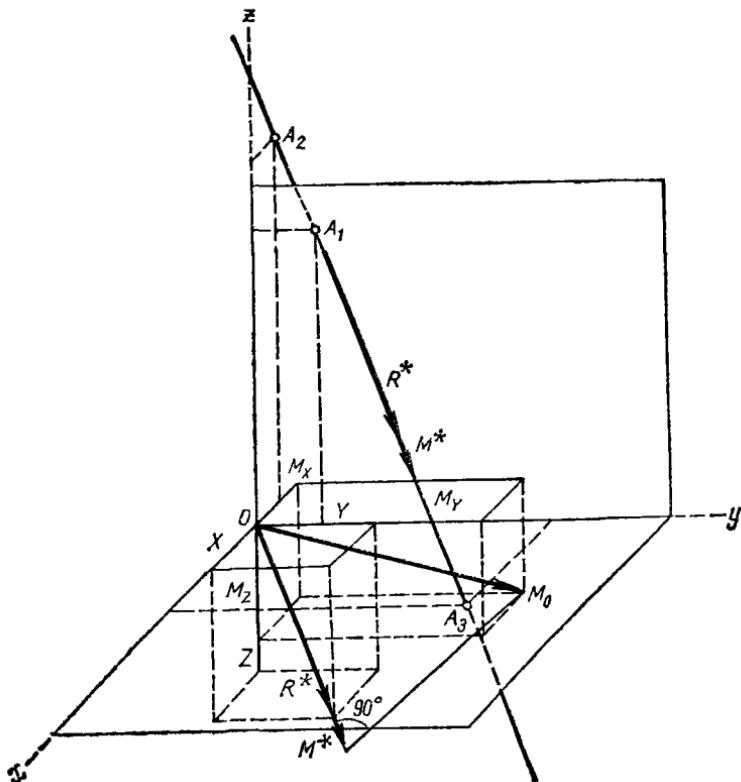


Рис. 56

2. Определение главного момента заданной системы сил относительно центра O .

Главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей:

$$M_x = -P_2 b = -4 \cdot 50 = -200 \text{ Нсм};$$

$$M_y = P_2 a + P_4 \cos \beta a = 4 \cdot 30 + 11 \cdot 0,8 \cdot 30 = 384 \text{ Нсм};$$

$$M_z = -P_3 b = -4 \cdot 50 = -200 \text{ Нсм}.$$

$$M_O = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{(-200)^2 + 384^2 + (-200)^2} = 476,9 \text{ Нсм}.$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{i}) = M_x/M_O = -200/476,9 = -0,419;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{j}) = M_y/M_O = 384/476,9 = 0,805;$$

$$\cos(\vec{M}_O, \vec{k}) = M_z/M_O = -200/476,9 = -0,419.$$

Главный момент показан на рис. 56.

3. Вычисление наименьшего главного момента заданной системы сил.

$$M^* = \frac{XM_x + YM_y + ZM_z}{R^*} = \\ = \frac{10,6 \cdot (-200) + 10 \cdot 384 + (-12,8) \cdot (-200)}{19,4} = 220,6 \text{ Нсм}.$$

4. Так как $R^* \neq 0$, $M^* \neq 0$, то заданная система сил приводится к динаме (силовому винту).

Уравнение центральной оси:

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M_z - (xY - yX)}{Z} = \frac{M^*}{R^*}.$$

Подставляя в это уравнение найденные числовые значения величин, находим:

$$\frac{M_x - (yZ - zY)}{X} = \frac{M^*}{R^*}; \quad \frac{-200 - [y(-12,8) + z \cdot 10]}{10,6} = \frac{220,6}{19,4}; \\ 6,4y + 5z = 160. \quad (1)$$

$$\frac{M_y - (zX - xZ)}{Y} = \frac{M^*}{R^*}; \quad \frac{384 - [z \cdot 10,6 - x(-12,8)]}{10} = \frac{220,6}{19,4}; \\ 5,3z - 6,4x = 135. \quad (2)$$

Координаты точек пересечения центральной осью координатных плоскостей определяем при помощи уравнений центральной оси (1) и (2). Полученные значения координат помечены в табл. 15.

Центральная ось системы сил показана на рис. 56.

При мечание. Если силы приводятся к равнодействующей, т. е. $M^* = 0$, а $R = R^* \neq 0$, то уравнения линии действия равнодействующей:

$$M_x = yZ - zY; \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX,$$

где X, Y, Z — проекции равнодействующей силы на координатные оси; M_x, M_y, M_z — главные моменты заданной системы сил относительно координатных осей.

Из этих трех уравнений независимыми являются только два.

Таблица 15

Точки	Координаты, см		
	x	y	z
A_1	0	5,1	25,5
A_2	-5,4	0	32,0
A_3	21,1	25,0	0

Задание С-10. Определение реакций опор твердого тела

Найти реакции опор конструкции. Схемы конструкций показаны на рис. 57—59. Необходимые для расчета данные приведены в табл. 16.

Таблица 16

Номер варианта (рис. 57—59)	Силы, кН			Размеры, см				
	Q	T	G	a	b	c	R	r
1	2	—	20	20	30	10	15	5
2	4	—	2	20	10	30	10	10
3	6	—	4	15	15	20	—	15
4	3	—	2	30	20	40	15	10
5	5	—	3	30	40	20	20	15
6	1	4	2	40	30	20	20	10
7	—	3	1	30	10	5	18	6
8	4	6	3	20	40	15	20	10
9	5	—	3	20	15	10	30	40
10	1	4	2	30	40	20	20	10
11	—	2	1	20	30	15	15	10
12	4	—	1	25	20	8	15	10
13	10	—	5	40	30	20	25	15
14	—	2	1	30	90	20	30	10
15	3	—	2	60	20	40	20	5
16	4	—	2	50	30	—	—	—
17	2	—	1	15	10	20	20	5
18	6	—	2	60	40	60	—	—
19	—	8	2	20	30	40	20	15
20	4	—	—	60	40	20	—	—
21	2	—	—	40	60	30	—	—
22	—	—	5	20	50	30	—	—
23	—	—	4	40	30	50	—	—
24	5	—	2	—	—	—	—	—
25	—	—	3	50	50	60	—	—
26	—	—	1	20	60	40	—	—
27	—	—	1	50	30	—	—	—
28	2	—	6	30	10	50	10	15
29	—	4	3	15	20	15	15	10
30	—	—	4	40	30	10	—	—

Примечания

1. Считать, что в вариантах 16, 18, 22—27, 30 петли не препятствуют перемещению рамы вдоль АВ.

2. В вариантах 20, 21 и 28 соприкасающиеся поверхности считать абсолютно гладкими.

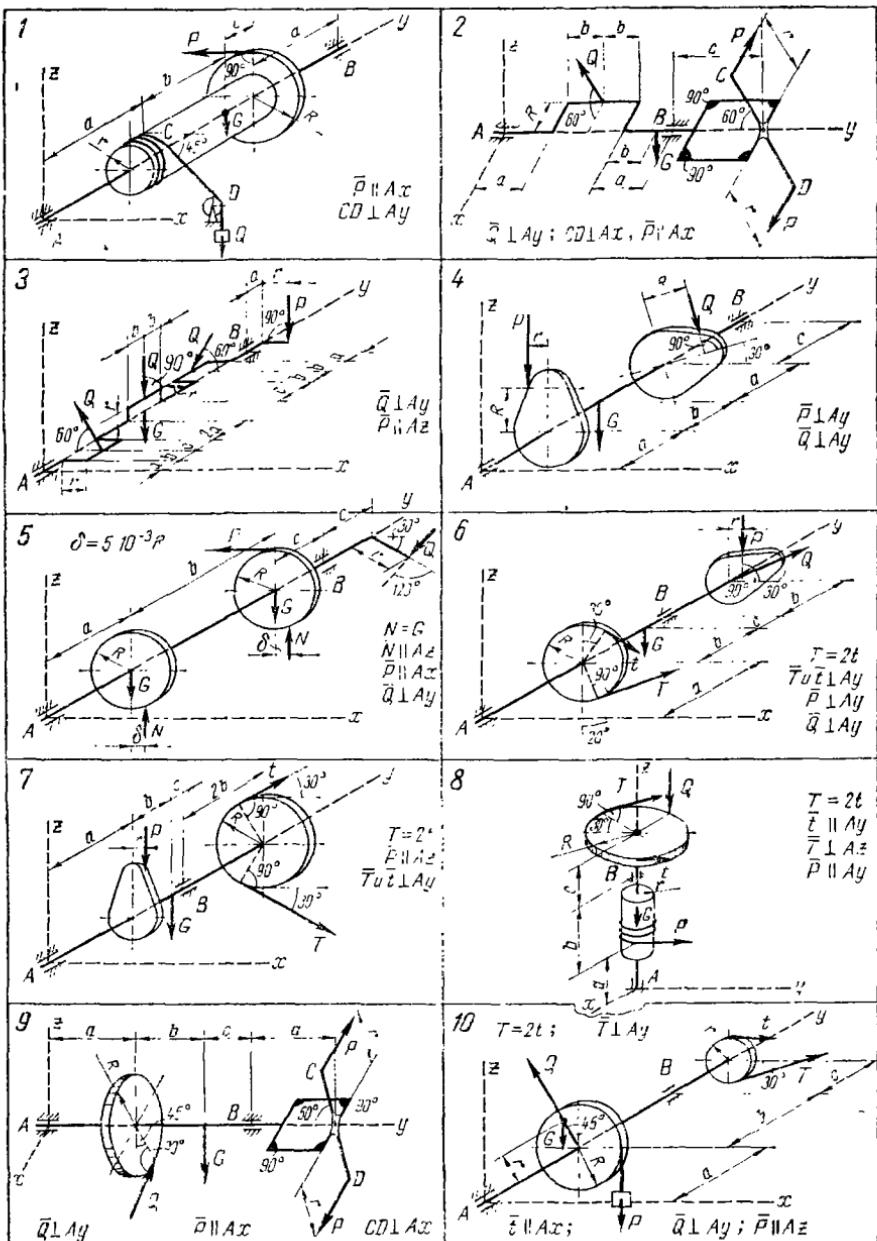


FIG. 57

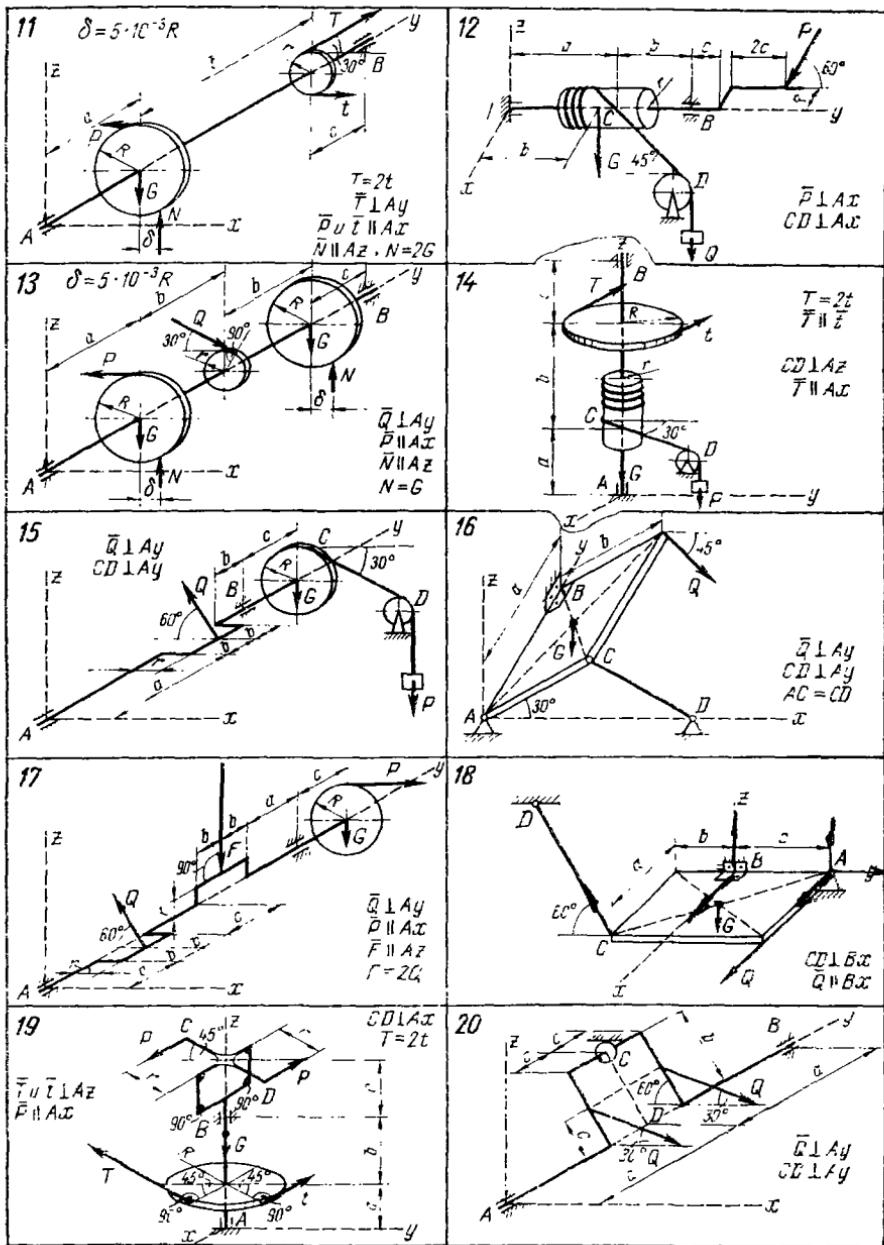


FIG. 58

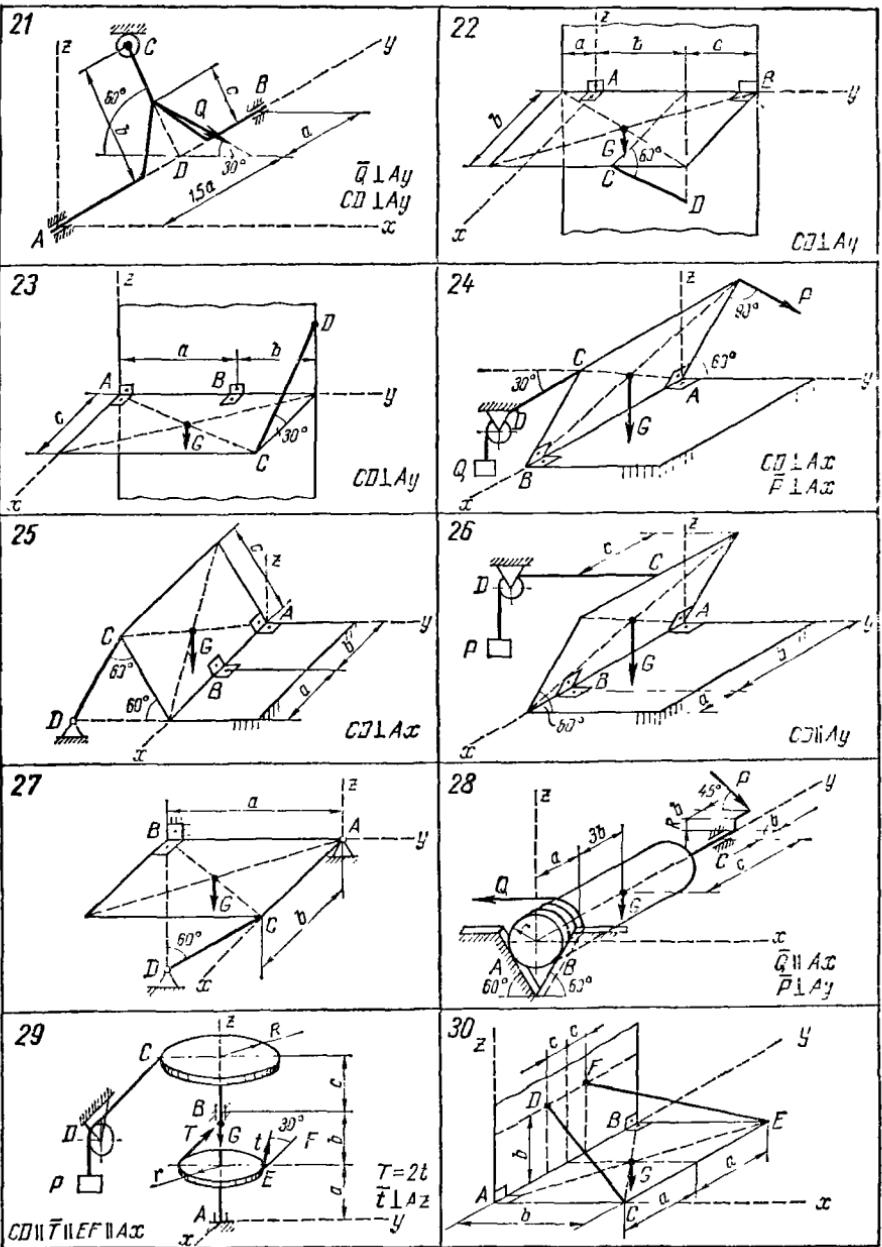


Рис 59

Пример выполнения задания. Дано: рама $ABCD$ весом $G = 1$ кН; $P = 2$ кН; $\vec{P} \parallel Ay$; $AD = BC = 60$ см; $AB = CD = 100$ см; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$ (рис. 60).

Найти \vec{R}_A и \vec{R}_B (A — шаровой шарнир, B — петля).

Решение. Рассмотрим равновесие сил, приложенных к раме: силы тяжести \vec{G} , силы \vec{P} , реакции \vec{S} стержня CE и составляющих реакций опор A и B : \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B , \vec{Z}_B (рис. 61). Прежде всего

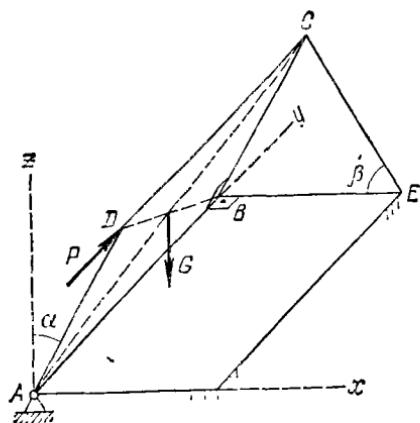


Рис. 60

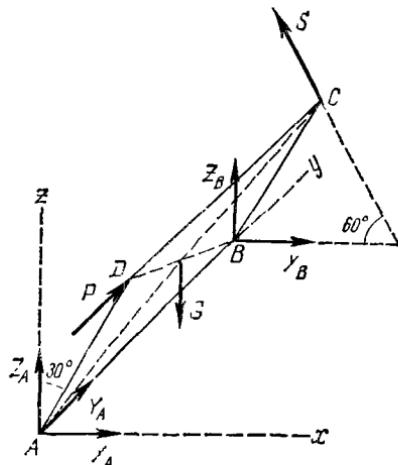


Рис. 61

составим уравнение моментов сил относительно оси, проходящей через точки A и B :

$$\Sigma M_{1y} = 0; G(BC/2) \sin 30^\circ - S \cdot BC \cdot \sin 60^\circ = 0,$$

откуда

$$S = (G \cdot \sin 30^\circ) / (2 \cdot \sin 60^\circ) = (1 \cdot 0,5) / (2 \cdot 0,866) = 0,289 \text{ кН.}$$

Затем составим уравнения моментов сил относительно координатных осей Ax и Az :

$$\begin{aligned} \Sigma M_{1x} = 0; & -P \cdot AD \cos 30^\circ - G \cdot AB/2 + S \cos 30^\circ \cdot AB + Z_B \cdot AB = 0; \\ Z_B = & \frac{P \cdot AD \cos 30^\circ + G \cdot AB/2 - S \cos 30^\circ \cdot AB}{AB} = \\ = & \frac{2 \cdot 60 \cdot 0,866 + 1 \cdot 50 - 0,289 \cdot 0,866 \cdot 100}{100} = 1,29 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\Sigma M_{1z} = 0; P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ \cdot AB - X_B \cdot AB = 0;$$

$$X_B = \frac{P \cdot AD \sin 30^\circ + S \cos 60^\circ \cdot AB}{AB} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 0,5 + 0,289 \cdot 0,5 \cdot 100}{100} = 0,744 \text{ кН.}$$

Наконец, составим уравнения проекций сил на оси координат:

$$\Sigma X_i = 0; \quad X_A + X_B - S \cos 60^\circ = 0;$$

$$X_A = -X_B + S \cos 60^\circ = -0,744 + 0,289 \cdot 0,5 = -0,6 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y_i = 0; \quad Y_A + P = 0;$$

$$Y_A = -P = -2 \text{ кН}.$$

$$\Sigma Z_i = 0; \quad Z_A - G + Z_B + S \cos 30^\circ = 0.$$

$$Z_A = G - Z_B - S \cos 30^\circ = 1 - 1,29 - 0,289 \cdot 0,866 = -0,54 \text{ кН}.$$

Итак, реакции всех связей рассматриваемой конструкции определены.

Задание С-11. Определение реакций стержней, поддерживающих прямоугольную плиту

Найти реакции стержней, поддерживающих тонкую горизонтальную однородную плиту весом G , при действии на нее вдоль стороны AB силы \bar{P} . Схемы конструкций показаны на рис. 62 – 64; необходимые для расчета данные приведены в табл. 17.

Таблица 17

Номер варианта (рис. 62 – 64)	Нагрузка, кН		Размеры, м				Номер варианта (рис. 62 – 64)	Нагрузка, кН		Размеры, м			
	вес G	сила P	a	b	c	d		вес G	сила P	a	b	c	d
1	29	25	8,0	2,5	3,5	1,0	16	14	15	4,0	3,5	3,0	—
2	28	30	5,5	5,0	3,5	—	17	20	25	8,0	2,5	3,5	1,0
3	18	20	4,0	4,5	3,5	—	18	33	35	6,0	5,5	4,0	—
4	28	30	7,0	1,0	4,0	1,0	19	20	25	4,0	5,0	4,0	—
5	32	35	8,0	4,0	4,0	—	20	33	35	6,0	5,5	4,0	—
6	22	25	9,0	2,5	4,5	—	21	28	30	7,0	4,0	4,0	1,0
7	20	25	1,0	5,0	3,0	1,5	22	16	20	5,5	3,0	3,0	—
8	30	35	5,5	5,5	4,0	—	23	20	25	4,0	5,0	3,0	1,5
9	36	10	6,0	6,0	4,0	—	24	28	30	7,0	4,0	4,0	—
10	20	25	8,5	2,5	3,5	2,0	25	30	35	6,0	5,0	4,0	—
11	8	10	3,0	2,5	1,5	—	26	20	25	8,0	2,5	3,5	1,0
12	33	35	6,0	5,5	3,0	1,5	27	33	35	6,0	5,5	3,0	—
13	24	25	9,5	2,5	3,5	—	28	30	25	6,0	5,0	3,0	1,5
14	33	35	6,0	5,5	4,0	—	29	30	35	5,5	5,0	4,0	—
15	35	40	7,0	5,0	4,0	—	30	20	25	4,0	5,0	4,0	—

Пример выполнения задания. Дано: схема конструкции (рис. 65); $G = 6 \text{ кН}$; $P = 9 \text{ кН}$; $a = 5 \text{ м}$; $b = 5 \text{ м}$; $c = 4 \text{ м}$; $d = 2 \text{ м}$.

Определить реакции $S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$.

Решение. Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, действующих на плиту (рис. 66). Задаваемыми силами являются вес плиты \bar{G} , приложенный в ее центре тяжести, и сила \bar{P} . Предпола-

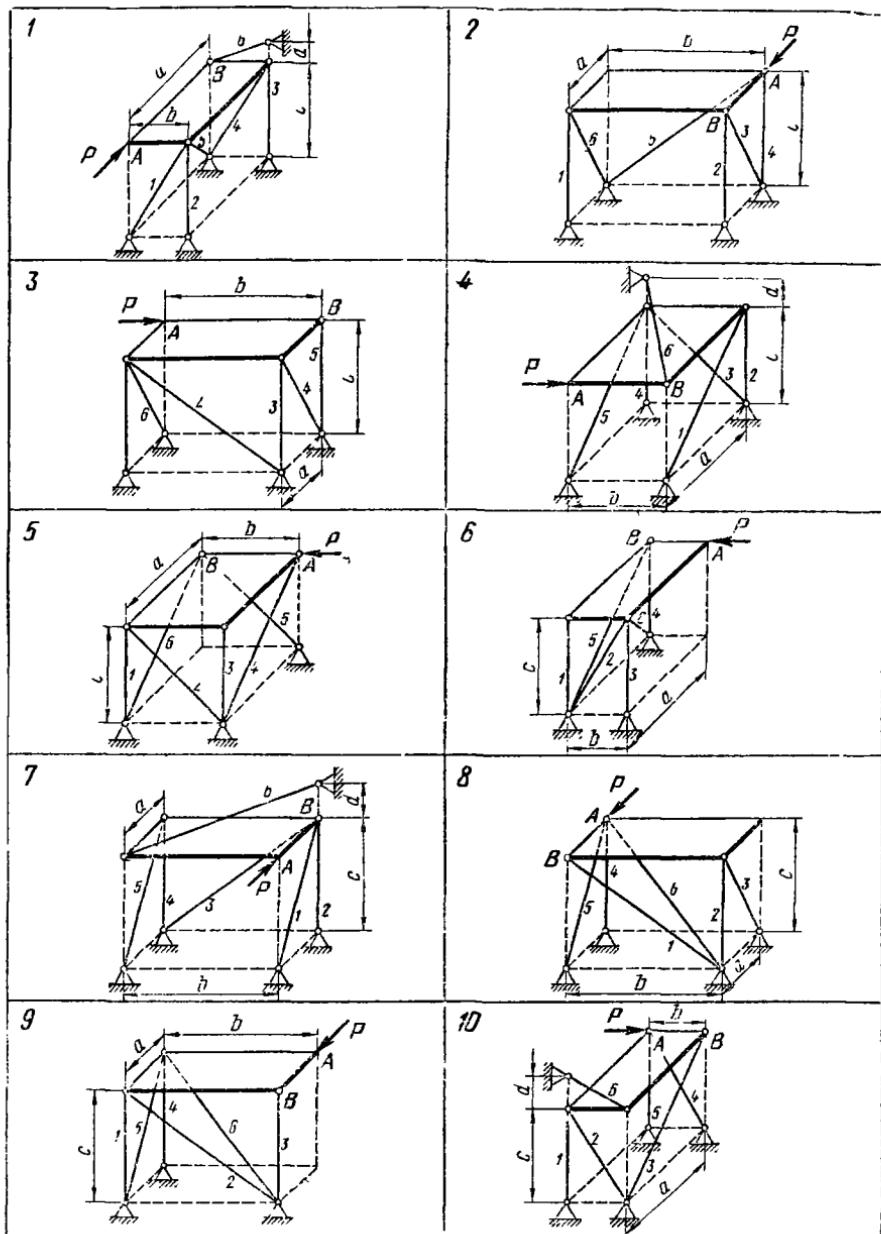


Рис. 62

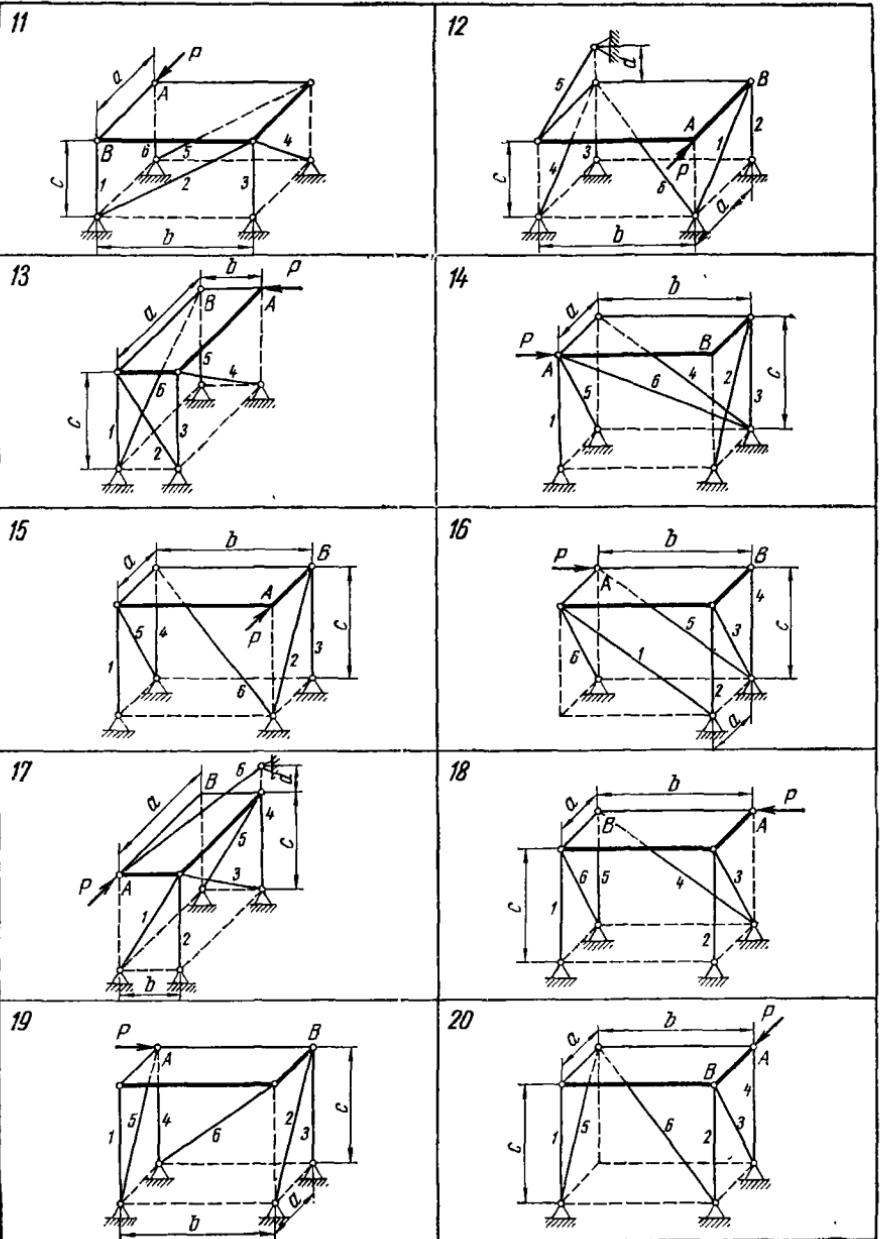
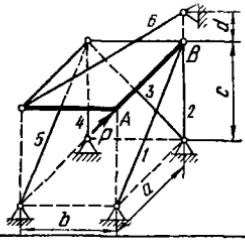
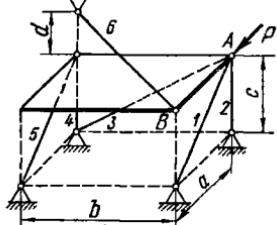


Рис. 63

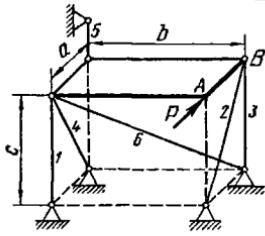
21



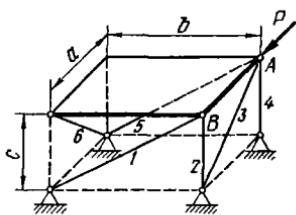
23



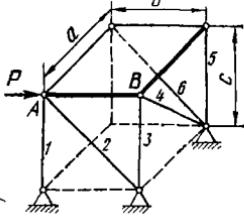
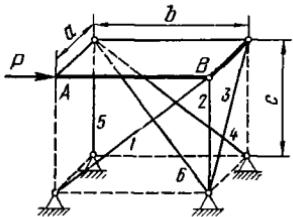
25



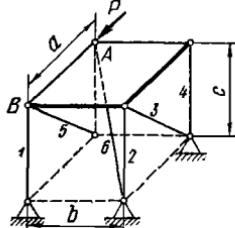
27



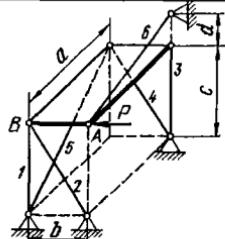
29



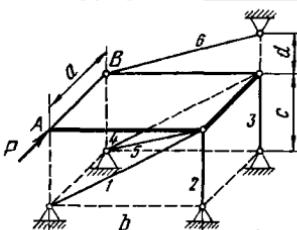
24



26



28



30

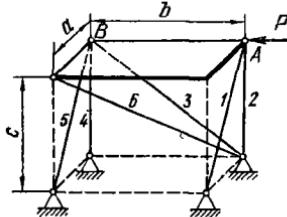


Рис. 64

гая, что все стержни растянуты, направляем их реакции \bar{S}_1 , \bar{S}_2 , \bar{S}_3 , \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_6 от узлов.

Выбираем оси координат $Oxyz$ так, чтобы эти оси пересекали наибольшее количество стержней. В этом случае уравнения равновесия получают наиболее простой вид. Дополним построение до прямоугольного параллелепипеда и введем углы φ , ψ , η , θ . Усилие S_6

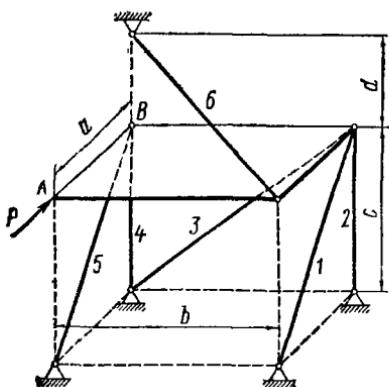


Рис. 65

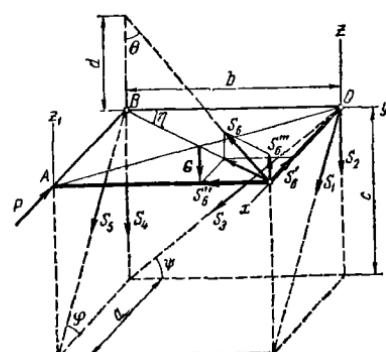


Рис. 66

целесообразно разложить на три составляющих по координатным осям (см. рис. 66); их модули:

$$S'_6 = S_6 \sin \theta \sin \eta; \quad S''_6 = S_6 \sin \theta \cos \eta; \quad S'''_6 = S_6 \cos \theta.$$

Составляем шесть уравнений равновесия:

$$\sum M_{lx} = 0; \quad G \cdot b/2 + S_4 b + S_5 \sin \varphi \cdot b = 0; \quad (1)$$

$$\sum M_{ly} = 0; \quad G \cdot a/2 - S'''_6 a = 0; \quad (2)$$

$$\sum M_{lz} = 0; \quad -Pb + S_6 \cos \varphi \cdot b - S''_6 a = 0; \quad (3)$$

$$\sum X_i = 0; \quad -P + S_1 \cos \varphi + S_5 \cos \varphi - S'_6 = 0; \quad (4)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_3 \cos \psi - S''_6 = 0; \quad (5)$$

$$\sum Z_i = 0; \quad -G - S_1 \sin \varphi - S_2 - S_3 \sin \psi - S_4 - S_5 \sin \varphi + S'''_6 = 0. \quad (6)$$

По заданным размерам вычисляем синусы и косинусы углов.

$$\sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}};$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}};$$

$$\sin \psi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{4}{\sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{4}{\sqrt{41}};$$

$$\cos \psi = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} = \frac{5}{\sqrt{41}};$$

$$\sin \eta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\cos \eta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+d^2}} = \frac{\sqrt{5^2+5^2}}{\sqrt{5^2+5^2+2^2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} = \frac{5}{3\sqrt{3}};$$

$$\cos \theta = \frac{d}{\sqrt{a^2+b^2+d^2}} = \frac{2}{\sqrt{54}}.$$

Из уравнения (2)

$$S_6''' = 1/2 \cdot G = 1/2 \cdot 6 = 3 \text{ кН}, \quad \text{но} \quad S_6''' = S_6 \cos \theta,$$

откуда

$$S_6 = \frac{S_6'''}{\cos \theta} = \frac{3\sqrt{54}}{2} = 11,03 \text{ кН}.$$

Из уравнения (3)

$$S_5 = \frac{Pb + S'_4 a}{b \cos \varphi} = \frac{P}{\cos \varphi} + \frac{S_4 a \sin \theta \cos \eta}{b \cos \varphi} = \\ = \frac{1,5 \cdot \sqrt{54} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{41}}{5 \cdot 5} = 3,3 \sqrt{41} = 21,1 \text{ кН}.$$

Из уравнения (1)

$$S_4 = -\frac{1}{2} G - S_5 \sin \varphi = -\frac{1}{2} 6 - 3,3 \sqrt{41} \frac{4}{\sqrt{41}} = \\ = -3 - 13,2 = -16,2 \text{ кН}.$$

Из уравнения (5)

$$S_3 = -\frac{S'_4}{\cos \psi} = -\frac{S_4 \sin \theta \cos \eta}{\cos \psi} = \\ = -\frac{1,5 \cdot \sqrt{54} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{41}}{5} = -1,5 \sqrt{41} = -9,62 \text{ кН}.$$

Из уравнения (4)

$$S_1 = \frac{P}{\cos \psi} - S_5 + \frac{S'_4}{\cos \varphi} = \frac{P}{\cos \psi} - S_5 + \frac{S_4 \sin \theta \sin \eta}{\cos \varphi} = \\ = \frac{9\sqrt{41}}{5} - 3,3 \sqrt{41} + \frac{1,5 \cdot \sqrt{54} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1}{5} = \\ = (1,8 - 3,3 + 1,5) \sqrt{41} = 0.$$

Из уравнения (6)

$$\begin{aligned}
 S_2 &= -G - S_1 \sin \varphi - S_3 \sin \psi - S_4 - S_5 \sin \varphi + S_6'' = \\
 &= -G - (S_1 + S_5) \sin \varphi - S_3 \sin \psi - S_4 + S_6 \cos \theta = \\
 &= -6 - (0 + 3,3\sqrt{41}) \frac{4}{\sqrt{41}} - (-1,5\sqrt{41}) \frac{4}{\sqrt{41}} - \\
 &\quad - (-16,2) + 1,5\sqrt{54} \frac{2}{\sqrt{54}} = 6 \text{ кН}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчета даны в табл. 18.

Таблица 18

Номер стержня	1	2	3	4	5	6
Знак усилия		+	-	-	+	+
Усилие, кН	0	6	9,62	16,2	21,1	11,03

Из данных табл. 18 видно, что стержни 2, 5 и 6 растянуты, стержни 3 и 4 сжаты, а стержень — 1 «нулевой».

Для проверки правильности проведенных расчетов составим уравнение моментов, например, относительно оси z_1 .

$$\begin{aligned}
 \Sigma M_{z_1} &= -S_1 \cos \varphi \cdot b + S_3 \cos \psi \cdot a + S'_6 b = -S_1 \cos \varphi \cdot b + S_3 \cos \psi \cdot a + \\
 &+ S_6 \sin \theta \sin \eta \cdot b = 0 + (-1,5\sqrt{41}) \frac{5}{\sqrt{41}} \cdot 5 + 1,5\sqrt{54} \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{54}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \times \\
 &\times 5 = -37,5 + 37,5 = 0.
 \end{aligned}$$

ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ

Задание С-12. Определение положения центра тяжести тела

Найти координаты центра тяжести плоской фермы, составленной из тонких однородных стержней одинакового погонного веса (варианты 1—6), плоской фигуры (варианты 7—18 и 24—30) или объема (варианты 19—23), показанных на рис. 67—69. В вариантах 1—6 размеры указаны в метрах, а в вариантах 7—30 — в сантиметрах.

Пример выполнения задания. Определить координаты центра тяжести плоской фигуры, показанной на рис. 70.

Решение. Координаты центра тяжести площади определяем по формулам:

$$x_C = \frac{\sum F_i x_i}{F}; \quad y_C = \frac{\sum F_i y_i}{F}. \quad (1)$$

Чтобы воспользоваться этими формулами, площадь делим на отдельные части, положения центров которых известны.

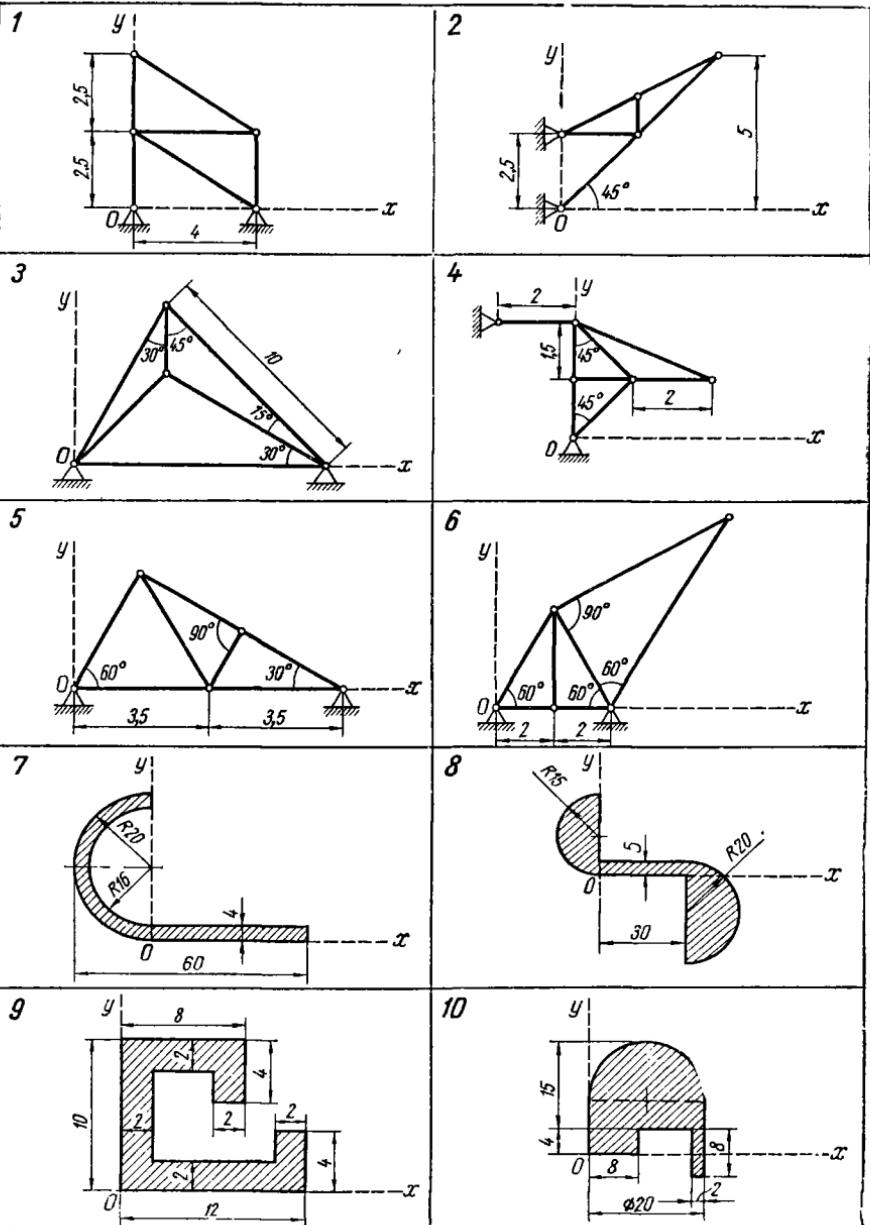


FIG. 67

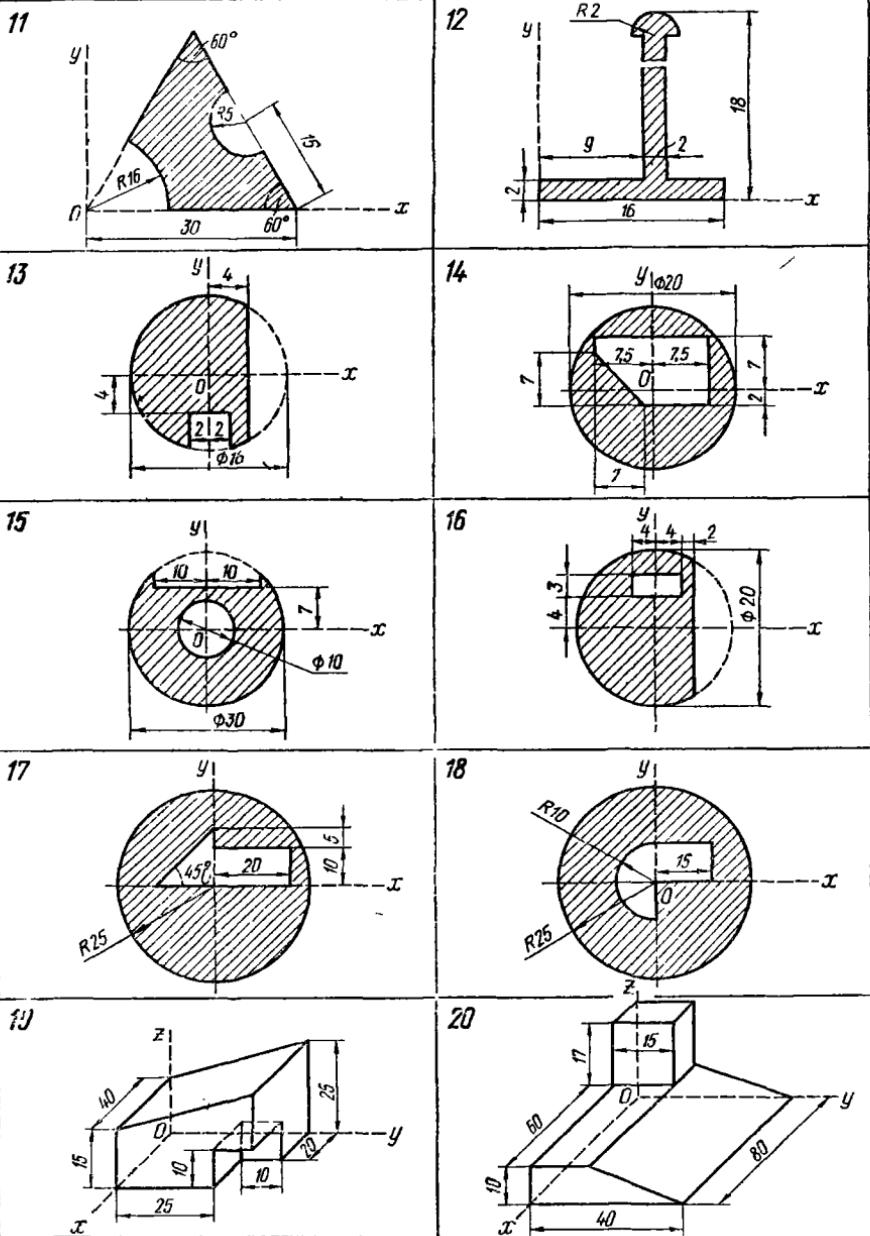


Рис. 68

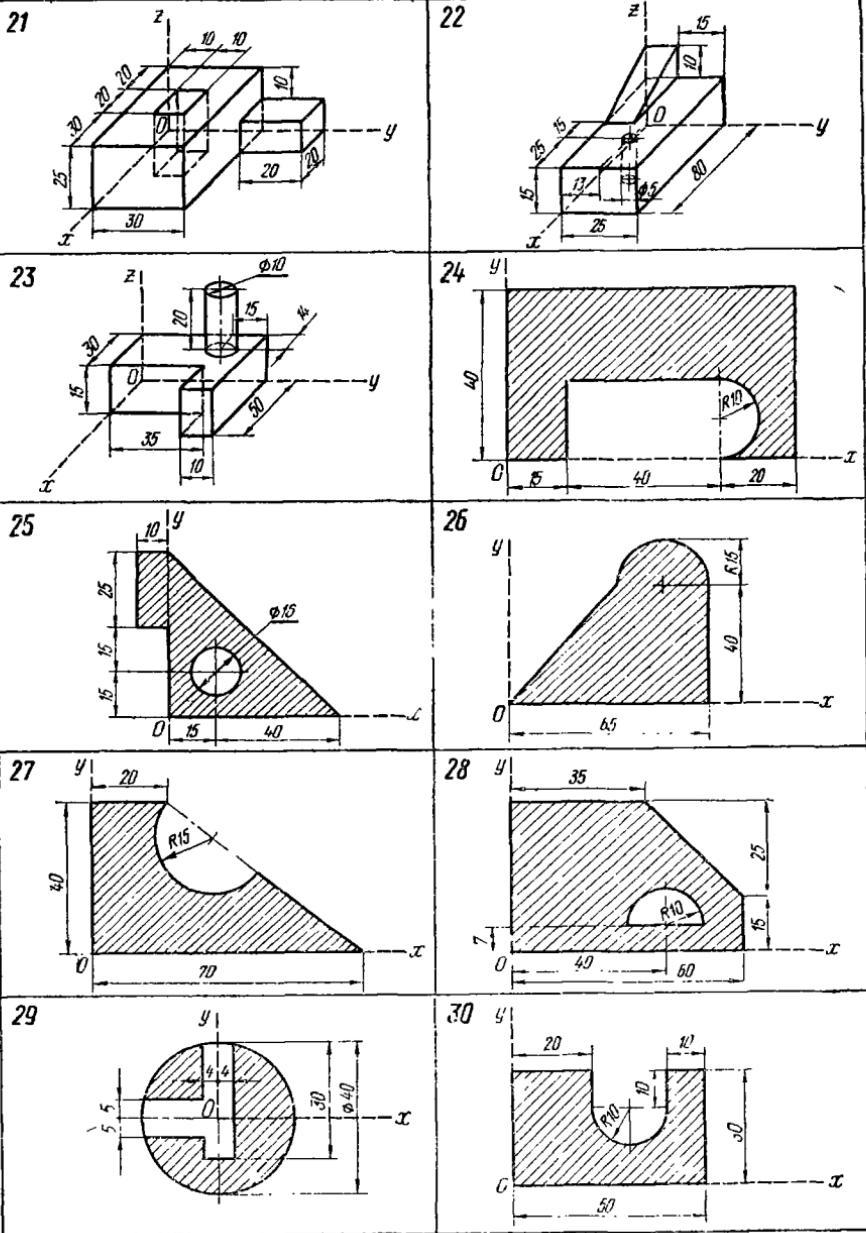


Рис. 69

В данном случае такими частями являются: прямоугольник, треугольник и половина круга (рис. 71). Площадь половины круга, вырезанную из площади прямоугольника, считаем стрицательной.

Имеем:

площадь прямоугольника

$$F_1 = 40 \cdot 30 = 1200 \text{ см}^2;$$

площадь треугольника

$$F_2 = (40 \cdot 50)/2 = 1000 \text{ см}^2;$$

площадь половины круга

$$F_3 = (\pi \cdot 20^2)/2 = 200\pi = 628 \text{ см}^2.$$

Центры тяжести рассматриваемых частей фигуры имеют следующие координаты:

для прямоугольника:

$$x_1 = 15 \text{ см}; y_1 = 20 \text{ см};$$

для треугольника

$$x_2 = 30 + 50/3 = 46,7 \text{ см}; y_2 = 40/3 = 13,3 \text{ см};$$

для половины круга

$$x_3 = 4R/3\pi = (4 \cdot 20)/(3\pi) = 8,5 \text{ см}; y_3 = 20 \text{ см}.$$

Для вычисления координат центра тяжести плоской фигуры составляем таблицу (табл. 19).

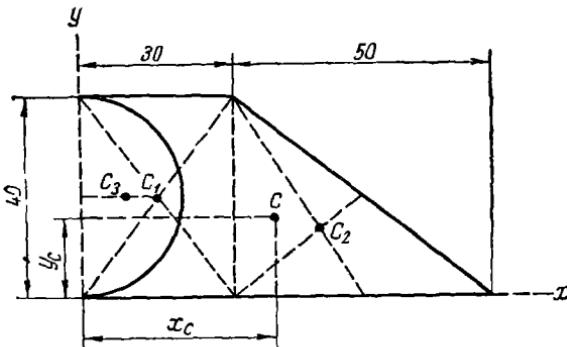


Рис. 71

По формулам (1) вычисляем координаты центра тяжести плоской фигуры:

$$x_C = \frac{59362}{1572} = 37,8 \text{ см}; y_C = \frac{24700}{1572} = 15,7 \text{ см}.$$

Таблица 19

Номер элемента	F_l , см ³	x_l , см	y_l , см	$S_{ly} = F_l \cdot x_l$, см ³	$S_{lx} = F_l y_l$, см ³
1	1200	15,0	20,0	18000	24000
2	1000	46,7	13,3	46700	13300
3	-628	8,5	20,0	-5338	-12560
Σ	1572	-	-	59362	24700

Центр тяжести площади указан на рис. 71.

При меч ани е. Площади и координаты центров тяжести некоторых плоских фигур, встречающихся при выполнении заданий, приведены в табл. 20.

Таблица 20

Плоская фигура	Площадь	Координаты центра тяжести
Треугольник	$F = 1/2 \cdot a h_a$	$y_C = 1/3 \cdot h_a$ $x_C = 1/3 \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — координаты вершин O, A, B
Круговой сектор $\alpha = \pi/2$ (полукруг)	$F = \alpha R^2$	$x_C = \frac{2R \sin \alpha}{3\alpha} = \frac{R^2 b}{3F}$
	$F = \pi R^2 / 2$	$x_C = 4R / 3\pi$
	$F = \pi R^2 / 6$	$x_C = 2R / \pi$
Круговой сегмент	$F = 1/2 \cdot R^2 \times (2\alpha - \sin 2\alpha)$	$x_C = \frac{4R \sin^3 \alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)} = \frac{b^3}{12F}$

РАЗДЕЛ ВТОРОЙ. КИНЕМАТИКА

В этом разделе содержатся 12 заданий по кинематике точки, кинематике твердого тела и сложному движению. По каждой теме предлагаются задания различной трудности. Так, задание К-2 сложнее, чем К-1. Наиболее полно охватывающим тему плоского движения является задание К-6.

Каждое из заданий К-5, К-6, К-7, К-8, К-11 и К-12, как показано в примерах, можно полностью или частично выполнить различными способами. Однако обязательное использование двух способов предусмотрено только в условии задания К-6.

Предполагается, что выбор способа выполнения других заданий произволен или определяется преподавателем.

I. Кинематика точки

ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ И КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТОЧКИ

Задание К-1. Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения

По заданным уравнениям движения точки M установить вид ее траектории и для момента времени $t = t_1$ (с) найти положение точки на траектории, ее скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 21.

Пример выполнения задания. Исходные данные в см и с:

$$\begin{aligned}x &= 4t; \quad y = 16t^2 - 1; \\t_1 &= 1/2.\end{aligned}\tag{1}$$

Решение. Уравнения движения (1) являются параметрическими уравнениями траектории точки M . Чтобы получить уравнение траектории в обычной координатной форме, исключим время t из уравнений движения.

Тогда

$$y = x^2 - 1.\tag{2}$$

Таблица 21

Номер варианта	Уравнения движения		$t_1, \text{ с}$
	$x = x(t), \text{ см}$	$y = y(t), \text{ см}$	
1	$-2t^2 + 3$	$-5t$	1/2
2	$4 \cos^2(\pi t/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi t/3)$	1
3	$-\cos(\pi t^2/3) + 3$	$\sin(\pi t^2/3) - 1$	1
4	$4t + 4$	$-4/(t+1)$	2
5	$2 \sin(\pi t/3)$	$-3 \cos(\pi t/3) + 4$	1
6	$3t^2 + 2$	$-4t$	1/2
7	$3t^2 - t + 1$	$5t^2 - 5t/3 - 2$	1
8	$7 \sin(\pi t^2/6) + 3$	$2 - 7 \cos(\pi t^2/6)$	1
9	$-3/(t+2)$	$3t + 6$	2
10	$-4 \cos(\pi t/3)$	$-2 \sin(\pi t/3) - 3$	1
11	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1/2
12	$5 \sin^2(\pi t/6)$	$-5 \cos^2(\pi t/6) - 3$	1
13	$5 \cos(\pi t^2/3)$	$-5 \sin(\pi t^2/3)$	1
14	$-2t - 2$	$-2/(t+1)$	2
15	$4 \cos(\pi t/3)$	$-3 \sin(\pi t/3)$	1
16	$3t$	$4t^2 + 1$	1/2
17	$7 \sin^2(\pi t/6) - 5$	$-7 \cos^2(\pi t/6)$	1
18	$1 + 3 \cos(\pi t^2/3)$	$3 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1
19	$-5t^2 - 4$	$2t$	1
20	$2 - 3t - 6t^2$	$3 - t/2 - 3t^2$	0
21	$6 \sin(\pi t^2/6) - 2$	$6 \cos(\pi t^2/6) + 3$	1
22	$7t^2 - 3$	$5t$	1/4
23	$3 - 3t^2 + t$	$4 - 5t^2 + 5t/3$	1
24	$-4 \cos(\pi t/3) - 1$	$-4 \sin(\pi t/3)$	1

Номер варианта	Уравнения движения		$t_1, \text{ с}$
	$x = x(t), \text{ см}$	$y = y(t), \text{ см}$	
25	$-6t$	$-2t^2 - 4$	1
26	$8 \cos^2(\pi t/6) + 2$	$-8 \sin^2(\pi t/6) - 7$	1
27	$-3 - 9 \sin(\pi t^2/6)$	$-9 \cos(\pi t^2/6) + 5$	1
28	$-4t^2 + 1$	$-3t$	1
29	$5t^2 + 5t/3 - 3$	$3t^2 + t + 3$	1
30	$2 \cos(\pi t^2/3) - 2$	$-2 \sin(\pi t^2/3) + 3$	1

Это выражение есть уравнение параболы.

Для определения скорости точки находим проекции скорости на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = 4 \text{ см/с}; \quad v_y = \dot{y} = 32t \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \quad (3)$$

Аналогично проекции ускорения точки

$$w_x = \ddot{x} = 0; \quad w_y = \ddot{y} = 32 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 32 \text{ см/с}^2.$$

Координаты точки, а также ее скорость, ускорение и их проекции на координатные оси для заданного момента времени $t = 1/2$ с приведены в табл. 22.

Таблица 22

Координаты, см		Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
x	y	v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_τ	w_n	ρ
2	3	4	16	16,5	0	32	32	31	7,94	34,3

Касательное ускорение находим путем дифференцирования модуля скорости (3):

$$w_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right|;$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2v_x \dot{v}_x + 2v_y \dot{v}_y}{2\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} = \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v}.$$

При $t = 1/2$ с

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4 \cdot 0 + 16 \cdot 32}{16,5} = 31 \text{ см/с}^2.$$

Следовательно, модуль касательного ускорения

$$w_t = 31 \text{ см/с}^2.$$

Знак «+» при dv/dt показывает, что движение точки ускоренное и, следовательно, направления \vec{w}_t и \vec{v} совпадают.

Нормальное ускорение точки в данный момент времени

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \sqrt{32^2 - 31^2} = 7,94 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны траектории в той точке, где при $t = 1/2$ с находится точка M ,

$$\rho = v^2/w_n = 16,5^2/7,94 = 34,3 \text{ см.}$$

Полученные значения w_t , w_n и ρ также приведены в табл. 22.

Пользуясь уравнением (2), строим траекторию (рис. 72) и показываем на ней положение точки M в заданный момент времени.

Вектор \vec{v} строим по составляющим v_x и v_y , причем этот вектор должен быть направлен по касательной к траектории точки. Вектор \vec{w} находим как по составляющим w_x и w_y , так и по \vec{w}_t и \vec{w}_n , чем контролируется правильность вычислений.

Дополнение к заданию К-1. Уравнения движения точки на плоскости (табл. 21) можно использовать и для задания движения точки в пространстве, если дополнительно к табл. 21 задать третье уравнение $z = z(t)$, которое приведено в табл. 23.

Пример выполнения задания. Исходные данные (в см и с):

$$x = \frac{4}{t+1}; \quad y = -4t - 4; \quad z = 2t + 2; \quad t_1 = 0. \quad (4)$$

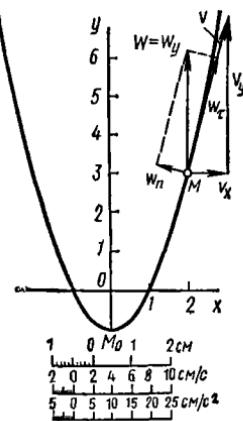


Рис. 72

Решение. Уравнения (4) являются параметрическими уравнениями траектории точки в пространстве. Исключая параметр t из первого и второго уравнений этой системы, а также из второго и третьего, находим:

$$xy = -16; \quad (5)$$

$$y = -2z. \quad (6)$$

Уравнение (5) выражает в плоскости xOy равностороннюю гиперболу, для которой оси координат служат асимптотами. В пространстве этому уравнению соответствует гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz .

Таблица 23

Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см	Номер варианта	$z = z(t)$, см
1	$3t$	11	$2t$	21	$4t$
2	$2t$	12	$3t$	22	t
3	$1,5t$	13	$1,5t$	23	$1,5t$
4	$4t + 4$	14	$2t + 2$	24	$2t$
5	t	15	$3t$	25	$5t$
6	$3t$	16	$1,5t$	26	$6t$
7	$2,5t$	17	$5t$	27	$3,5t$
8	$5t$	18	$3,5t$	28	$4t$
9	$4t + 8$	19	$6t$	29	$5t$
10	t	20	$2t$	30	$1,5t$

Уравнение (6) выражает в плоскости yOz прямую, проходящую через начало координат, а в пространстве — плоскость, содержащую ось Ox .

Траектория точки представляет собой линию пересечения этих двух поверхностей: гиперболического цилиндра и плоскости (рис. 73).

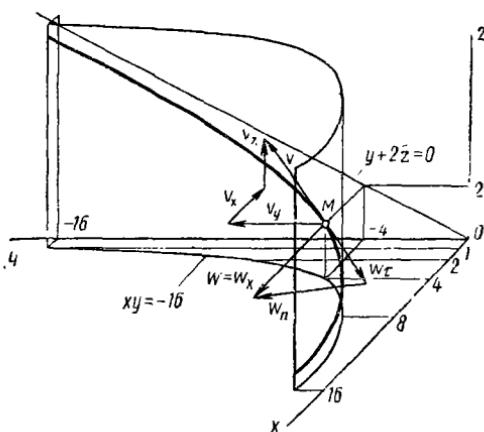


Рис. 73

Проекции скорости точки на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = -\frac{4}{(t+1)^2} \text{ см/с};$$

$$v_y = \dot{y} = -4 \text{ см/с};$$

$$v_z = \dot{z} = 2 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{2}{(t+1)^2} \sqrt{4 + 5(t+1)^4} \text{ см/с}.$$

Проекции ускорения точки

$$\omega_x = \ddot{x} = \frac{8}{(t+1)^3}; \quad \omega_y = \ddot{y} = 0; \quad \omega_z = \ddot{z} = 0.$$

Модуль ускорения

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \frac{8}{(t+1)^3} \text{ см/с}^2.$$

Координаты точки, ее скорость, ускорение и их проекции на оси координат для заданного момента времени $t = 0$ приведены в табл. 24.

Таблица 24

Координаты, см			Скорость, см/с				Ускорение, см/с ²						Радиус кривизны, см
x	y	z	v_x	v_y	v_z	v	ω_x	ω_y	ω_z	ω	ω_τ	ω_n	ρ
4	-4	2	-4	-4	2	6	8	0	0	8	5,33	5,96	6,04

Модуль касательного ускорения

$$\omega_\tau = \left| \frac{dv}{dt} \right|,$$

$$\text{где } \frac{dv}{dt} = \frac{v_x \omega_x + v_y \omega_y + v_z \omega_z}{v} = \frac{-4 \cdot 8}{6} = -5,33 \text{ см/с}^2.$$

Знак «-» при dv/dt показывает, что движение точки замедленное.

Касательное ускорение ω_τ направлено в сторону, противоположную скорости.

Нормальное ускорение

$$\omega_n = \sqrt{\omega^2 - \omega_\tau^2} = \sqrt{8^2 - 5,33^2} = 5,96 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны

$$\rho = v^2 / \omega_n = 6^2 / 5,96 = 6,04 \text{ см.}$$

Полученные значения ω_τ , ω_n и ρ также приведены в табл. 24.

На рис. 73 показаны положение точки M в заданный момент времени, а также ее скорость и ускорение, построенные по составляющим \vec{v}_x , \vec{v}_y , \vec{v}_z и $\vec{\omega}_x$, $\vec{\omega}_y$, $\vec{\omega}_z$.

Вектор $\vec{\omega}_\tau$ откладываем по касательной к траектории в сторону, противоположную направлению скорости. Вектор $\vec{\omega}_n$ определяется как разность $\vec{\omega}_n = \vec{\omega} - \vec{\omega}_\tau$.

Задание К-2. Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения

Для точки M заданного механизма составить уравнения движения, вычертить участок ее траектории и для момента времени $t = t_1$ найти скорость точки, полное, касательное и нормальное ускорения, а также радиус кривизны траектории в соответствующей точке.

Таблица 25

Номер варианта (рис. 74—76)	Размеры звеньев механизма, см			$\Phi = \Phi(t)$, рад	$s = s(t)$, см	t_1 , с
	l	R	r			
1	15	—	—	$2\pi t$	—	$1/6$
2	—	50	—	$3\pi t$	—	$1/9$
3	54	—	30	πt	—	$1/2$
4	—	—	30	$6\pi t$	—	$1/12$
5	40	—	15	πt	—	$1/6$
6	60	—	—	—	$60\sqrt{2}\sin 2\pi t$	$1/12$
7	—	250	50	$5\pi t$	—	$1/15$
8	10	—	—	$3\pi t$	—	$1/12$
9	60	—	35	πt	—	$1/6$
10	40	—	—	—	$40\sin \pi t$	$1/4$
11	60	—	24	$2\pi t$	—	$1/6$
12	45	—	—	—	$30\sqrt{3}\cos \pi t$	$1/3$
13	—	50	—	$5\pi t$	—	$1/15$
14	20	—	—	$2\pi t$	—	$1/12$
15	60	—	40	$3\pi t$	—	$1/12$
16	40	—	—	—	$40\sin 3\pi t$	$1/9$
17	42	—	30	$3\pi t$	—	$1/12$
18	40	—	—	—	$80\sin 2\pi t$	$1/6$
19	—	50	—	$4\pi t$	—	$1/16$
20	60	—	22	$2\pi t$	—	$1/6$
21	—	28	12	πt	—	$1/6$
22	45	—	—	—	$45\sin \pi t$	$1/3$
23	42	—	—	—	$42\cos 2\pi t$	$1/6$
24	45	—	—	—	$45\sqrt{2}\sin \pi t$	$1/6$
25	60	—	21	πt	—	$1/3$
26	30	—	—	—	$20\sqrt{3}\sin 3\pi t$	$1/18$
27	—	23	10	$2\pi t$	—	$1/8$
28	—	45	30	$3\pi t$	—	$1/4$
29	50	—	—	—	$100\cos 2\pi t$	$1/8$
30	60	—	24	$3\pi t$	—	$1/12$

Схемы механизмов помещены на рис. 74—76, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 25.

Пример выполнения задания. Исходные данные: схема механизма (рис. 77); $\varphi = \pi t$ рад; $r = 20$ см; $R = 100$ см; $t_1 = 1/3$ с.

Решение. Из условия $\overline{OP} = \overline{MP}$ имеем:

$$R\alpha = r\varphi; \quad \alpha = r\varphi/R = 0,2\pi t.$$

При $t = 1/3$ с $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = 12^\circ$.

Уравнения движения точки M (рис. 78):

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \sin \alpha - r \sin (\varphi + \alpha); \\ y &= (R + r) \cos \alpha - R - r \cos (\varphi + \alpha) \end{aligned}$$

или окончательно

$$\left. \begin{aligned} x &= 20(6 \sin 0,2\pi t - \sin 1,2\pi t) \text{ см}; \\ y &= 20(6 \cos 0,2\pi t - \cos 1,2\pi t - 5) \text{ см}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

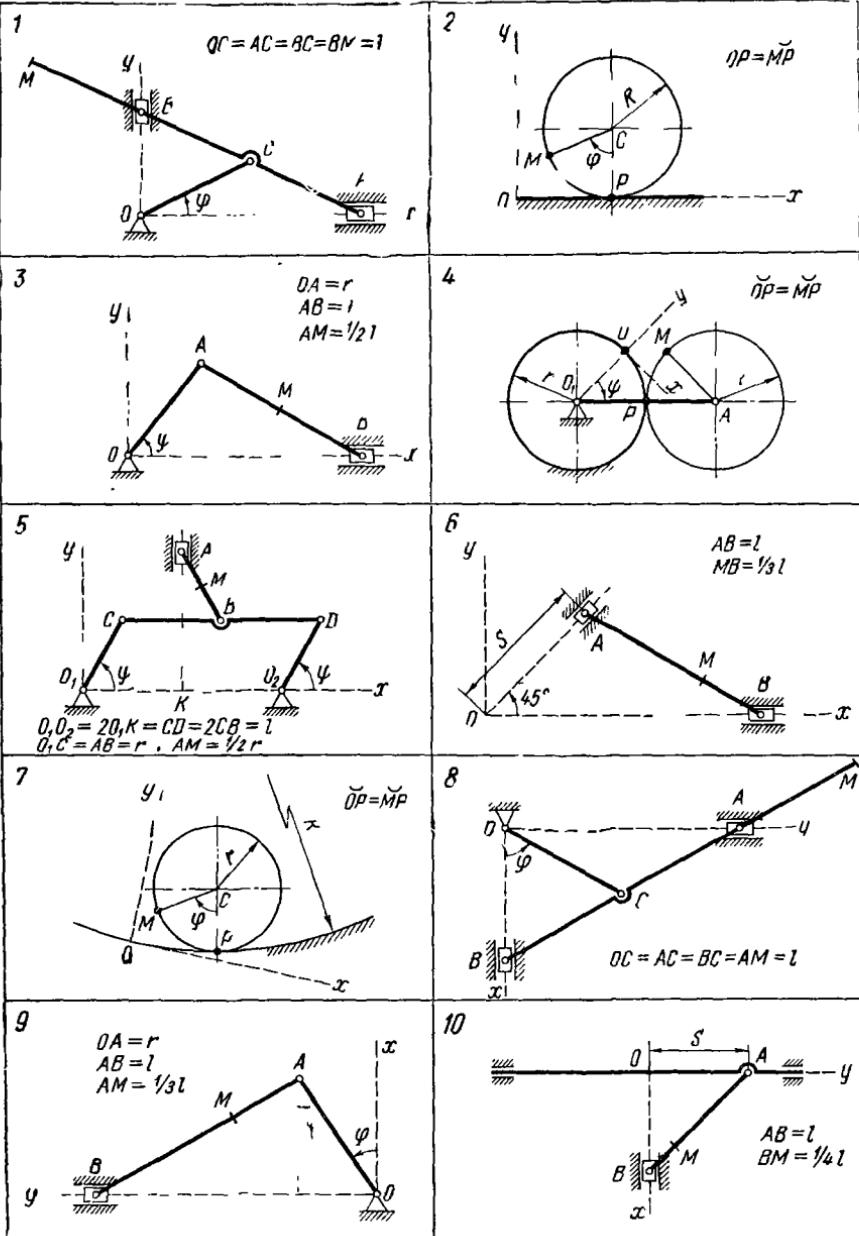


Рис. 74

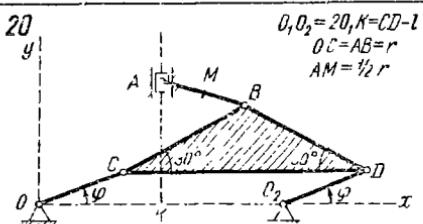
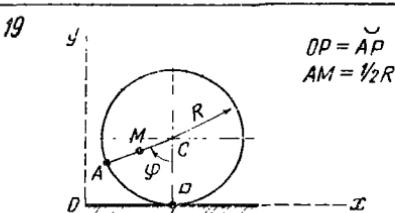
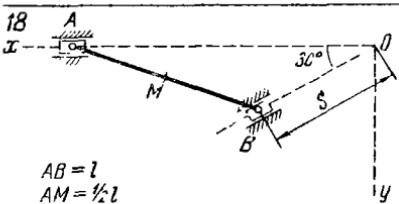
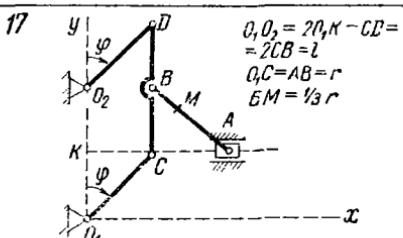
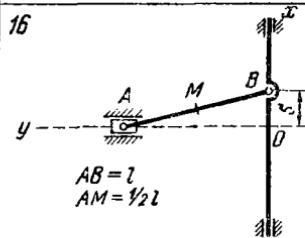
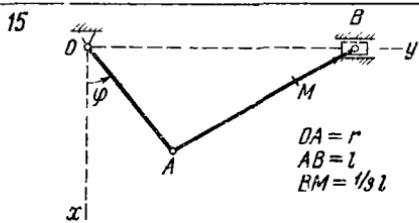
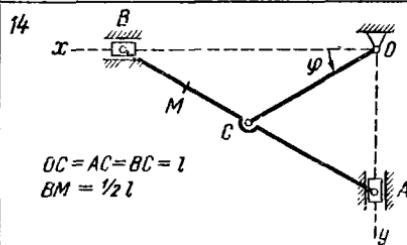
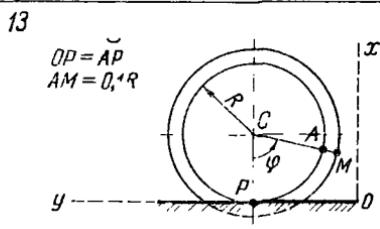
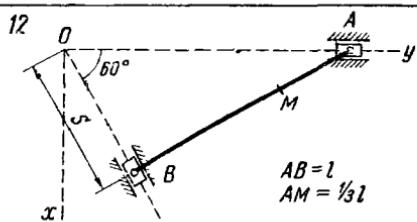
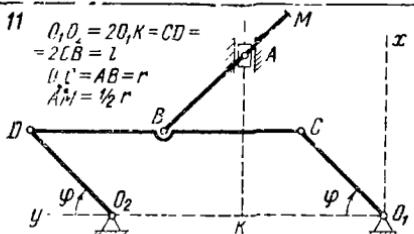
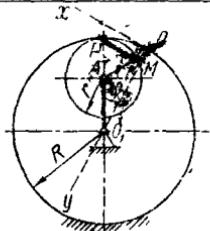


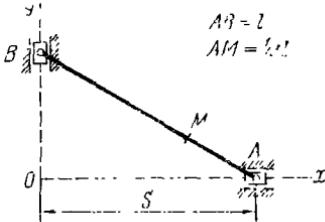
Рис. 75

21



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MP}$$

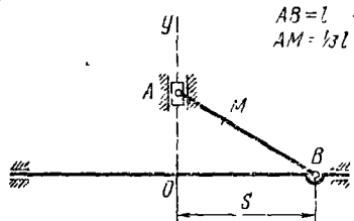
22



$$AB = l$$

$$AM = \frac{1}{2}l$$

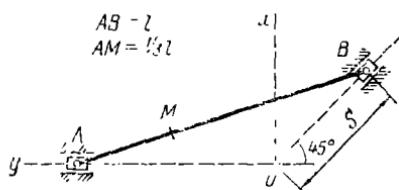
23



$$AB = l$$

$$AM = \frac{1}{3}l$$

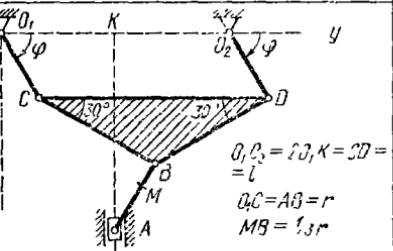
24



$$AB = l$$

$$AM = \frac{1}{3}l$$

25

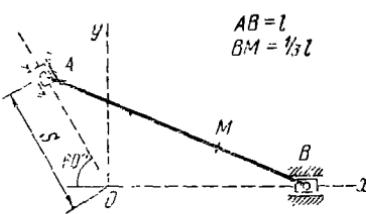


x

y

$$\begin{aligned} O_1O_2 &= 2l, K = 2D = \\ &= l \\ O_1C &= AB = r \\ MB &= \frac{1}{3}r \end{aligned}$$

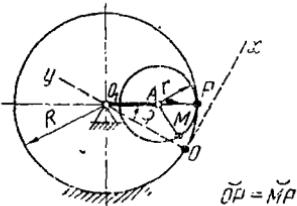
26



$$AB = l$$

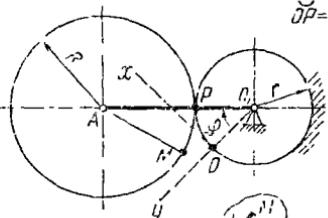
$$BM = \frac{1}{3}l$$

27



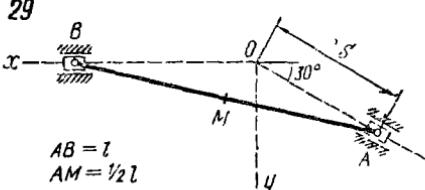
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MP}$$

28



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{MP}$$

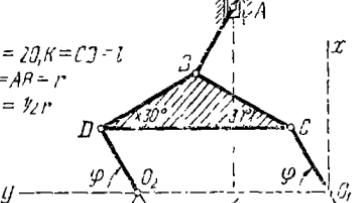
29



$$AB = l$$

$$AM = \frac{1}{2}l$$

30



$$O_1O_2 = 2l, K = CD = l$$

$$O_1C = AB = r$$

$$MA = \frac{1}{2}r$$

Рис. 76

Эти уравнения являются параметрическими уравнениями траектории точки — эпициклоиды *.

Проекции скорости точки на оси координат:

$$v_x = \dot{x} = 24\pi (\cos 0,2\pi t - \cos 1,2\pi t) \text{ см/с;}$$

$$v_y = \dot{y} = 24\pi (-\sin 0,2\pi t + \sin 1,2\pi t) \text{ см/с.}$$

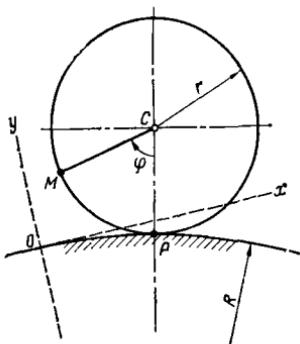


Рис. 77

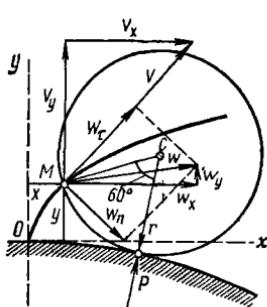


Рис. 77

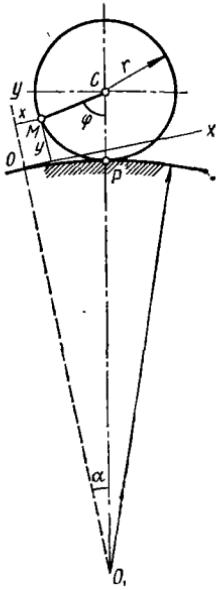
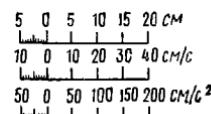


Рис. 78



$\alpha = 12^\circ$
 O_1

Рис. 79

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 24\pi \sqrt{2 - 2(\cos 0,2\pi t \cdot \cos 1,2\pi t + \sin 0,2\pi t \cdot \sin 1,2\pi t)} = \\ = 24\pi \sqrt{2(1 - \cos \pi t)}$$

* В некоторых вариантах задания можно исключить параметр t из уравнений движения и получить уравнение траектории в обычной координатной форме.

или окончательно

$$v = 48\pi \left| \sin \frac{\pi t}{2} \right| \text{ см/с.} \quad (2)$$

Проекции ускорения точки на оси координат

$$w_x = \ddot{x} = 4,8\pi^2 (-\sin 0,2\pi t + 6 \sin 1,2\pi t) \text{ см/с}^2;$$

$$w_y = \ddot{y} = 4,8\pi^2 (-\cos 0,2\pi t + 6 \cos 1,2\pi t) \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} =$$

$$= 4,8\pi^2 \sqrt{37 - 12 (\sin 0,2\pi t \cdot \sin 1,2\pi t + \cos 0,2\pi t \cdot \cos 1,2\pi t)}$$

или

$$w = 4,8\pi^2 \sqrt{37 - 12 \cos \pi t} \text{ см/с}^2.$$

Так как в данном примере для модуля скорости точки получено простое выражение, то модуль касательного ускорения находим не по формуле

$$w_t = \left| \frac{v_x w_x + v_y w_y}{v} \right|,$$

а непосредственным дифференцированием выражения (2):

$$w_t = \left| \frac{dv}{dt} \right|$$

или

$$w_t = 24\pi^2 \left| \cos \frac{\pi t}{2} \right| \text{ см/с}^2.$$

Модули скорости и ускорения точки, их проекции на оси координат, а также касательное и нормальное ускорения, вычисленные для заданного момента времени $t = 1/3$ с, приведены в табл. 26.

Таблица 26

Скорость, см/с			Ускорение, см/с ²					Радиус кривизны, см
v_x	v_y	v	w_x	w_y	w	w_t	w_n	ρ
50,4	56,0	75,4	260	41	263	204	166	34,3

Нормальное ускорение точки

$$w_n = \sqrt{w^2 - w_t^2} = \sqrt{263^2 - 204^2} = 166 \text{ см/с}^2.$$

Радиус кривизны

$$\rho = v^2 / w_n = 75,4^2 / 166 = 34,3 \text{ см.}$$

Значения w_n и ρ также приведены в табл. 26.

На чертеже (рис. 79) показан участок траектории точки M , построенный по уравнениям (1), а также ее скорость, ускорение и все их составляющие. Таким образом, как и при выполнении задания К-1, осуществляется графическая проверка правильности вычислений.

II. Кинематика твердого тела

ПОСТУПАТЕЛЬНОЕ И ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К-3. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движении

По заданному уравнению прямолинейного поступательного движения груза I определить скорость, а также вращательное, центро斯特ремительное и полное ускорения точки M механизма в момент времени, когда путь, пройденный грузом, равен s . Схемы механизмов показаны на рис. 80—82, а необходимые для расчета данные помещены в табл. 27.

Таблица 27

Номер варианта (рис. 80—82)	Радиусы, см				Уравнение движения груза I $x = x(t)$ (x — в см, t — в с)	s , м
	R_1	r_2	R_3	r_1		
1	60	45	36	—	$10 + 100 t^2$	0,5
2	80	—	60	45	$80 t^2$	0,1
3	100	60	75	—	$18 + 70 t^2$	0,2
4	58	45	60	—	$50 t^2$	0,5
5	80	—	45	30	$8 + 40 t^2$	0,1
6	100	60	30	—	$5 + 60 t^2$	0,5
7	45	35	105	—	$7 + 90 t^2$	0,2
8	35	10	10	—	$4 + 30 t^2$	0,5
9	40	30	15	—	$3 + 80 t^2$	0,2
10	15	—	40	35	$70 t^2$	0,4
11	40	25	20	—	$5 + 40 t^2$	0,3
12	20	15	10	—	$2 + 50 t^2$	0,1
13	30	20	40	—	$60 t^2$	0,4
14	15	10	15	—	$6 + 20 t$	0,1
15	15	10	15	—	$8 + 40 t^2$	0,3
16	20	15	15	—	$3 + 40 t^2$	0,4
17	15	10	20	—	$80 t^2$	0,6
18	20	15	10	—	$4 + 20 t$	0,3
19	15	10	20	—	$5 + 80 t^2$	0,2
20	25	15	10	—	$50 t^2$	0,3
21	20	10	30	10	$4 + 90 t^2$	0,5
22	40	20	35	—	$10 + 40 t^2$	0,5
23	40	30	30	15	$7 + 40 t$	0,6
24	30	15	40	20	$90 t^2$	0,2
25	50	20	60	—	$2 + 50 t$	0,5
26	32	16	32	16	$5 + 60 t^2$	0,1
27	40	18	40	18	$6 + 30 t^2$	0,3
28	40	20	40	15	$50 t^2$	0,4
29	25	20	50	25	$3 + 30 t$	0,6
30	30	15	20	—	$5 + 60 t^2$	0,2

Пример выполнения задания. Исходные данные: схема механизма (рис. 83); $x = 2 + 70 t^2$ см; (t — в с); $R_2 = 50$ см; $r_2 = 30$ см; $R_3 = 60$ см; $r_3 = 40$ см; $s = 40$ см.

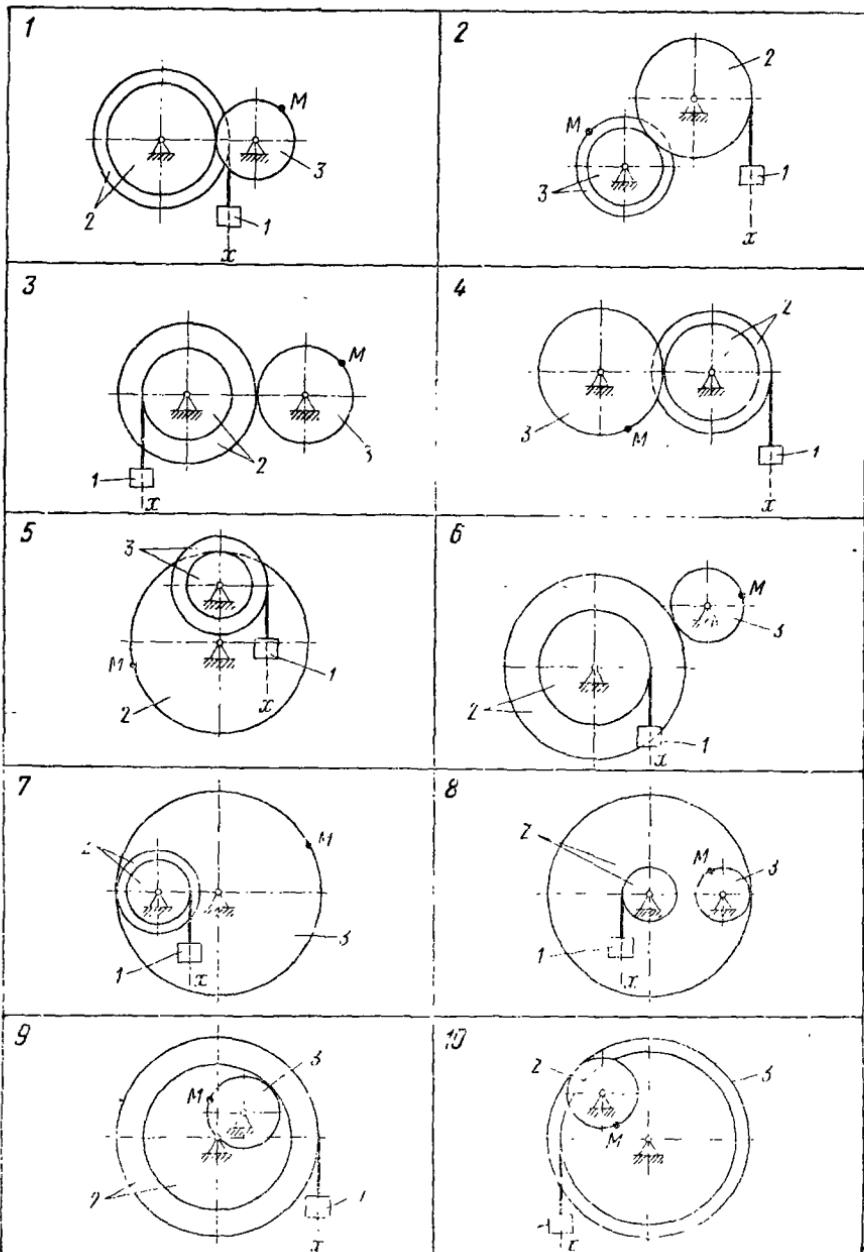


FIG. 80

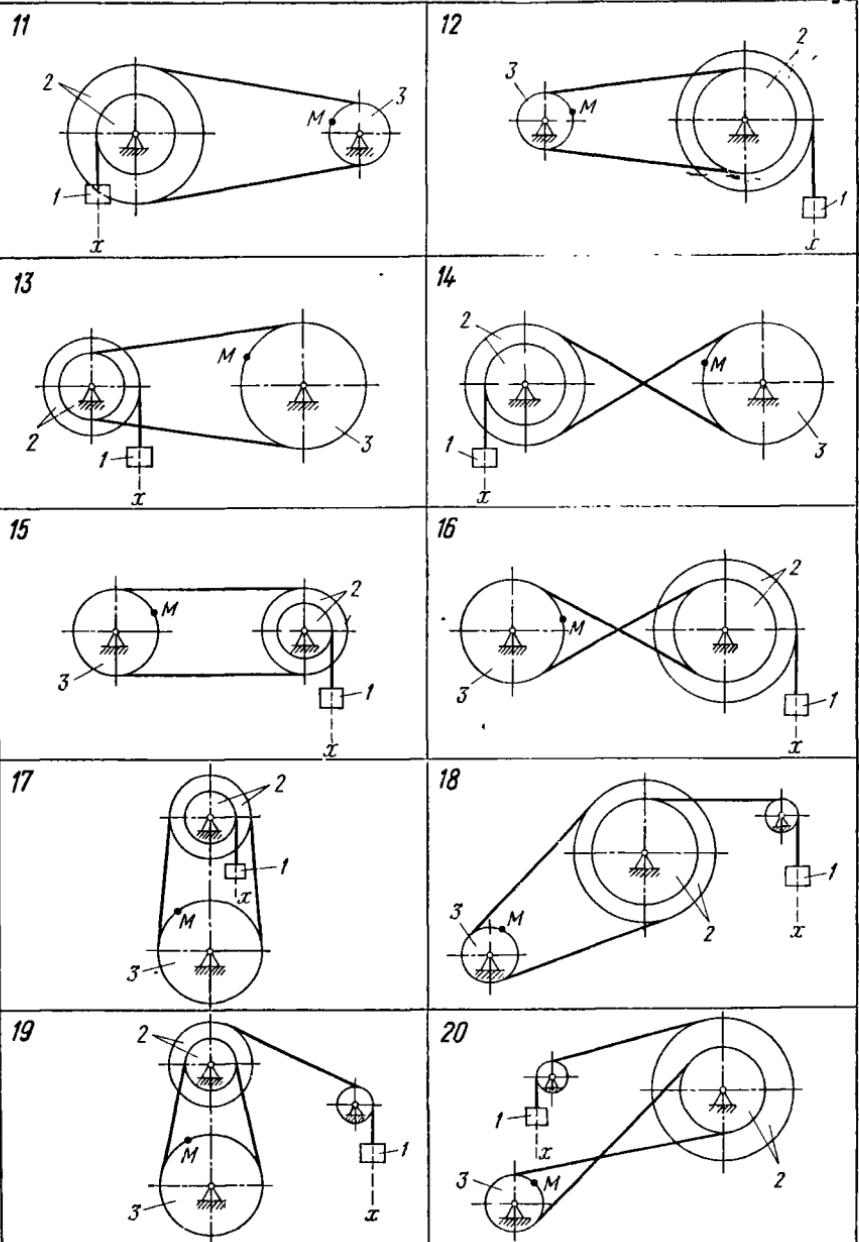
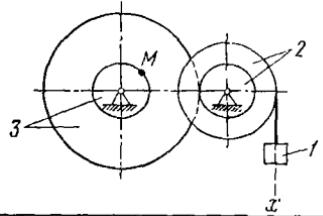
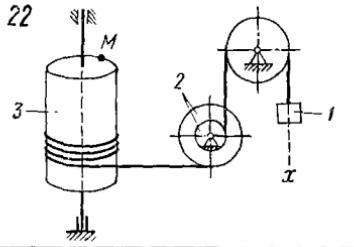


Рис. 81

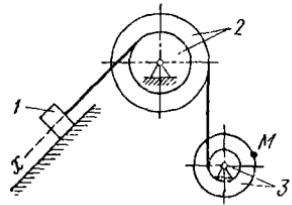
21



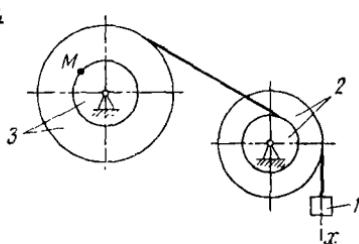
22



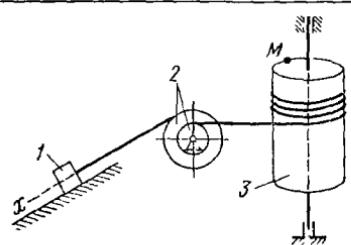
23



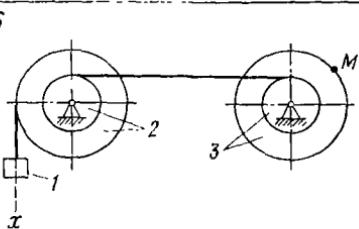
24



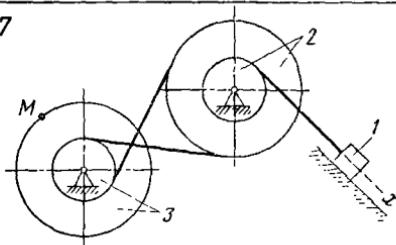
25



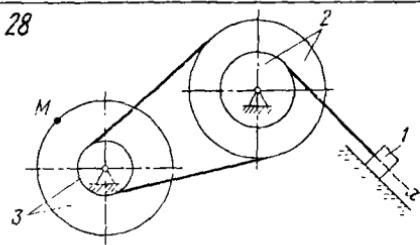
26



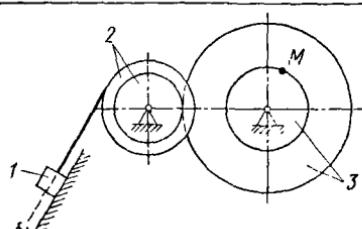
27



28



29



30

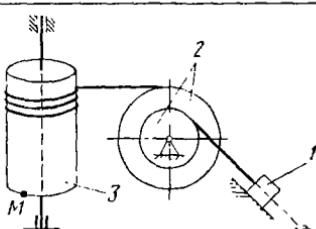


Рис. 82

Решение. Найдем момент времени τ , когда путь s , пройденный грузом, равен 40 см:

$$s = x_{(\tau-\tau)} - x_{(t=0)} = 70 \tau^2,$$

откуда

$$\tau = \sqrt{s/70} = \sqrt{40/70} = 0,76 \text{ с.}$$

Дифференцированием по времени уравнения движения найдем скорость груза:

$$v_t = |\dot{x}| = 140 t \text{ см/с.}$$

Угловая скорость звена 2

$$\omega_2 = v_t / r_2 = 140 t / 30 = (14/3) \cdot t \text{ с}^{-1}.$$

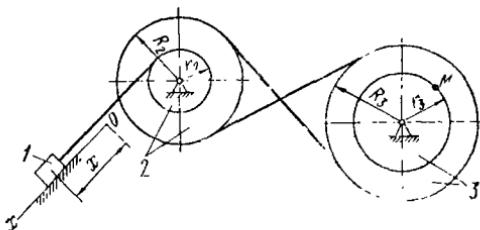


Рис. 83

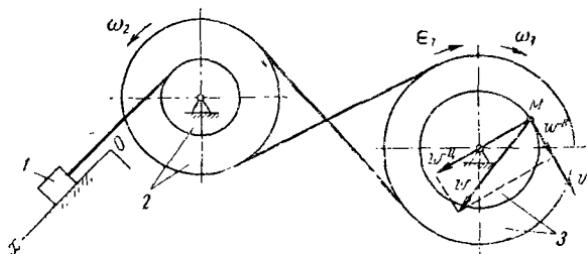


Рис. 84

Угловые скорости колес 2 и 3, связанных гибкой передачей, обратно пропорциональны радиусам этих колес, т. е.

$$\omega_2 / \omega_3 = R_3 / R_2,$$

откуда

$$\omega_3 = (R_2 / R_3) \cdot \omega_2 = (50/60) \cdot (14/3) \cdot t = (35/9) \cdot t \text{ с}^{-1}.$$

Угловое ускорение

$$\epsilon_3 = \ddot{\omega}_3 = 35/9 \text{ с}^{-2} = \text{const.}$$

Скорость точки M

$$v = r_3 \omega_3 = 40 \omega_3$$

и направлена перпендикулярно к радиусу в сторону вращения колеса 3.

Вращательное ускорение точки M

$$w^v = r_3 \epsilon_3 = 40 \text{ } \epsilon_3$$

и имеет одинаковое со скоростью направление, так как в рассматриваемом примере вращение колес ускоренное.

Центростремительное ускорение точки M

$$w^c = r_3 \omega_3^2 = 40 \text{ } \omega_3^2$$

и направлено по радиусу к центру колеса.

Полное ускорение

$$w = \sqrt{(w^v)^2 + (w^c)^2}.$$

Значения этих величин для момента времени $t = \tau$ сведены в табл. 28.

Таблица 28

$\omega_3, \text{с}^{-1}$	$\epsilon_3, \text{с}^{-2}$	$v, \text{см/с}$	Ускорение, см/с^2		
			w^v	w^c	w
2,94	3,89	118	156	346	379

Скорость и ускорение точки M показаны на рис. 84.

ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К-4. Определение скоростей точек твердого тела при плоском движении

Найти для заданного положения механизма скорости точек A , B , C и угловые скорости всех его звеньев, если известна угловая скорость кривошипа ω_{OA} .

Схемы механизмов показаны на рис. 85—87, а необходимые данные приведены в табл. 29.

Пример выполнения задания. Дано: 1) схема механизма в заданном положении (рис. 88); 2) исходные данные (табл. 30).

Решение. Скорость точки A направлена перпендикулярно к кривошину OA (рис. 89). Ее модуль

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 40 = 80 \text{ см/с.}$$

Скорость центра B колеса направлена по горизонтали. Находим для звена AB мгновенный центр скорости P_{AB} , восставив перпендикуляры к скоростям точек A и B .

Угловую скорость звена AB определяем по формуле

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB}.$$

Как видно из рис. 89,

$$AP_{AB} = AK / \cos 30^\circ; AK = \sqrt{AB^2 - AD^2};$$

$$AD = OA \cdot \sin 30^\circ = 40 \cdot 0,5 = 20 \text{ см.}$$

Таблица 29

Номер варианта (рис. 85-87)	Размеры, см					$\omega_{OA}^*, \text{ c}^{-1}$	Дополнительные данные
	OA	AB	AD	BC	r		
1	35	65	—	—	15	2	
2	40	40	40	60	—	1,5	
3	22	—	—	24	11	3	$O_1C = 30 \text{ см}$
4	20	50	—	24	—	1	
5	35	—	—	—	15	4	$\omega_I = 1,5 \text{ c}^{-1}$
6	20	60	—	30	—	1,2	
7	30	60	—	30	—	2	$O_1B = 50 \text{ см}$
8	12	—	—	—	—	1,5	
9	14	—	40	45	—	1	$BD = BO_1$
10	15	50	—	25	—	—	$v_o = 80 \text{ см/с}$
11	27	—	—	34	12	2,5	
12	20	25	50	35	—	2	
13	22	44	—	—	15	—	$v_o = 100 \text{ см/с}$
14	60	25	—	35	—	1,4	
15	25	60	—	—	15	1,6	
16	27	—	—	—	12	1,2	$\omega_I = 3 \text{ c}^{-1}$
17	16	—	—	—	8	0,6	
18	22	36	72	25	—	2,4	
19	23	57	—	—	14	1,5	
20	23	56	—	—	—	4	
21	24	24	24	35	—	3	
22	25	—	—	40	10	2	
23	26	—	—	36	12	1	
24	17	12	32	15	—	2,1	
25	28	75	—	15	10	2,5	
26	12	54	25	42	—	2,2	
27	55	—	—	—	10	1,8	
28	25	—	—	30	10	2,3	
29	16	25	50	35	—	2	
30	16	60	—	14	10	1,5	$O_1C = 36 \text{ см}$

П р и м е ч а н и е. Качение колес происходит без скольжения.

* В вариантах 5 и 16 задана также угловая скорость ω_I шестерни I; в вариантах 10 и 13 задана скорость v_o центра O.

Таблица 30

Размеры, см					$\omega_{OA}, \text{ c}^{-1}$
OA	AB	BC	r		
40	80	25	15	2	

Следовательно,

$$AK = \sqrt{80^2 - 20^2} = 77,5 \text{ см};$$

$$AP_{AB} = AK / \cos 30^\circ = 77,5 / 0,866 = 89,6 \text{ см};$$

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB} = 80 / 89,6 = 0,893 \text{ c}^{-1}.$$

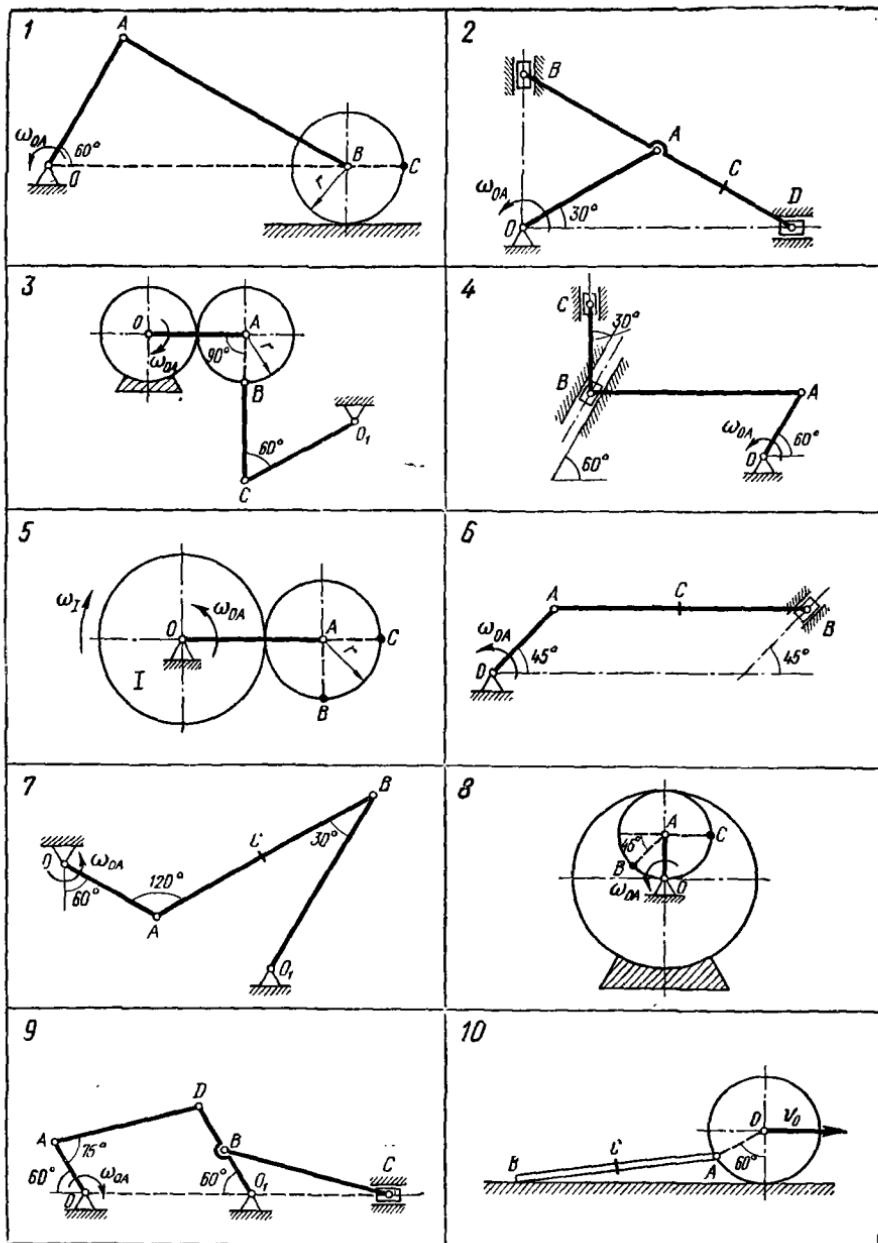
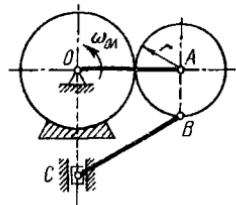
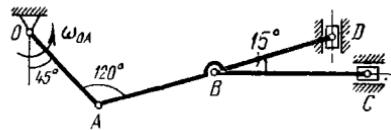


Рис. 85

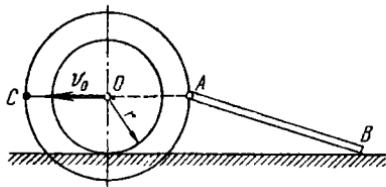
11



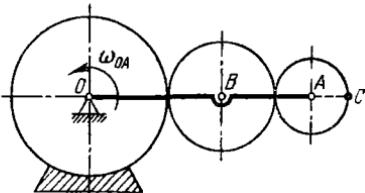
12



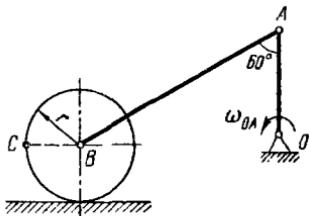
13



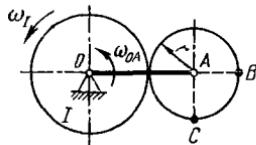
14



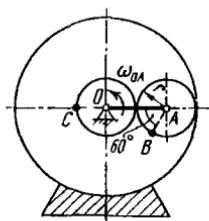
15



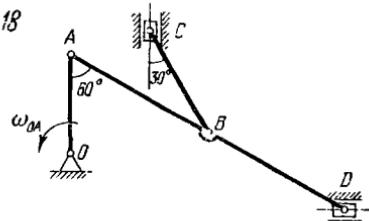
16



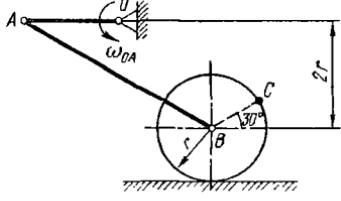
17



18



19



20

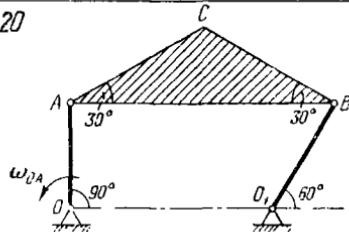
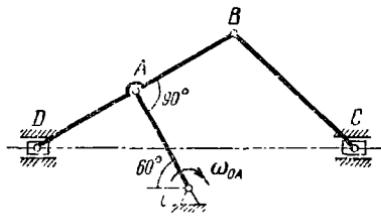
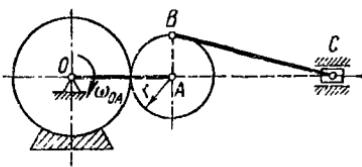


Рис. 86

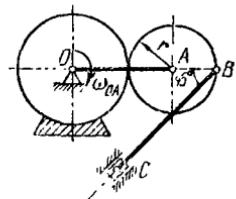
21



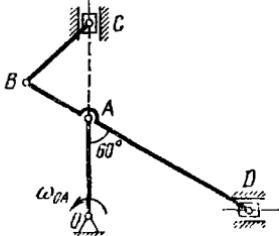
22



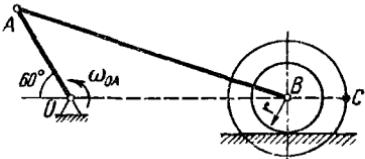
23



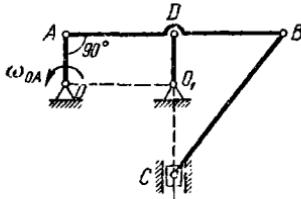
24



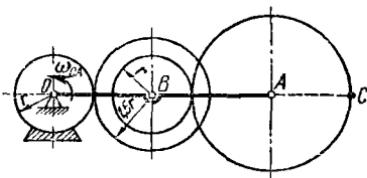
25



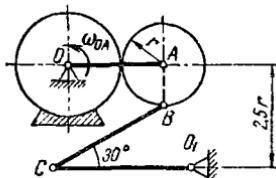
26



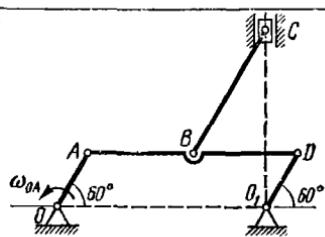
27



28



29



30

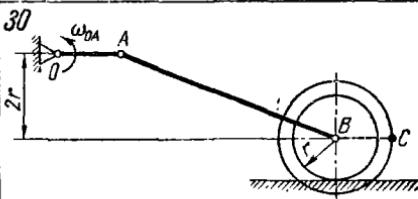


Рис. 87

Скорость центра B колеса определяем как вращательную вокруг мгновенного центра скоростей P_{AB} :

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}.$$

Так как

$$BP_{AB} = (OA + AP_{AB}) \sin 30^\circ$$

или

$$BP_{AB} = (40 + 89,6) \cdot 0,5 = 64,8 \text{ см},$$

то скорость центра колеса

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB} = 0,893 \cdot 64,8 = 57,9 \text{ см/с.}$$

Мгновенный центр скоростей P колеса находится в точке касания этого колеса с неподвижной плоскостью.

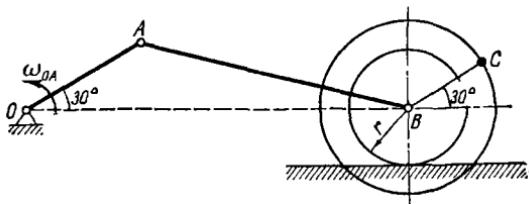


Рис. 88

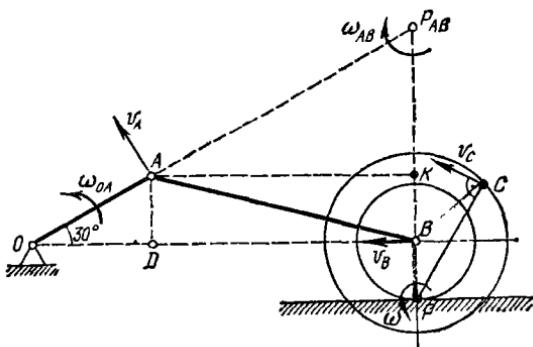


Рис. 89

Угловая скорость колеса

$$\omega = v_B / BP.$$

Так как

$$BP = r = 15 \text{ см}, \text{ то } \omega = 57,9 / 15 = 3,86 \text{ с}^{-1}.$$

Скорость точки C определим как вращательную скорость вокруг мгновенного центра скоростей P :

$$v_C = \omega \cdot CP.$$

По теореме косинусов

$$CP = \sqrt{BP^2 + BC^2 - 2 \cdot BP \cdot BC \cdot \cos 120^\circ}$$

или

$$CP = \sqrt{15^2 + 25^2 + 2 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 0,5} = 35,0 \text{ см.}$$

Следовательно, скорость точки *C*:

$$v_C = \omega \cdot CP = 3,86 \cdot 35,0 = 135 \text{ см/с.}$$

Вектор v_C направлен перпендикулярно к PC в сторону вращения колеса.

Задание К-5. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при плоском движении

Найти для заданного положения механизма скорость и ускорения точек *B* и *C*. Схемы механизмов помещены на рис. 90—92, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 31.

Таблица 31

Номер варианта (рис 90—92)	Размеры, см				$\omega_{OA}, \text{с}^{-1}$	$\omega_f, \text{с}^{-1}$	$\epsilon_{OA}, \text{с}^{-2}$	$v_A, \text{см/с}$	$\omega_A, \text{см/с}^2$
	<i>OA</i>	<i>r</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>					
1	40	15	—	8	2	—	2	—	—
2	30	15	—	8	3	—	2	—	—
3	—	50	—	—	—	—	—	50	100
4	35	—	—	45	4	—	8	—	—
5	25	—	—	20	1	—	—	—	—
6	40	15	—	6	1	—	0	—	—
7	35	—	75	60	5	—	10	—	—
8	—	—	20	10	—	—	—	40	20
9	—	—	45	30	—	—	—	20	10
10	25	—	80	20	1	—	2	—	—
11	—	—	30	15	—	—	—	10	0
12	—	—	30	20	—	—	—	20	20
13	25	—	55	40	2	—	4	—	—
14	45	15	—	8	3	12	0	—	—
15	40	15	—	8	1	—	—	—	—
16	55	20	—	—	2	—	5	—	—
17	—	30	—	10	—	—	—	80	50
18	10	—	10	5	2	—	6	—	—
19	20	15	—	10	1	2,5	0	—	—
20	—	—	20	6	—	—	—	10	15
21	30	—	60	15	3	—	8	—	—
22	35	—	60	40	4	—	10	—	—
23	—	—	60	20	—	—	—	5	10
24	25	—	35	15	2	—	3	—	—
25	20	—	70	20	1	—	2	—	—
26	20	15	—	10	2	1,2	0	—	—
27	—	15	—	5	—	—	—	60	30
28	20	—	50	25	1	—	—	—	—
29	12	—	35	15	4	—	6	—	—
30	40	—	—	20	5	—	10	—	—

Приложения. ω_{OA} и ϵ_{OA} — угловая скорость и угловое ускорение кривошипа *OA* при заданном положении механизма; ω_f угловая скорость колеса *f* (постоянная); v_A и ω_A — скорость и ускорение точки *A*. Качение колес происходит без скольжения.

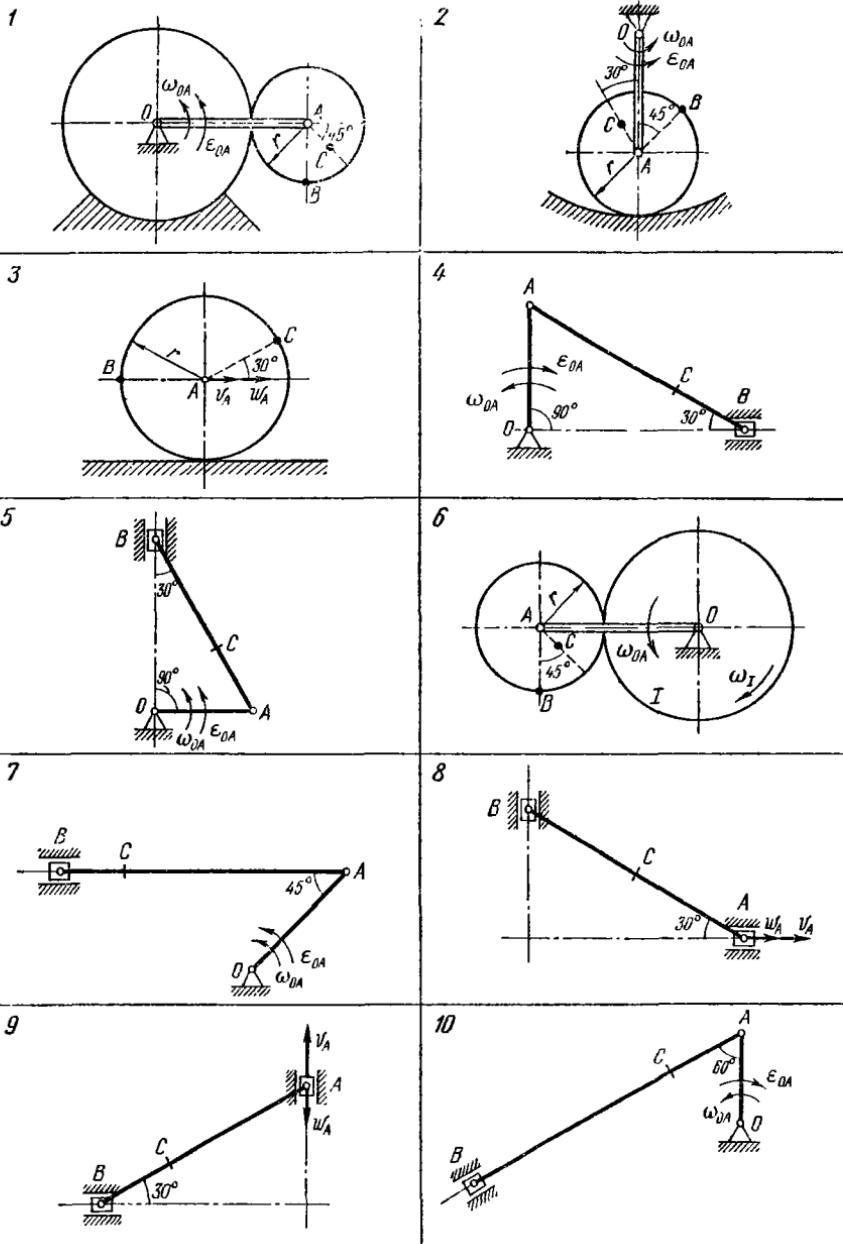


FIG. 90

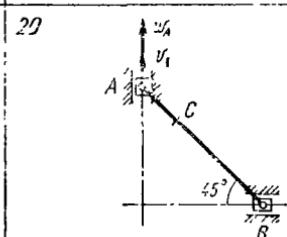
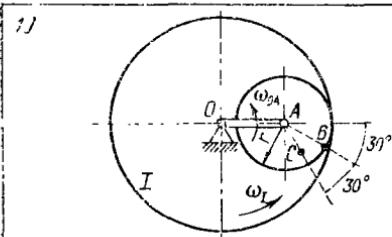
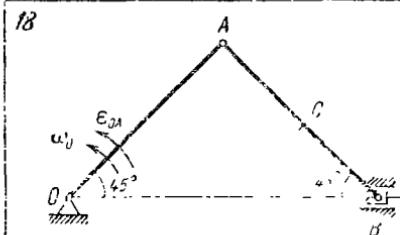
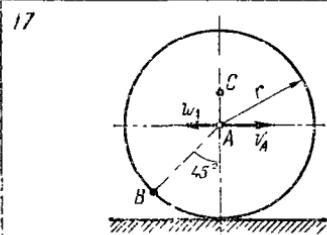
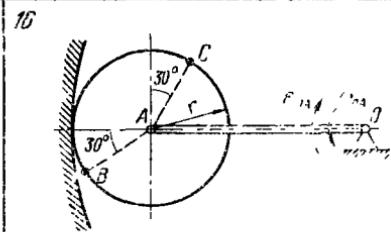
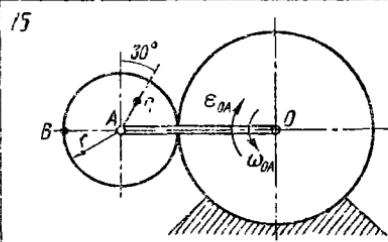
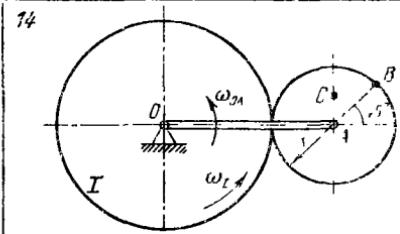
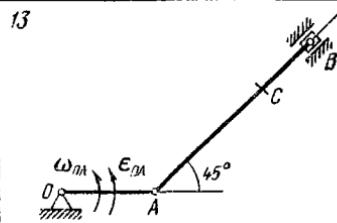
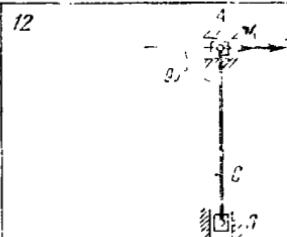
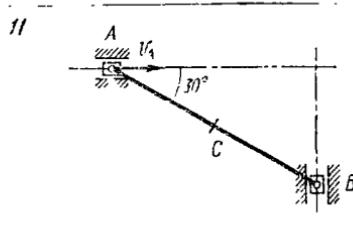
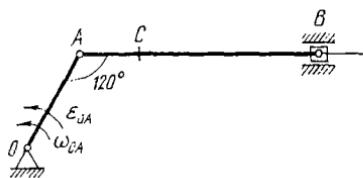
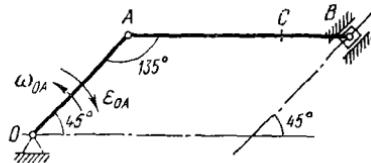


Рис. 91

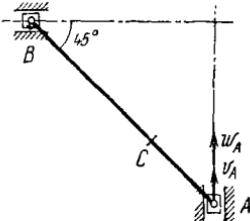
21



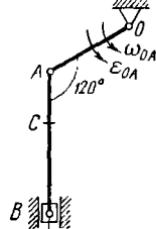
22



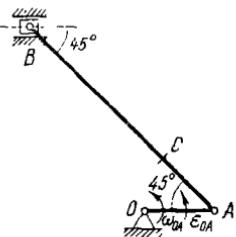
23



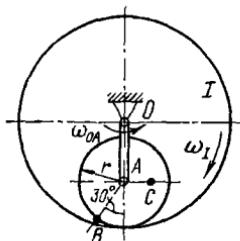
24



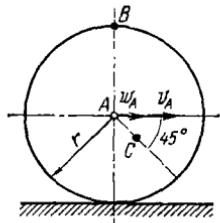
25



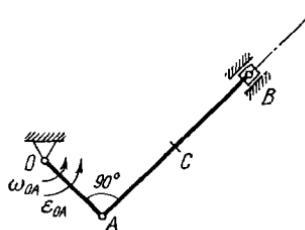
26



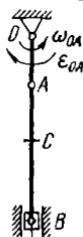
27



28



29



30

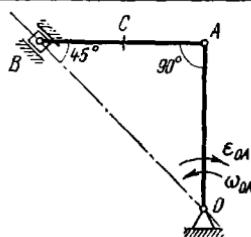


Рис. 92

Пример выполнения задания. Дано: 1) схема механизма в заданном положении (рис. 93); 2) исходные данные (табл. 32).

Таблица 32

Размеры, см			ω_{OA} , с^{-1}	ε_{OA} , с^{-2}
OA	AB	AC		
10	60	20	1,5	2

Решение. 1. *Определение скоростей точек* (рис. 94). Вычисляем скорость пальца A кривошипа OA при заданном положении механизма:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1,5 \cdot 10 = 15 \text{ см/с.}$$

Скорость точки A перпендикулярна к кривошлипу OA . Скорость ползуна B направлена по вертикали. Мгновенный центр скоростей

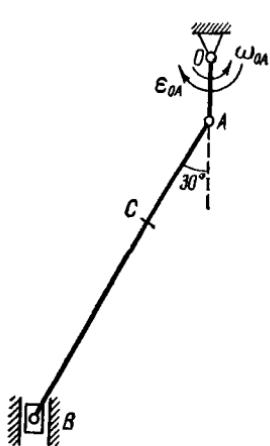


Рис. 93

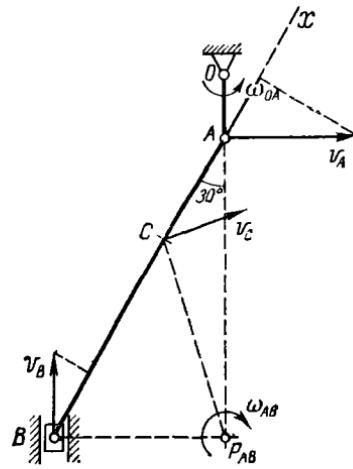


Рис. 94

Пункт P_{AB} шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

Угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = v_A / AP_{AB} = 15 / (60 \cos 30^\circ) = 1/2 \sqrt{3} = 0,29 \text{ с}^{-1}.$$

Скорости точек B и C :

$$v_B = \omega_{AB} \cdot BP_{AB}; \quad v_C = \omega_{AB} \cdot CP_{AB},$$

где

$$BP_{AB} = AB \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot 0,5 = 30,0 \text{ см};$$

$$CP_{AB} = \sqrt{BC^2 + BP_{AB}^2 - 2BC \cdot BP_{AB} \cdot \cos 60^\circ} = \\ = \sqrt{40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot 0,5} = 36,1 \text{ см.}$$

Следовательно,

$$v_B = 0,29 \cdot 30,0 = 8,7 \text{ см/с}; \quad v_C = 0,29 \cdot 36,1 = 10,5 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_C направлен перпендикулярно к отрезку CP_{AB} в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB .

Для проверки определим скорость точки B другим способом. Воспользуемся теоремой о равенстве проекции скоростей точек на ось, проведенную через эти точки.

Направим ось x из точки B вдоль шатуна BA . Имеем:

$$v_A \cos (\vec{v}_A, x) = \\ = v_B \cos (\vec{v}_B, x).$$

Или, как видно из рис. 94:

$$v_A \cos 60^\circ = v_B \cos 30^\circ.$$

Отсюда

$$v_B = v_A \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{15 \cdot 2}{2 \sqrt{3}} = \\ = 5\sqrt{3} = 8,7 \text{ см/с.}$$

Полезно убедиться, что найденная ранее скорость точки C удовлетворяет этой теореме.

2. Определение ускорений точек (рис. 95). Ускорение точки A складывается из вращательного и центростремительного ускорений:

$$\vec{w}_A = \vec{w}_A^b + \vec{w}_A^n;$$

$$w_A^b = \epsilon_{OA} \cdot OA = 2 \cdot 10 = 20 \text{ см/с}^2;$$

$$w_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 1,5^2 \cdot 10 = 22,5 \text{ см/с}^2.$$

Вектор \vec{w}_A^n направлен от A к O . Вектор \vec{w}_A^b перпендикулярен к вектору \vec{w}_A^n и направлен в соответствии с направлением углового ускорения ϵ_{OA} .

Согласно теореме об ускорениях точек плоскости имеем:

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB} + \vec{w}_{AB}^n$$

или

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A^b + \vec{w}_A^n + \vec{w}_{AB}^b + \vec{w}_{AB}^n. \quad (1)$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A :

$$\omega_{AB}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AB = (1/12) \cdot 60 = 5,00 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{\omega}_{AB}^u$ направлен от B к A , а вращательное ускорение $\vec{\omega}_{AB}^v$ перпендикулярно к нему.

Строим многоугольник ускорений. При этом воспользуемся тем, что прямая, по которой направлено ускорение $\vec{\omega}_B$ известна. Ползун B движется по вертикальной прямой, вдоль которой направлено и ускорение точки B . Отложим из точки B последовательно векторы $\vec{\omega}_A^v$ и $\vec{\omega}_A^u$ составляющих ускорений полюса A и центростремительное ускорение $\vec{\omega}_{AB}^u$ (параллельно звену BA). Через конец вектора $\vec{\omega}_{AB}^u$ проводим прямую, параллельную вращательному ускорению $\vec{\omega}_{AB}^v$, т. е. перпендикулярно к AB до пересечения ее прямой, по которой направлено ускорение $\vec{\omega}_B$. Ускорение $\vec{\omega}_B$ определяется как замыкающий вектор многоугольника ускорений (рис. 95, а).

Проектируя векторное равенство (1) на оси x и y , получаем:

$$\omega_B \cos 30^\circ = -\omega_A^v \cos 60^\circ + \omega_A^u \cos 30^\circ + \omega_{AB}^u. \quad (2)$$

$$\omega_B \cos 60^\circ = \omega_A^v \cos 30^\circ + \omega_A^u \cos 60^\circ - \omega_{AB}^u. \quad (3)$$

Из уравнения (2)

$$\omega_B = \frac{-\omega_A^v \cos 60^\circ + \omega_A^u \cos 30^\circ + \omega_{AB}^u}{\cos 30^\circ} = \frac{-20 \cdot 0,5 + 22,5 \cdot 0,866 + 5}{0,866} = 16,7 \text{ см/с}^2.$$

Для определения ускорения точки C найдем угловое ускорение шатуна AB .

Из уравнения (3)

$$\begin{aligned} \omega_{AB}^v &= \omega_A^v \cos 30^\circ + \omega_A^u \cos 60^\circ - \omega_B \cos 60^\circ = \\ &= 20 \cdot 0,866 + 22,5 \cdot 0,5 - 16,7 \cdot 0,5 = 20,2 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Но

$$\omega_{AB}^v = \epsilon_{AB} \cdot AB, \text{ отсюда } \epsilon_{AB} = \omega_{AB}^v / AB = 20,2 / 60 = 0,34 \text{ с}^{-2}.$$

Направление ускорения $\vec{\omega}_{AB}^v$ относительно полюса A определяет направление углового ускорения ϵ_{AB} . В данном случае оно противоположно ω_{AB}^v .

Определяем ускорение точки C :

$$\vec{\omega}_C = \vec{\omega}_A^v + \vec{\omega}_A^u + \vec{\omega}_{AC}^v + \vec{\omega}_{AC}^u.$$

Вращательное и центростремительное ускорения точки C во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A :

$$\omega_{AC}^v = \epsilon_{AB} \cdot AC = 0,34 \cdot 20 = 6,8 \text{ см/с}^2;$$

$$\omega_{AC}^u = \omega_{AB}^2 \cdot AC = (1/12) \cdot 20 = 1,7 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{\omega}_{AC}^u$ перпендикулярен к вектору $\vec{\omega}_{AC}^v$ и направлен соответственно угловому ускорению ϵ_{AB} .

Ускорение точки C находим способом проекций:

$$w_{Cx} = w_A^u + w_A^u \cos 30^\circ - w_A^b \cos 60^\circ = \\ = 1,7 + 22,5 \cdot 0,866 - 20 \cdot 0,5 = 11,2 \text{ см/с}^2; \quad |$$

$$w_{Cy} = w_A^u \cos 60^\circ + w_A^b \cos 30^\circ - w_A^b = \\ = 22,5 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,866 - 6,8 = 21,8 \text{ см/с}^2;$$

$$w_C = \sqrt{w_{Cx}^2 + w_{Cy}^2} = \sqrt{11,2^2 + 21,8^2} = 24,5 \text{ см/с}^2$$

(рис. 95, б).

Задание К-6. Определение скоростей и ускорений точек многозвездного механизма

Приняв угловую скорость ω_0 кривошипа O_1A постоянной и равной 2 с^{-1} определить для заданного положения механизма:

- 1) скорости точек A, B, C, \dots механизма и угловые скорости всех его звеньев при помощи плана скоростей;
- 2) скорости этих же точек механизма и угловые скорости звеньев при помощи мгновенных центров скоростей;
- 3) ускорения точек A и B и угловое ускорение звена AB ;
- 4) положение мгновенного центра ускорений звена AB ;
- 5) ускорение точки M , делящей звено AB пополам.

Схемы механизмов показаны на рис. 96—99, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 33.

Пример выполнения задания. Дано: 1) схема механизма в заданном положении (рис. 100), 2) исходные данные (табл. 34).

Решение 1. *Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма при помощи плана скоростей.*

а) **Определение скоростей точек.** Строим схему механизма в выбранном масштабе (рис. 101). Вычисляем модуль скорости пальца A кривошипа O_1A :

$$v_A = \omega_{O_1A} \cdot O_1A = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_A перпендикулярен к O_1A и направлен в сторону вращения кривошипа.

Строим план скоростей. Из произвольно выбранного полюса проводим луч Oa , изображающий в выбранном масштабе скорость точки A . Для определения скорости точки B через полюс O проводим прямую, параллельную скорости \vec{v}_B , через точку a — прямую, перпендикулярную к AB . Получаем точку b ; отрезок Ob определяет скорость точки B . Измеряем длину луча Ob и, пользуясь масштабом скоростей, находим $v_B = 17,5 \text{ см/с.}$

Для определения скорости точки C делим отрезок ab плана скоростей в отношении

$$ac/cb = AC/CB.$$

Луч Oc изображает скорость точки C . Пользуясь масштабом скоростей, получаем

$$v_C = 17,5 \text{ см/с.}$$

Таблица 33

Номер варианта (рис. 96—99)	Ф, град	Расстояния, см						Длины зенитов, см									
		a	b	c	d	e	f	O ₁ A	O ₂ B	O ₃ D	O ₄ F	AB	BC	CD	CE	DE	EF
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	200	18	23	22	25	—	—	14	28	—	20	—	21	48	38	—	42
2	60	56	10	26	54	35	—	21	25	15	15	12	19	69	35	—	32
3	90	15	25	15	23	—	—	15	28	—	—	—	21	47	26	—	31
4	155	26	19	19	10	22	—	12	15	15	15	15	19	38	—	—	22
5	125	65	49	—	—	—	—	15	29	—	—	—	50	25	23	—	39
6	60	65	49	42	11	7	24	16	34	—	—	—	41	25	42	21	49
7	250	11	42	14	15	30	30	14	29	—	—	—	23	15	15	45	29
8	90	27	18	20	28	—	—	21	21	15	25	—	24	65	62	—	17
9	200	23	19	20	25	—	—	14	29	—	—	—	25	70	33	—	12
10	20	55	21	30	—	28	—	21	21	—	—	—	45	70	35	—	37
11	50	50	30	86	—	32	—	15	15	—	—	—	60	30	19	—	49
12	55	10	86	—	—	—	—	21	15	—	—	—	45	30	19	—	50
13	315	17	54	40	6	18	—	15	15	31	15	20	—	40	22	—	50
14	0	28	40	31	15	—	—	—	—	—	—	—	20	15	19	—	—
15	220	46	36	22	15	37	—	—	—	—	—	—	25	78	41	—	—
16	40	36	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	45	20	15	—	50
17	145	96	—	9	—	—	—	—	—	—	—	—	84	20	15	—	—
18	45	70	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	45	30	17	—	57
19	40	42	39	—	—	—	—	—	—	—	—	—	38	17	17	—	35
20	145	27	24	30	—	—	—	—	—	—	—	—	30	80	32	—	38
21	115	46	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	45	20	15	—	40
22	305	46	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	38	30	15	—	38
23	130	31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30	17	16	—	30
24	115	36	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	50	11	45	—	44
25	325	72	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	36	76	46	—	51
26	215	36	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	30	19	46	—	29
27	140	71	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	50	16	33	—	50
28	215	30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16	19	24	—	36
29	180	35	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	10	15	16	—	33
30	25	46	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	16	75	11	—	26

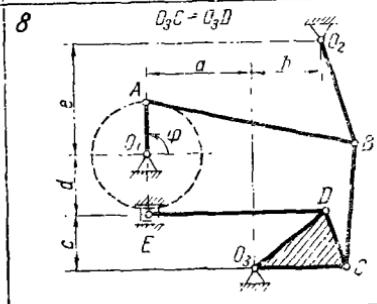
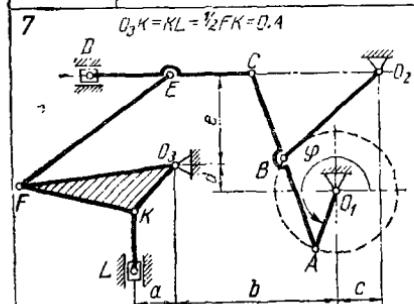
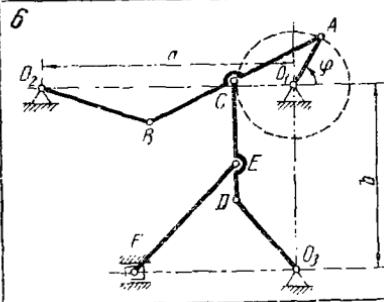
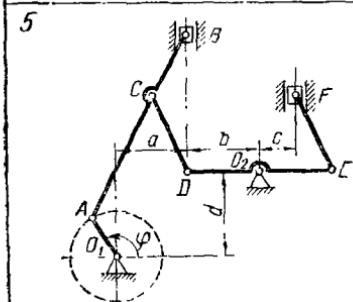
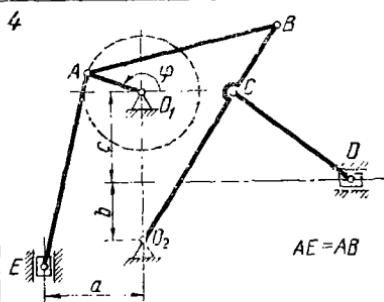
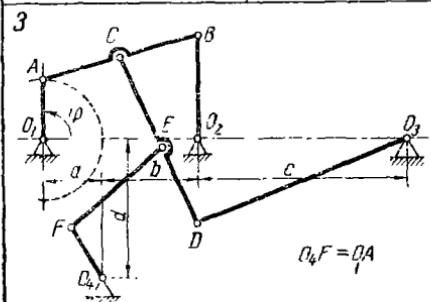
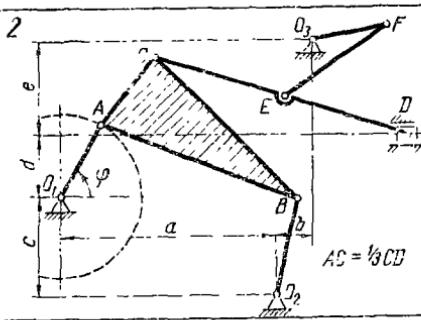
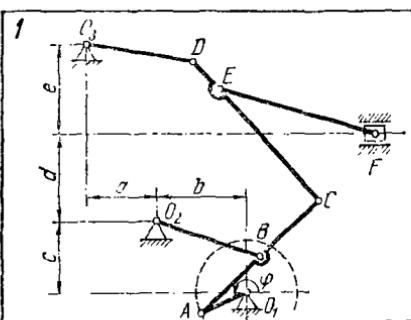


Рис. 96

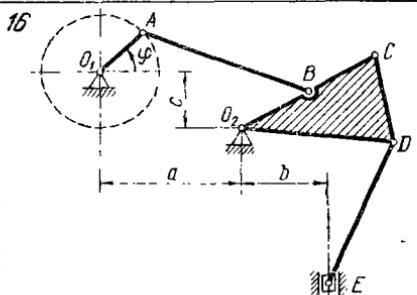
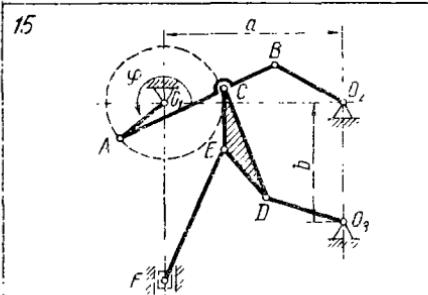
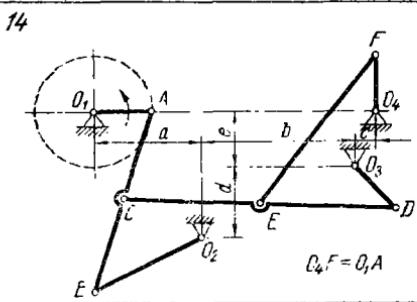
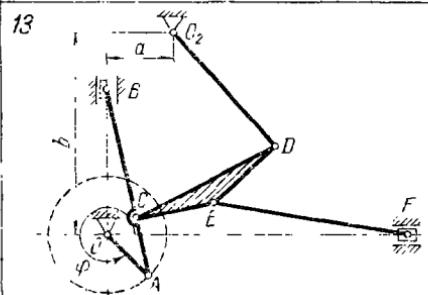
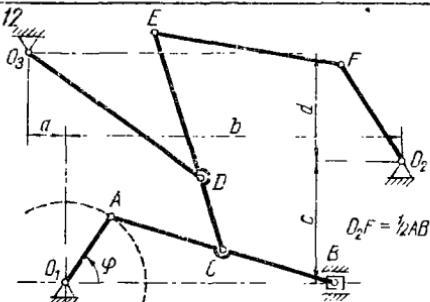
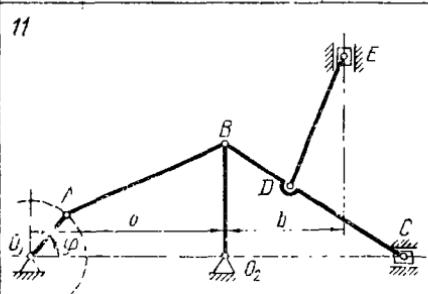
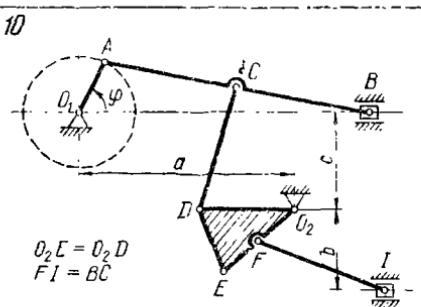
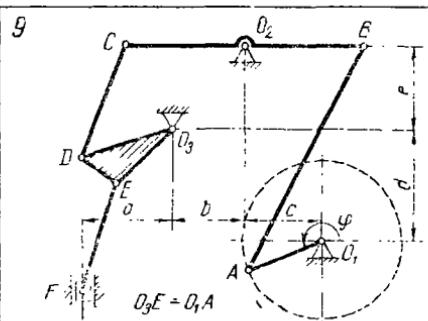
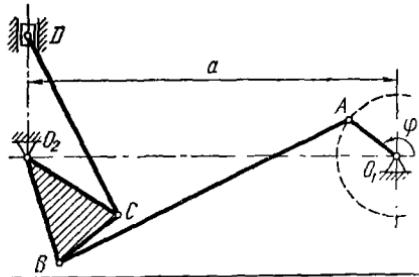


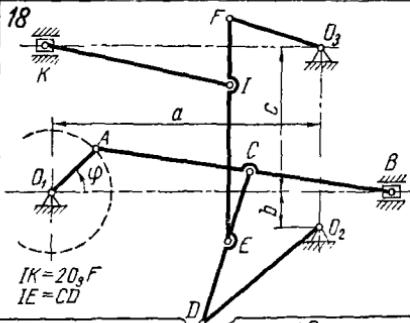
FIG. 97

17

$$O_2C = O_2B$$

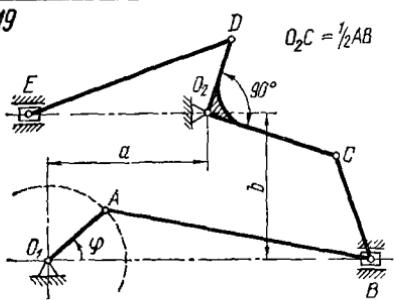


18

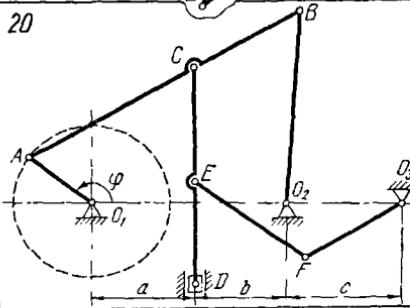


19

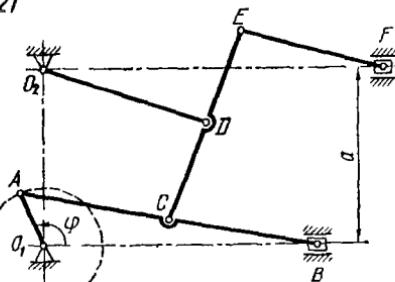
$$O_2C = \frac{1}{2}AB$$



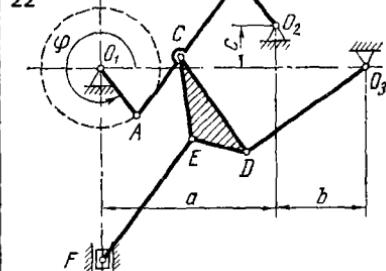
20



21

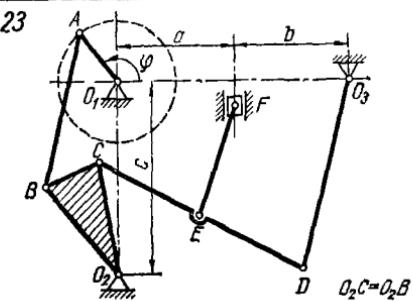


22



23

$$O_2C = O_2B$$



24

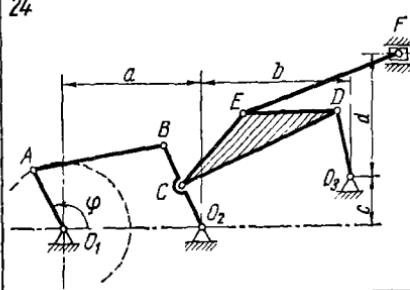
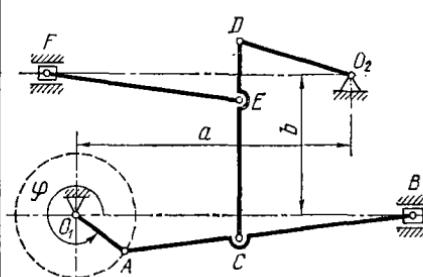
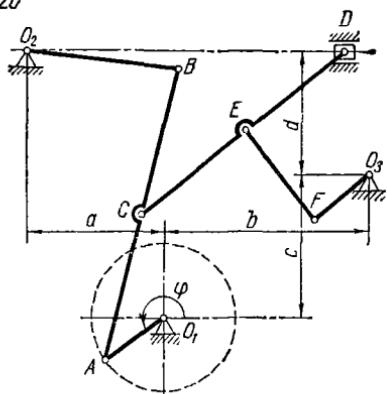


Рис. 98

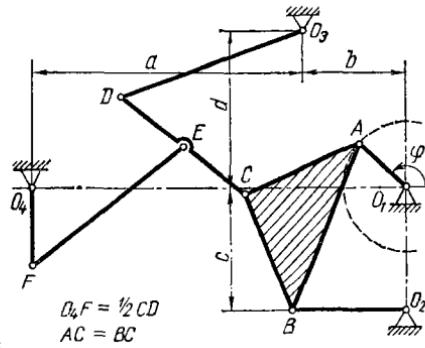
25



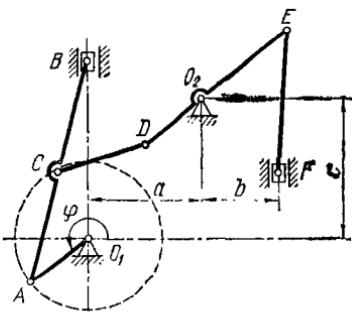
26



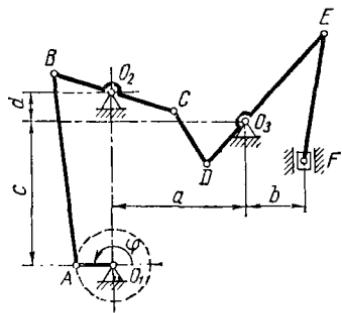
27



28



29



30

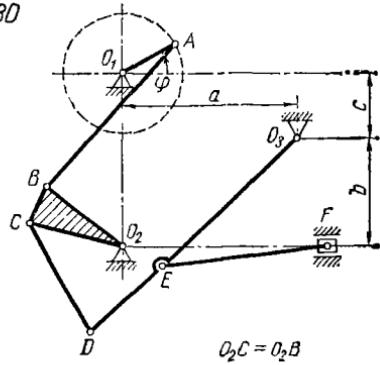


Рис. 99

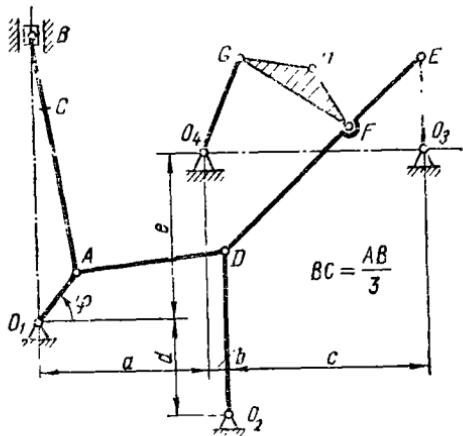


Рис. 100

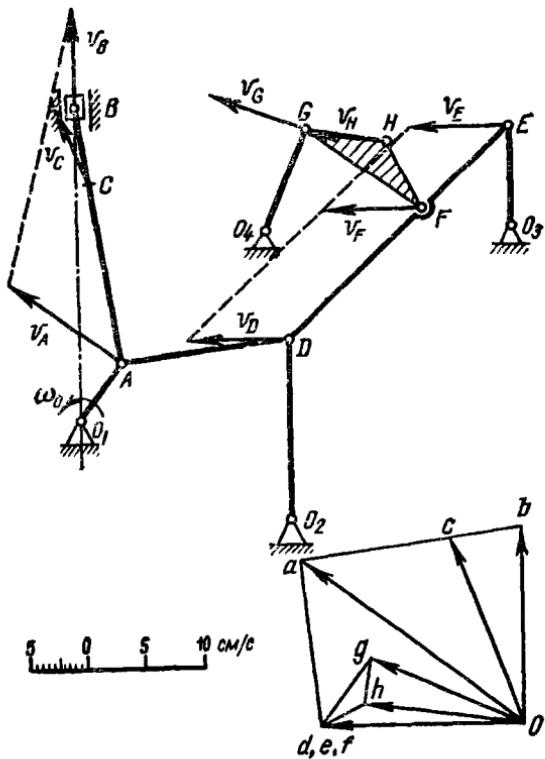


Рис. 101

Таблица 34

Ф. зрал	Расстояние, см					Через звенья, см									
	a	b	c	d	e	O ₁ A	AB	AD	O ₂ D	DE	O ₃ E	FG	GH	FH	O ₄ G
52	32	4	39	19	32	12	46	29	32	53	18	25	14	14	20

Таблица 35

Способ определения	Скорости точек, см/с							
	A	B	C	D	E	F	G	H
По плану скоростей	24	17,5	17,5	17,5	17,5	17,5	14,8	14,4
При помощи мгновенных центров скоростей	24	17,3	17,5	17,4	17,4	17,4	14,6	14,1

Продолжая построение плана скоростей, находим скорости точек D, E, F, G и H (табл. 35).

На чертеже механизма концы векторов скоростей точек прямолинейного звена (например, A, B, C или D, E, F) находятся на одной прямой.

б) Определение угловых скоростей звеньев механизма. Отрезок ab плана скоростей выражает вращательную скорость точки B вокруг точки A:

$$ab = v_{AB} = \omega_{AB} \cdot AB,$$

отсюда угловая скорость звена AB

$$\omega_{AB} = ab/AB = 19,5/46 = 0,424 \text{ с}^{-1}.$$

Аналогично определяем угловые скорости звеньев AD, DE, FGH:

$$\omega_{AD} = ad/AD = 14,5/29 = 0,5 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{DE} = de/DE = 0/DE = 0;$$

$$\omega_{FGH} = fg/FG = 6,8/25 = 0,272 \text{ с}^{-1}.$$

Угловую скорость ω_{FHN} можно определить и следующим образом:

$$\omega_{FHN} = gh/GH = fh/FH.$$

Угловая скорость звена O₂D определяется по вращательной скорости точки D вокруг неподвижного центра O₂

$$\omega_{O_2D} = v_D/O_2D = 17,5/32 = 0,547 \text{ с}^{-1}.$$

Аналогично определяем угловые скорости звеньев O₃E, O₄G:

$$\omega_{O_3E} = v_E/O_3E = 17,5/18 = 0,972 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{O_4G} = \frac{v_G}{O_4G} = \frac{14,8}{20} = 0,740 \text{ с}^{-1}.$$

Таблица 36

Способ определения	Угловые скорости звеньев, с ⁻¹							
	AB	AD	DE	O ₂ D	O ₃ E	FGH	O ₄ G	
По плану скоростей	0,424	0,500	0	0,547	0,972	0,272	0,740	
При помощи мгновенных центров скоростей	0,421	0,505	0	0,544	0,967	0,278	0,730	

Полученные угловые скорости звеньев механизма сведены в табл. 36.

2. Определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев механизма при помощи мгновенных центров скоростей.

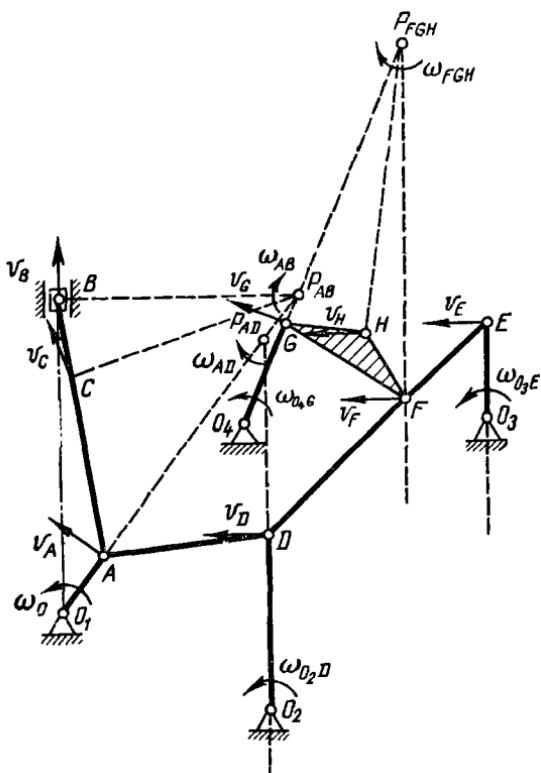


Рис. 102

а) Определение положения мгновенных центров скоростей звеньев механизма. Строим механизм в выбранном масштабе (рис. 102). Звенья O_1A , O_2D , O_3E , O_4G врачаются вокруг неподвижных центров O_1 , O_2 , O_3 , O_4 .

Мгновенный центр скоростей P_{AB} звена AB находится как точка пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их

скоростям. Аналогично определяется положение мгновенных центров скоростей P_{AD} и P_{FGH} . Мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности.

б) Определение скоростей точек. Скорость точки A

$$v_A = \omega_0 \cdot O_1 A = 2 \cdot 12 = 24 \text{ см/с.}$$

Скорости точек звена AB пропорциональны расстояниям от точек до мгновенного центра скоростей P_{AB} :

$$v_A/v_B = P_{AB}A/P_{AB}B; \quad v_A/v_C = P_{AB}A/P_{AB}C.$$

Расстояния от точек до мгновенного центра скоростей измеряются на чертеже. Пользуясь масштабом длин, получаем:

$$P_{AB}A = 57 \text{ см}; \quad P_{AB}B = 41 \text{ см}; \quad P_{AB}C = 41,5 \text{ см.}$$

Определяем скорости точек B и C :

$$v_B = v_A \cdot P_{AB}B/P_{AB}A = 24 \cdot 41/57 = 17,3 \text{ см/с;}$$

$$v_C = v_A \cdot P_{AB}C/P_{AB}A = 24 \cdot 41,5/57 = 17,5 \text{ см/с.}$$

Для определения скорости точки D воспользуемся пропорцией

$$v_A/v_D = P_{AD}A/P_{AD}D;$$

$$v_D = v_A \cdot P_{AD}D/P_{AD}A = 24 \cdot 34,5/47,5 = 17,4 \text{ см/с.}$$

Так как мгновенный центр скоростей звена DE находится в бесконечности, то $v_E = v_F = v_D = 17,4 \text{ см/с.}$

Для определения скоростей точек G и H имеем следующие пропорции:

$$v_F/v_G = P_{FAG}F/P_{FAG}G;$$

$$v_F/v_H = P_{FAG}F/P_{FAG}H,$$

отсюда

$$v_G = v_F \cdot P_{FAG}G/P_{FAG}H = 17,4 \cdot 52,8/62,7 = 14,6 \text{ см/с;}$$

$$v_H = v_F \cdot P_{FAG}H/P_{FAG}F = 17,4 \cdot 50,8/62,7 = 14,1 \text{ см/с.}$$

Полученные скорости приведены в табл. 35.

Одновременно с определением модулей скоростей точек находим их направления, а также направления вращений звеньев механизма. Например, по направлению скорости точки A и положению мгновенного центра скоростей P_{AB} устанавливаем, что вращение звена AB происходит по часовой стрелке. Поэтому скорость точки B при данном положении механизма направлена вверх.

Аналогично определяем направления вращений остальных звеньев и направления скоростей точек механизма (см. рис. 102).

в) Определение угловых скоростей звеньев механизма. Скорость любой точки звена равна произведению угловой скорости этого звена на расстояние от точки до мгновенного центра скоростей:

$$v_A = \omega_{AB} \cdot P_{ABA} = \omega_{AD} \cdot P_{ADA},$$

отсюда определяем угловые скорости звеньев AB и AD

$$\omega_{AB} = v_A/P_{AB}A = 24/57 = 0,421 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{AD} = v_A/P_{AD}A = 24/47,5 = 0,505 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость звена O_2D определяется по скорости точки D

$$\omega_{O_2D} = v_D/O_2D = 17,4/32 = 0,544 \text{ с}^{-1}.$$

Угловая скорость звена DE' при данном положении механизма равна нулю, так как мгновенный центр скоростей звена в этом случае находится в бесконечности:

$$\omega_{DE'} = 0.$$

Аналогично определяем угловые скорости стальных звеньев механизма:

$$\omega_{O_3E} = v_E/O_3E = 17,4/18 = 0,967 \text{ с}^{-1},$$

$$\omega_{FGH} = v_F/P_{FGH}F = 17,4/62,7 = 0,278 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega_{O_4G} = v_G/O_4G = 14,6/20 = 0,730 \text{ с}^{-1}.$$

Полученные угловые скорости приведены в табл. 36.

3. Определение ускорений точек A , B , D^* и угловых ускорений звеньев AB и BD .

а) Определение $\vec{\omega}_A$, $\vec{\omega}_B$ и ϵ_{AB} (рис. 103). Определяем ускорение точки B при помощи теоремы об ускорениях точек плоской фигуры:

$$\ddot{\omega}_B = \ddot{\omega}_A + \ddot{\omega}_{AB}^n + \ddot{\omega}_{AB}^b.$$

Так как кривошип O_1A вращается равномерно, то ускорение точки A направлено к центру O_1 и равно:

$$\omega_A = \omega_A^n = O_1A \cdot \omega_0^2 = 12 \cdot 2^2 = 48 \text{ см/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки B во вращательном движении шатуна AB вокруг полюса A направлено от точки B к точке A и равно:

$$\omega_{AB}^n = AB \cdot \omega_{AB}' = 46 \cdot 0,4^2 = 7,36 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки B в соответствующем масштабе ускорение полюса $\vec{\omega}_A$. Из конца вектора $\vec{\omega}_A$ строим вектор $\vec{\omega}_{AB}^n$, проводя его параллельно BA . Через конец вектора $\vec{\omega}_{AB}^n$ проводим прямую, перпендикулярную BA , т. е. параллельную вращательному ускорению $\vec{\omega}_{AB}^b$. Точка пересечения этой прямой с прямой, по которой направлен вектор ускорения ползуна B , определяет концы векторов $\vec{\omega}_B$ и $\vec{\omega}_{AB}^b$.

* Условие задания предусматривает определение ускорений точек A , B и углового ускорения звена AB . Однако в примере определяются также ускорение точки D и угловое ускорение звена AD в соответствии с двумя случаями, встречающимися в задачах такого типа.

Измерением на чертеже получаем

$$\omega_B = 39 \text{ см/с}^2; \quad \omega_{AB}^B = 30 \text{ см/с}^2.$$

Так как $\omega_{AB}^B = AB \cdot \epsilon_{AB}$, то угловое ускорение звена AB

$$\epsilon_{AB} = \omega_{AB}^B / AB = 30/46 = 0,652 \text{ с}^{-2}.$$

б) Определение $\vec{\omega}_D$ и ε_{AB} (рис. 104). Точка D принадлежит двум звеньям — AD и O_2D . Взяв на полюс точку A , имеем

$$\vec{\omega}_D = \vec{\omega}_A + \vec{\omega}_{AD}^u + \vec{\omega}_{AD}^B.$$

Ускорение точки A найдено выше:

$$\omega_A = 48 \text{ см/с}^2.$$

Центростремительное ускорение точки D во вращательном движении звена AD вокруг полюса A направлено от точки D к точке A и равно:

$$\omega_{AD}^u = AD \cdot \omega_A^2 = 28,5 \cdot 0,5^2 = 7,1 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем из точки D в соответствующем масштабе ускорение полюса ω_A . Из конца вектора $\vec{\omega}_A$ строим вектор $\vec{\omega}_{AD}^u$, проведя

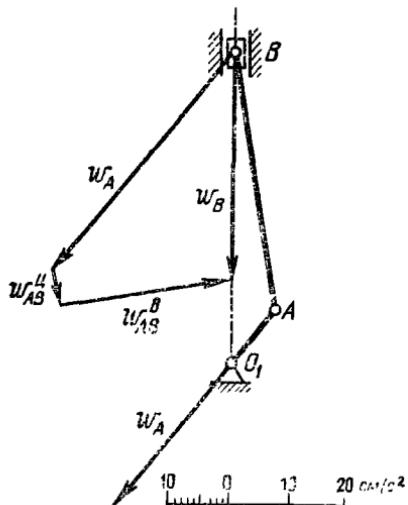


Рис. 103

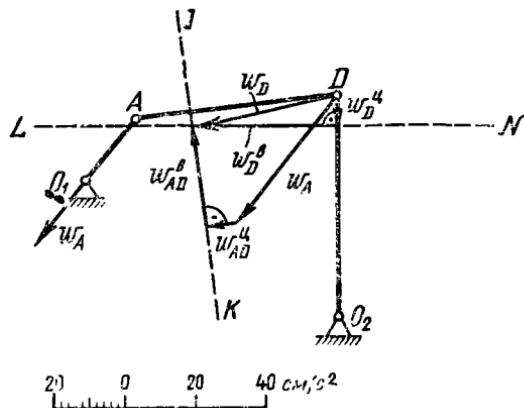


Рис. 104

его параллельно DA . Через конец вектора $\vec{\omega}_{AD}^u$ проводим прямую JK перпендикулярно к DA , т. е. параллельно вращательному ускорению $\vec{\omega}_{AD}^B$. Однако определить ускорение $\vec{\omega}_D$ этим построением невозможно, так как его направление неизвестно.

Чтобы найти ускорение точки D , необходимо выполнить второе построение, рассматривая эту точку как принадлежащую звену O_2D .

В этом случае

$$\vec{w}_D = \vec{w}_D^u + \vec{w}_D^b.$$

Центростремительное ускорение точки D

$$w_D^u = O_2 D \cdot \omega_{O_2 D}^2 = 32 \cdot 0,5^2 = 8 \text{ см/с}^2.$$

Откладываем от точки D вектор \vec{w}_D^u , направив его к центру O_2 . Через конец вектора \vec{w}_D^u проводим прямую LN перпендикулярно к $O_2 D$, т. е. параллельно вращательному ускорению \vec{w}_D^b . Точка пересечения этой прямой с JK определяет концы векторов \vec{w}_D , \vec{w}_{AD} и \vec{w}_D^b .

Измерением на чертеже получаем

$$w_D = 42 \text{ см/с}^2,$$

$$w_{AD}^b = 30 \text{ см/с}^2.$$

Так как

$$w_{AD}^b = AD \cdot \varepsilon_{AD},$$

то угловое ускорение звена AD

$$\begin{aligned} \varepsilon_{AD} &= w_{AD}^b / AD = \\ &= 30 / 29 = 1,03 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

4. Определение положения мгновенного центра ускорения точку A за полюс. Тогда

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}.$$

Рис. 105

ний звена AB (рис. 105). Примем ускорение точки B

$$\vec{w}_B = \vec{w}_A + \vec{w}_{AB}.$$

Строим параллелограмм ускорений при точке B по диагонали \vec{w}_B и стороне \vec{w}_A . Сторона параллелограмма \vec{w}_{AB} выражает ускорение точки B во вращении AB вокруг полюса A . Ускорение \vec{w}_{AB} составляет с отрезком AB угол α , который можно измерить на чертеже.

Направление вектора \vec{w}_{AB} относительно полюса A позволяет определить направление ε_{AB} , в данном случае соответствующее направлению вращения часовой стрелки. Отложив угол α от векторов \vec{w}_A и \vec{w}_B в этом направлении и проводя две полупрямые, найдем точку их пересечения Q_{AB} — мгновенный центр ускорений звена AB .

5. Определение ускорения точки M . Найдем ускорение точки M при помощи мгновенного центра ускорений.

Ускорения точек плоской фигуры пропорциональны их расстояниям до мгновенного центра ускорений. Следовательно,

$$w_M = w_A \cdot MQ_{AB} / AQ_{AB} = 48 \cdot 67,5 / 77 = 42,1 \text{ см/с}^2.$$

Расстояния MQ_{AB} и AQ_{AB} определены путем измерения на чертеже. Ускорение \vec{w}_M (рис. 105) составляет с прямой MQ_{AB} угол α ; направление этого вектора соответствует угловому ускорению ε_{AB} .

СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание К-7. Определение кинематических характеристик движения твердого тела и его точек по уравнениям Эйлера

Заданы уравнения сферического движения твердого тела: $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$ и $\varphi = \varphi(t)$, где ψ , θ и φ — углы Эйлера (рис. 106).

Определить для момента времени $t = t_1$ угловую скорость и угловое ускорение тела, а также скорость и ускорение точки M , координаты которой в подвижной системе, жестко связанной с телом ξ , η , ζ .

Необходимые данные приведены в табл. 37.

Пример выполнения задания

Исходные данные: $\psi = 2t^2 + 3t$ рад, $\theta = \pi/6$ рад, $\varphi = 24t$ рад, $\xi = 3$ см, $\eta = 2$ см, $\zeta = 5$ см, $t_1 = 1$ с.

Решение. 1. *Определение угловой скорости тела.* Проекции угловой скорости тела на подвижные оси координат определяются по следующим формулам:

$$\omega_\xi = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi;$$

$$\omega_\eta = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi;$$

$$\omega_\zeta = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}.$$

Имея в виду, что в рассматриваемом случае

$$\psi = 4t + 3; \quad \dot{\theta} = 0; \quad \dot{\varphi} = 24; \quad \sin \theta = \sin(\pi/6) = 0,5;$$

$$\cos \theta = \cos(\pi/6) = 0,866,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} \omega_\xi &= (4t + 3) 0,5 \sin 24t; \\ \omega_\eta &= (4t + 3) 0,5 \cos 24t; \\ \omega_\zeta &= (4t + 3) 0,866 + 24. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Проекции угловой скорости на неподвижные оси координат:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi;$$

$$\omega_y = -\dot{\psi} \cos \psi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \psi;$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi};$$

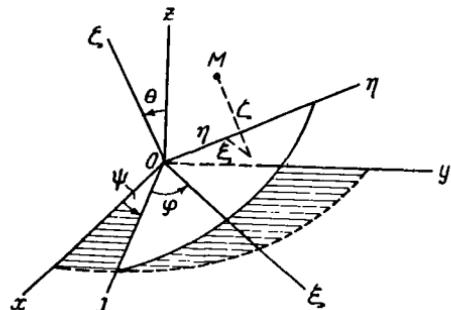


Рис. 106

Таблица 37

Номер варианта	Уравнения движения тела			Координаты точки M см			t_1 , с
	$\psi = \psi(t)$, рад	$0 = \theta(t)$, рад	$\varphi = \varphi(t)$, рад	ξ	η	ζ	
1	$3t^2 + 6t$	$\pi/3$	$4t$	2	5	4	1
2	$2t$	$(\pi/6) \sin 2t$	$25t$	3	1	2	2
3	$-4t$	$(\pi/4) \cos 3t$	$15t$	4	-3	5	1
4	$2t^2 + 3t$	$\pi/6$	$-2t$	-2	4	4	3
5	$4t^2$	$-\pi/4$	$20t$	3	2	-3	2
6	$3t$	$(\pi/3) \cos 4t$	$6t$	2	3	2	1
7	$4t^2 - 2t$	$\pi/4$	$-20t$	6	2	3	0,5
8	$t^2 + 4t$	$\pi/3$	$18t$	7	4	1	1
9	$-3t^2 + 2t$	$\pi/6$	$30t$	-4	5	3	2
10	$5t$	$(\pi/3) \cos 2t$	$10t$	5	3	3	0,5
11	$-2t$	$(\pi/4) \sin 3t$	$-12t$	4	-2	4	2
12	$2t^2 - 4t$	$-\pi/4$	$15t$	-6	4	2	1
13	$3t^2 + 2t$	$-\pi/3$	$24t$	3	10	5	0,5
14	$-3t$	$(\pi/6) \sin 8t$	$-30t$	10	-4	3	1
15	$-4t^2 + 3t$	$\pi/4$	$16t$	9	5	5	2
16	$2t$	$(\pi/3) \cos 6t$	$3t$	6	8	10	1
17	$-2t^2 + 5t$	$\pi/5$	$5t$	1	3	-2	1
18	$4t^2 + 3t$	$\pi/9$	$25t$	7	5	4	0,5
19	$t^2 - 2t$	$-\pi/6$	$-4t$	5	4	3	2
20	$4t$	$(\pi/5) \cos 3t$	$18t$	-3	2	1	2
21	$-5t$	$(\pi/4) \sin 6t$	$12t$	8	6	10	1
22	$-2t^2 - 2t$	$-\pi/5$	$2t$	4	-1	3	4
23	$3t^2 - 2t$	$\pi/4$	$-5t$	-5	7	4	3
24	$2t$	$-(\pi/5) \sin 3t$	$-30t$	10	8	-6	1
25	$-t$	$(\pi/9) \cos 8t$	$18t$	7	4	5	2
26	$3t$	$(\pi/3) \sin 2t$	$10t$	-2	1	3	1
27	$-3t^2 + 4t$	$-\pi/9$	$5t$	8	9	6	2
28	$-5t$	$-(\pi/3) \sin 3t$	$8t$	4	-2	-2	2
29	t	$(\pi/4) \cos 6t$	$9t$	7	6	10	3
30	$-3t$	$(\pi/6) \cos 4t$	$-15t$	6	8	5	1

или в данном случае

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= 24 \cdot 0,5 \sin(2t^2 + 3t); \\ \omega_y &= -24 \cdot 0,5 \cos(2t^2 + 3t); \\ \omega_z &= 24 \cdot 0,866 + 4t + 3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Для определения угловой скорости тела при $t = 1$ с предварительно вычисляем

$$\sin 24t = \sin 24 = \sin(8\pi - 1,133) = \sin(-1,133) = -0,906;$$

$$\cos 24t = \cos 24 = \cos(-1,133) = 0,424,$$

$$\sin(2t^2 + 3t) = \sin 5 = \sin(2\pi - 1,283) = \sin(-1,283) = -0,959;$$

$$\cos(2t^2 + 3t) = \cos 5 = \cos(-1,283) = 0,284.$$

Тогда согласно (1) и (2)

$$\omega_\xi = 7 \cdot 0,5 (-0,906) = -3,17 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_\eta = 7 \cdot 0,5 \cdot 0,424 = 1,48 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_\zeta = 7 \cdot 0,866 + 24 = 30,1 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_x = -24 \cdot 0,5 \cdot 0,959 = -11,5 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_y = -24 \cdot 0,5 \cdot 0,284 = -3,41 \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_z = 24 \cdot 0,866 + 7 = 27,8 \text{ c}^{-1}.$$

Модуль угловой скорости

$$\omega = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{(-3,17)^2 + 1,48^2 + 30,1^2} = \sqrt{918} = 30,3 \text{ c}^{-1}$$

или

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} = \sqrt{(-11,5)^2 + (-3,41)^2 + 27,8^2} = \sqrt{917} = 30,3 \text{ c}^{-1}.$$

Модуль угловой скорости тела можно определить и, минуя вычисление ее проекций на оси координат, по формуле

$$\omega = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + 2\psi\dot{\phi}\cos\theta}.$$

В данном случае

$$\omega = \sqrt{7^2 + 24^2 + 2 \cdot 7 \cdot 24 \cdot 0,866} = \sqrt{916} = 30,3 \text{ c}^{-1}.$$

Направление угловой скорости, а следовательно, и мгновенной оси вращения тела можно определить направляющими косинусами.

В подвижной системе координат

$$\cos(\vec{\omega}, \xi) = \omega_\xi/\omega = -3,17/30,3 = -0,105;$$

$$\cos(\vec{\omega}, \eta) = \omega_\eta/\omega = 1,48/30,3 = 0,049;$$

$$\cos(\vec{\omega}, \zeta) = \omega_\zeta/\omega = 30,1/30,3 = 0,993.$$

В неподвижной системе

$$\cos(\vec{\omega}, x) = \omega_x/\omega = -11,5/30,3 = -0,380;$$

$$\cos(\vec{\omega}, y) = \omega_y/\omega = -3,41/30,3 = -0,113;$$

$$\cos(\vec{\omega}, z) = \omega_z/\omega = 27,8/30,3 = 0,917.$$

2. *Определение углового ускорения тела.* Проекции углового ускорения тела на подвижные оси координат определяются следующим образом:

$$\epsilon_\xi = \dot{\omega}_\xi; \quad \epsilon_\eta = \dot{\omega}_\eta; \quad \epsilon_\zeta = \dot{\omega}_\zeta.$$

В соответствии с (1)

$$\epsilon_\xi = 2 \sin 24t + (2t + 1,5) 24 \cos 24t;$$

$$\epsilon_\eta = 2 \cos 24t - (2t + 1,5) 24 \sin 24t;$$

$$\epsilon_\zeta = 4 \cdot 0,866 = 3,46.$$

Проекции углового ускорения на неподвижные оси координат:

$$\varepsilon_x = \dot{\omega}_x; \quad \varepsilon_y = \dot{\omega}_y; \quad \varepsilon_z = \dot{\omega}_z.$$

В соответствии с (2):

$$\varepsilon_x = 12(4t + 3) \cos(2t^2 + 3t); \quad \varepsilon_y = 12(4t + 3) \sin(2t^2 + 3t); \quad \varepsilon_z = 4.$$

При $t = 1$ с

$$\varepsilon_{\xi} = 2(-0,906) = 3,5 \cdot 24 \cdot 0,424 = 33,8 \text{ c}^{-2};$$

$$\varepsilon_{\eta} = 2 \cdot 0,424 - 3,5 \cdot 24 \cdot (-0,906) = 76,9 \text{ c}^{-2};$$

$$\varepsilon_{\zeta} = 3,46 \text{ c}^{-2};$$

$$\varepsilon_x = 12 \cdot 7 \cdot 0,284 = 23,9 \text{ c}^{-2};$$

$$\varepsilon_y = 12 \cdot 7 (-0,959) = -80,5 \text{ c}^{-2};$$

$$\varepsilon_z = 4 \text{ c}^{-2}.$$

Модуль углового ускорения

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{33,8^2 + 76,9^2 + 3,46^2} = \sqrt{7068} = 84,1 \text{ c}^{-2}$$

или

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2} = \sqrt{23,9^2 + (-80,5)^2 + 4^2} = \sqrt{7067} = 84,1 \text{ c}^{-2}.$$

Направление углового ускорения определяется направляющими косинусами.

В подвижной системе координат

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{\xi}) = \varepsilon_{\xi}/\varepsilon = 33,8/84,1 = 0,402;$$

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{\eta}) = \varepsilon_{\eta}/\varepsilon = 76,9/84,1 = 0,914;$$

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{\zeta}) = \varepsilon_{\zeta}/\varepsilon = 3,46/84,1 = 0,041.$$

В неподвижной системе

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}) = \varepsilon_x/\varepsilon = 23,9/84,1 = 0,284;$$

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{y}) = \varepsilon_y/\varepsilon = -80,5/84,1 = -0,957;$$

$$\cos(\vec{\varepsilon}, \vec{z}) = \varepsilon_z/\varepsilon = 4/84,1 = 0,048.$$

3. Определение скорости точки $M(\xi, \eta, \zeta)$. Проекции скорости точки на подвижные оси координат определяются по формулам:

$$v_{\xi} = \omega_{\eta}\zeta - \omega_{\zeta}\eta; \quad v_{\eta} = \omega_{\zeta}\xi - \omega_{\xi}\zeta; \quad v_{\zeta} = \omega_{\xi}\eta - \omega_{\eta}\xi.$$

Для момента времени $t = 1$ с имеем:

$$v_{\xi} = 1,48 \cdot 5 - 30,1 \cdot 2 = -52,8 \text{ см/с};$$

$$v_{\eta} = 30,1 \cdot 3 - (-3,17) \cdot 5 = 106,2 \text{ см/с};$$

$$v_{\zeta} = (-3,17) \cdot 2 - 1,48 \cdot 3 = -10,7 \text{ см/с}.$$

Модуль скорости точки

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(-52,8)^2 + 106,2^2 + (-10,7)^2} = \\ = \sqrt{14180} = 119 \text{ см/с.}$$

Направляющие косинусы:

$$\cos(\vec{v}, \xi) = v_\xi/v = -52,8/119 = -0,444;$$

$$\cos(\vec{v}, \eta) = v_\eta/v = 106,2/119 = 0,892;$$

$$\cos(\vec{v}, \zeta) = v_\zeta/v = -10,7/119 = -0,090.$$

4. Определение ускорения точки $M(\xi, \eta, \zeta)$. Проекции ускорения точки на подвижные оси координат определяются формулами:

$$w_\xi = e_\eta \zeta - e_\zeta \eta + \omega_\xi (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \xi;$$

$$w_\eta = e_\xi \zeta - e_\zeta \xi + \omega_\eta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \eta;$$

$$w_\zeta = e_\xi \eta - e_\eta \xi + \omega_\zeta (\omega_\xi \xi + \omega_\eta \eta + \omega_\zeta \zeta) - \omega^2 \zeta.$$

В момент времени $t = 1$ с

$$w_\xi = 76,9 \cdot 5 - 3,46 \cdot 2 + (-3,17) (-3,17 \cdot 3 + 1,48 \cdot 2 + 30,1 \cdot 5) - \\ - 917 \cdot 3 = -2829 \text{ см/с}^2;$$

$$w_\eta = 3,46 \cdot 3 - 33,8 \cdot 5 + 1,48 \cdot 144 - 917 \cdot 2 = -1780 \text{ см/с}^2;$$

$$w_\zeta = 33,8 \cdot 2 - 76,9 \cdot 3 + 30,1 \cdot 144 - 917 \cdot 5 = -414 \text{ см/с}^2.$$

Модуль ускорения точки

$$w = \sqrt{w_\xi^2 + w_\eta^2 + w_\zeta^2} = \sqrt{(-2829)^2 + (-1780)^2 + (-414)^2} = \\ = 100 \sqrt{1134} = 3367 \text{ см/с}^2.$$

Направляющие косинусы

$$\cos(\vec{w}, \xi) = w_\xi/w = -2829/3367 = -0,841;$$

$$\cos(\vec{w}, \eta) = w_\eta/w = -1780/3367 = -0,529;$$

$$\cos(\vec{w}, \zeta) = w_\zeta/w = -414/3367 = -0,123.$$

Задание К-8. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, катящегося без скольжения по подвижной поверхности и имеющего неподвижную точку

Тело A катится без скольжения по поверхности неподвижного тела B , имея неподвижную точку O . Определить угловую скорость и угловое ускорение тела A , а также скорость и ускорение точки M при заданном положении тела A , если его ось $O\xi$ вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 вокруг неподвижной оси Oz .

Схемы показаны на рис. 107–109, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 38.

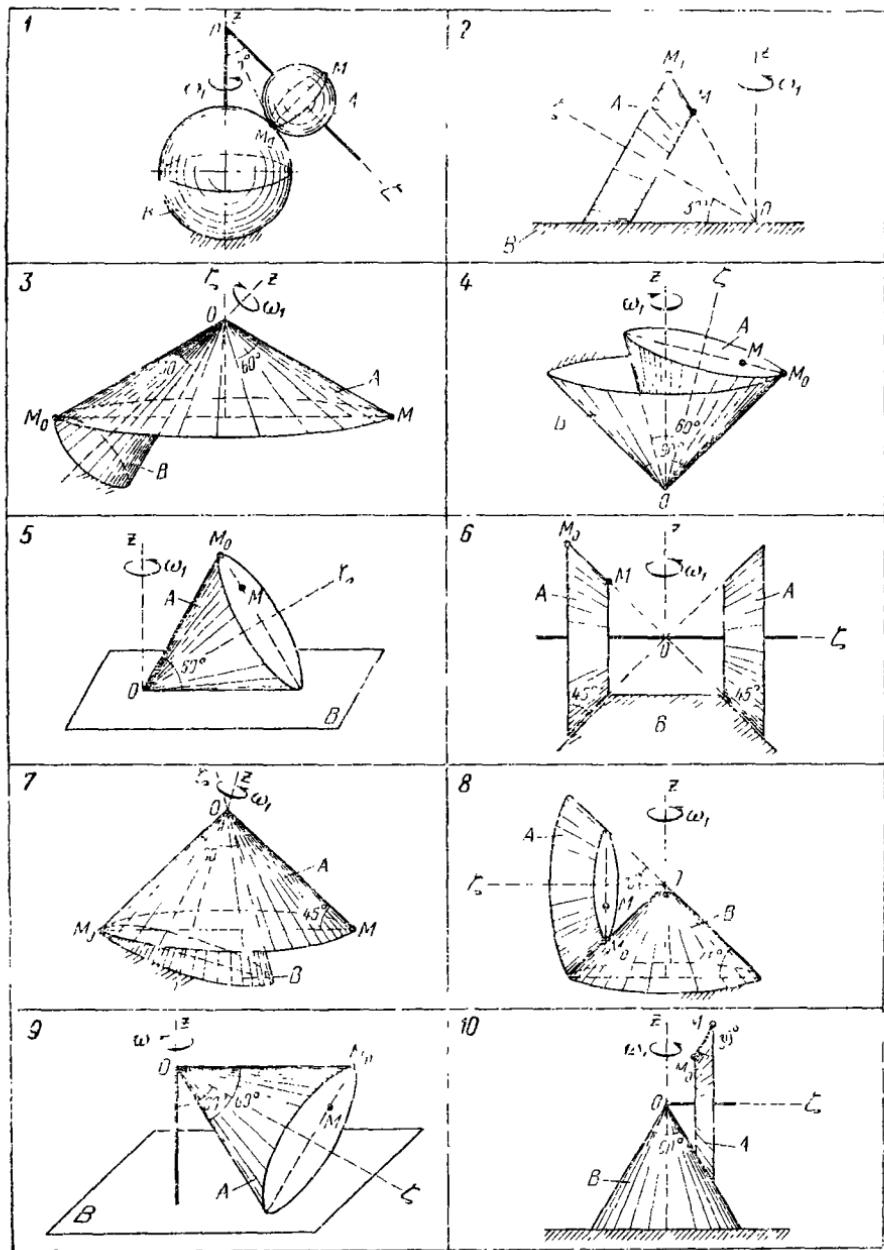


Рис. 107

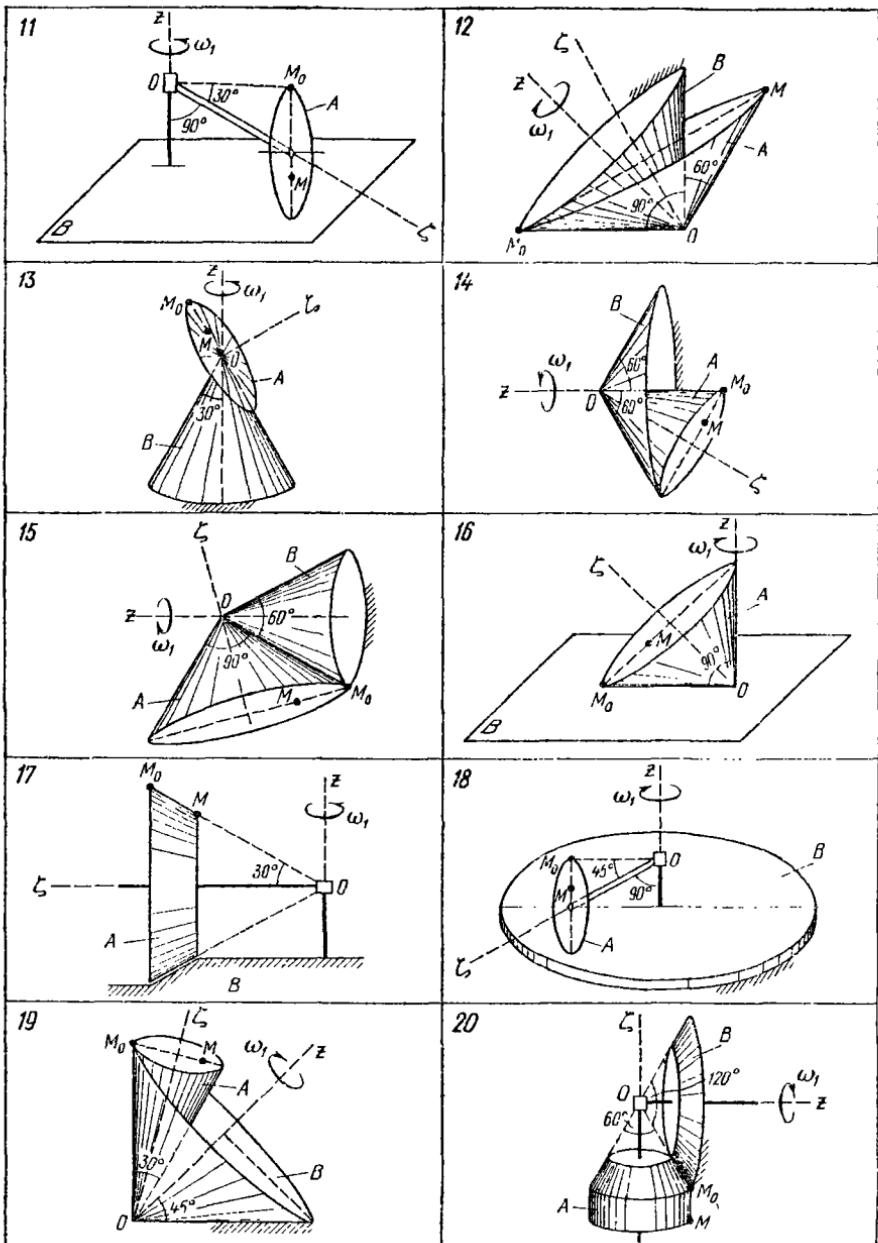
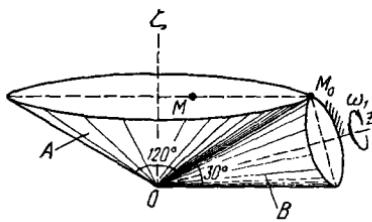
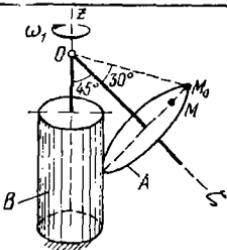


Рис. 108

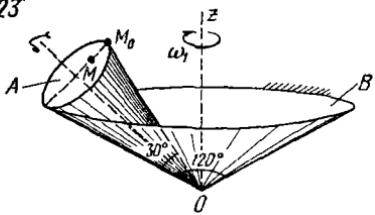
21



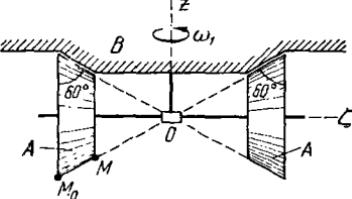
22



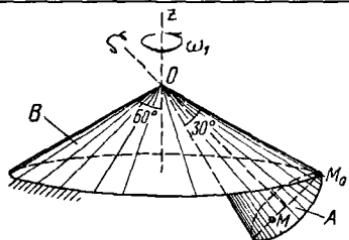
23



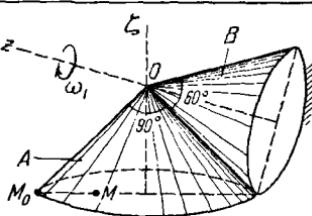
24



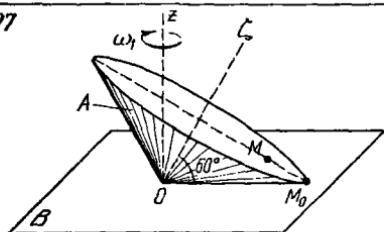
25



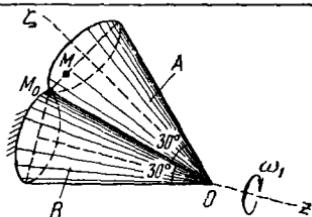
26



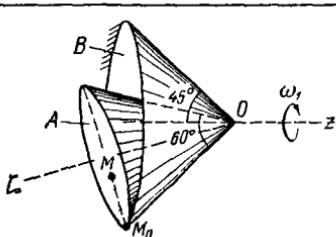
27



28



29



30

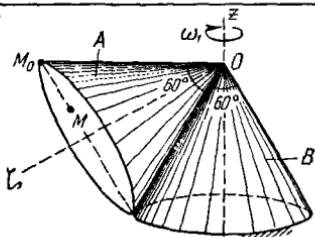


Рис. 109

Таблица 38

Номер варианта (рис. 107—109)	OM_0 , см	ω_1 , с^{-1}	M_0M , см	Номер варианта (рис. 107—109)	OM_0 , см	ω_1 , с^{-1}	M_0M , см
1	30	2,3	16	16	45	2,4	20
2	45	3,0	5	17	50	3,5	10
3	50	1,2	—	18	30	1,0	10
4	40	2,0	10	19	50	2,7	20
5	40	0,8	10	20	30	3,3	10
6	70	4,0	30	21	40	4,0	25
7	60	1,5	—	22	30	1,6	5
8	40	2,1	20	23	40	2,0	5
9	50	3,2	10	24	60	3,5	10
10	20	1,3	10	25	40	1,6	15
11	30	0,9	20	26	40	2,2	15
12	40	2,2	—	27	30	4,1	10
13	20	3,8	10	28	45	3,0	5
14	30	1,4	10	29	40	1,4	15
15	40	0,7	15	30	50	2,9	15

Пример выполнения задания. Тела A и B представляют собой прямые круглые конусы (рис. 110).

Дано: $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 90^\circ$; $OM_0 = l = 30$ см; $\omega_1 = 1,2 \text{ с}^{-1}$, $M_0M = 10$ см.

Решение. 1. Определение угловой скорости тела. Конус A совершает сферическое движение. Мгновенная ось вращения $O\Omega$ сов-

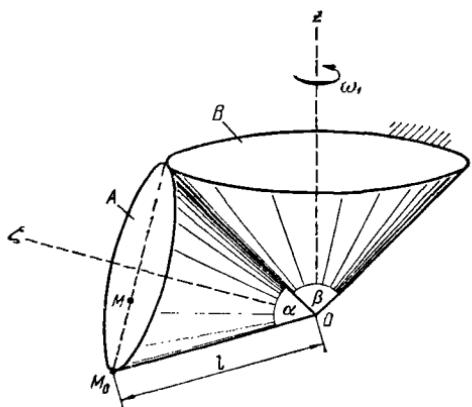


Рис. 110

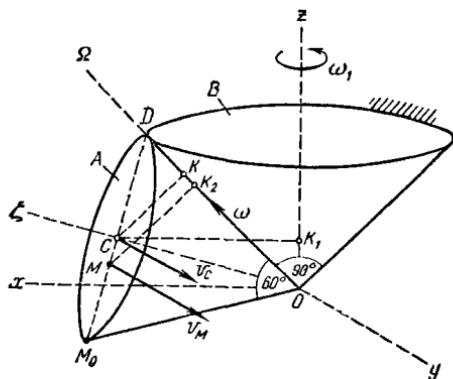


Рис. 111

падает с общей образующей конусов (рис. 111). Скорость v_C точки C является вращательной скоростью вокруг мгновенной оси. Следовательно, угловая скорость конуса

$$\omega = v_C/CK.$$

С другой стороны, скорость точки C , описывающей окружность радиусом CK_1 , можно определить по формуле

$$v_C = CK_1 \cdot \omega_1.$$

По рис. 111

$$CK_1 = l \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 75^\circ = 30 \cdot 0,866 \cdot 0,966 = 25,1 \text{ см.}$$

Поэтому

$$v_C = 25,1 \cdot 1,2 = 30,1 \text{ см/с.}$$

Так как

$$CK = l \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 60^\circ = 30 \cdot 0,5 \cdot 0,866 = 13,0 \text{ см,}$$

то

$$\omega = 30,1 / 13 = 2,32 \text{ с}^{-1}.$$

Направление $\vec{\omega}$ определяется направлением \vec{v}_C (рис. 111).

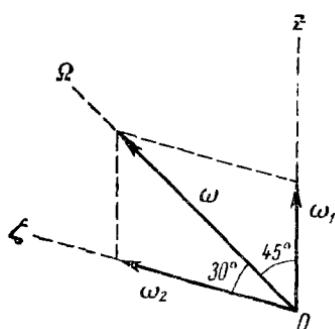


Рис. 112

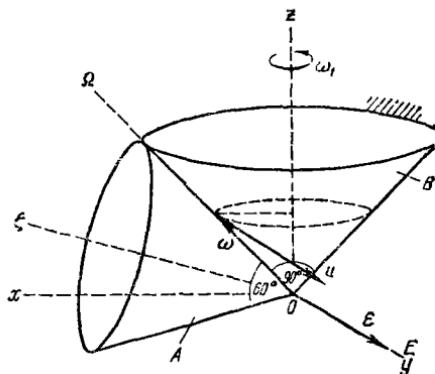


Рис. 113

Угловую скорость конуса A можно найти также путем сложения вращений вокруг пересекающихся осей — построением параллелограмма угловых скоростей (рис. 112).

Здесь $\vec{\omega}_2$ — угловая скорость конуса A во вращении относительно собственной оси $O\xi$.

По теореме синусов

$$\omega / \sin 75^\circ = \omega_1 / \sin 30^\circ,$$

откуда

$$\omega = \omega_1 \cdot \sin 75^\circ / \sin 30^\circ = 1,2 \cdot 0,966 / 0,5 = 2,32 \text{ с}^{-1}.$$

2. *Определение углового ускорения тела.* Угловое ускорение конуса A геометрически равно скорости \vec{u} конца вектора $\vec{\omega}$, который описывает окружность радиусом $\omega \cdot \sin 45^\circ$ вокруг оси Oz (рис. 113).

$$u = \omega \cdot \sin 45^\circ \cdot \omega_1 = 2,32 \cdot 0,707 \cdot 1,2 = 1,97 \text{ с}^{-2};$$

$$\varepsilon = u = 1,97 \text{ с}^{-2}.$$

Вектор \vec{e} приложен в точке O и направлен перпендикулярно к плоскости $zO\xi$. Следовательно, ось углового ускорения OE совпадает с осью Oy .

3. Определение скорости точки тела. Скорость точки M определяем как вращательную скорость вокруг мгновенной оси:

$$v_M = MK_2 \cdot \omega = MD \cos 30^\circ \cdot \omega;$$

$$MD = 2l \cdot \sin 30^\circ = M_0M = 2 \cdot 30 \cdot 0,5 = 30 \text{ см};$$

$$v_M = 30 \cdot 0,866 \cdot 2,32 = 60,2 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_M параллелен вектору \vec{v}_C и имеет одинаковое с ним направление (см. рис. 111).

4. Определение ускорения точки тела. Ускорение точки M находим как геометрическую сумму осцестремительного и вращательного ускорений:

$$\vec{w}_M = \vec{w}_M^{\text{oc}} + \vec{w}_M^{\text{в.}}$$

Осцестремительное ускорение направлено по перпендикуляру к мгновенной оси вращения (рис. 114)

$$\begin{aligned} w_M^{\text{oc}} &= MK_2 \cdot \omega^2 = \\ &= MD \cdot \cos 30^\circ \cdot \omega^2 = \\ &= 30 \cdot 0,866 \cdot 2,32^2 = 93,3 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

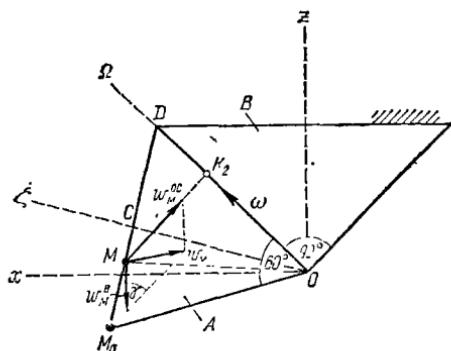


Рис. 114

Вращательное ускорение направлено перпендикулярно к OM в плоскости $zO\xi$, как показано на рис. 114,

$$w_M^{\text{в.}} = OM \cdot \epsilon;$$

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{l^2 + (M_0M)^2 - 2l \cdot M_0M \cdot \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{900 + 100 - 2 \cdot 30 \cdot 10 \cdot 0,5} = 26,5 \text{ см}; \\ w_M^{\text{в.}} &= 26,5 \cdot 1,97 = 52,2 \text{ см/с}^2. \end{aligned}$$

Обе составляющие расположены в плоскости $zO\xi$ (zOx). Величину w_M найдем как диагональ параллелограмма, построенного на этих составляющих:

$$w_M = \sqrt{(w_M^{\text{oc}})^2 + (w_M^{\text{в.}})^2 - 2w_M^{\text{oc}} \cdot w_M^{\text{в.}} \cos \gamma};$$

$$\cos \gamma = \cos \angle K_2OM = \frac{l - MD \cdot \sin 30^\circ}{OM} = \frac{30 - 20 \cdot 0,5}{26,5} = 0,75;$$

$$w_M = \sqrt{93,3^2 + 52,2^2 - 2 \cdot 93,3 \cdot 52,2 \cdot 0,75} = \sqrt{4125} = 64,2 \text{ см/с}^2.$$

III. Сложное движение

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ

Задание К-9. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае поступательного переносного движения

По заданным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D для момента времени $t = t_1$ определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

Схемы механизмов показаны на рис. 115 – 117, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 39.

Пример выполнения задания. Дано: схема механизма (рис. 118): $O_1A = O_2B = 20$ см; $R = 16$ см; $\varphi = (5/48)\pi t^3$ рад; $s_r = AM = \pi t^2$ см; $t_1 = 2$ с.

Решение. Найдем положение тела D и точки M в заданный момент времени. Положение тела D определяется углом φ . При $t = 2$ с

$$\varphi = (5/48)\pi \cdot 2^3 = (5/6)\pi \text{ рад.}$$

Положение точки M на теле D можно определить углом

$$\alpha = s_r/R.$$

При $t = 2$ с

$$\alpha = \pi \cdot 2^2/16 = \pi/4 \text{ рад.}$$

Тело D и точка M в заданный момент времени показаны на рис. 119. Абсолютную скорость точки M определяем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Модуль относительной скорости точки M

$$v_r = |\vec{v}_r|.$$

Здесь \vec{v}_r — проекция относительной скорости на касательную к траектории относительного движения

$$\tilde{v}_r = ds_r/dt = 2\pi t.$$

При $t = 2$ с

$$\tilde{v}_r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi = 12,6 \text{ см/с.}$$

Следовательно,

$$v_r = 12,6 \text{ см/с.}$$

Положительный знак \tilde{v}_r показывает, что относительное движение точки происходит в направлении положительного отсчета s_r .

Вектор относительной скорости показан на рис. 119.

Переносную скорость определяем, учитывая, что

$$\vec{v}_e = \vec{v}_A, v_A = O_1A \cdot \omega,$$

где ω — модуль угловой скорости звена O_1A .

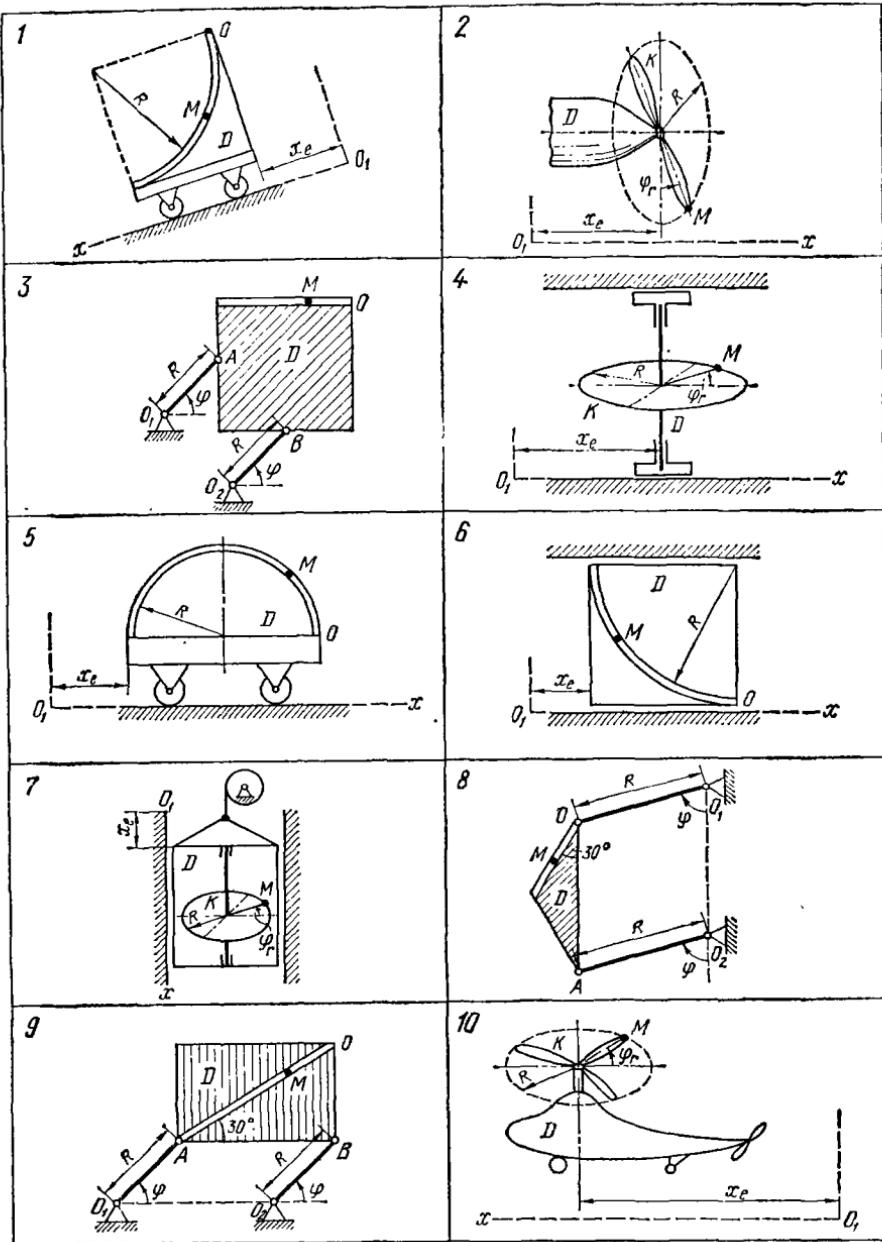


Рис. 115

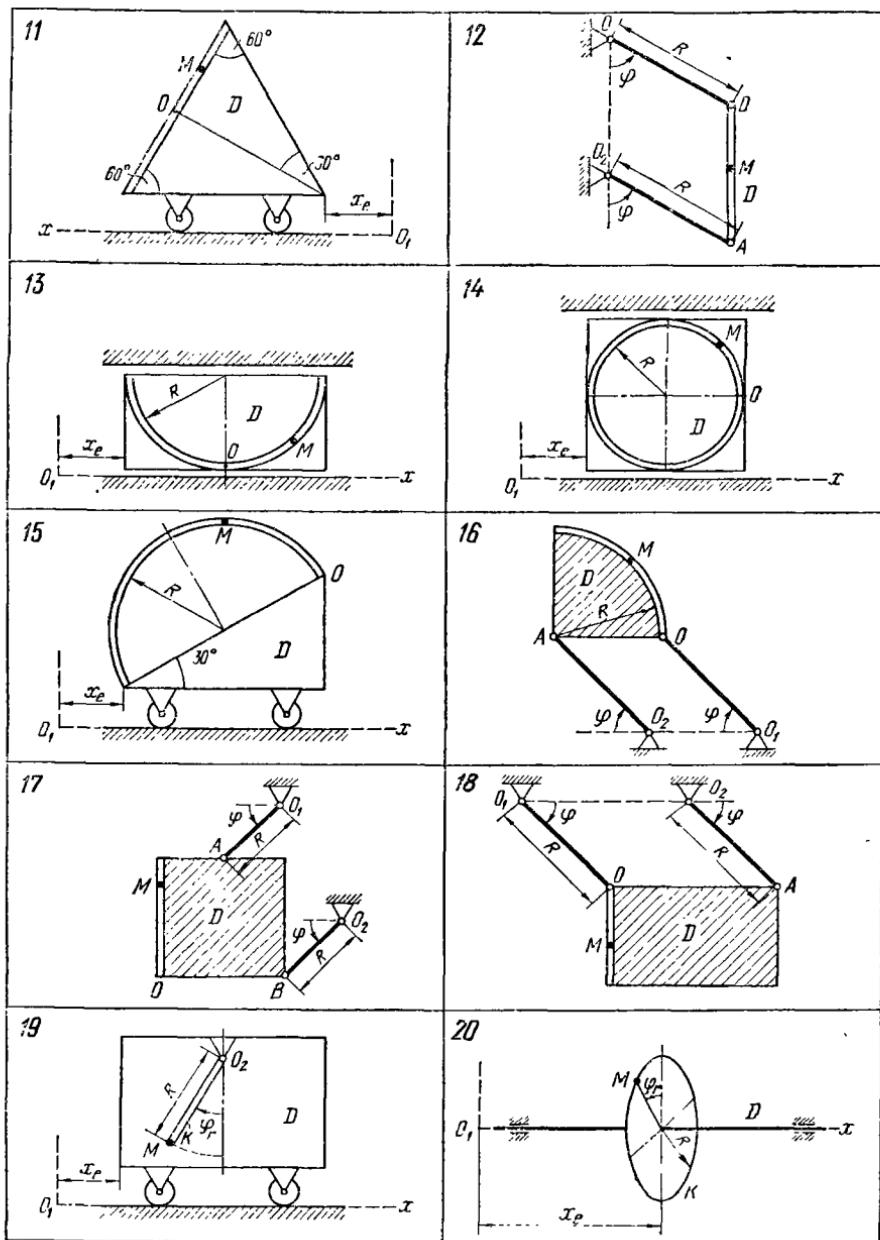
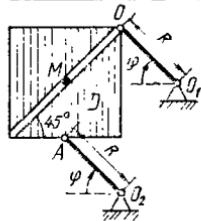
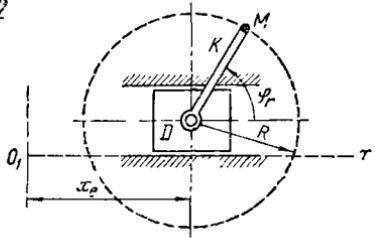


Рис 116

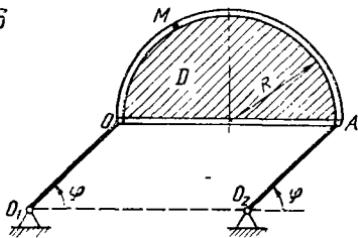
21



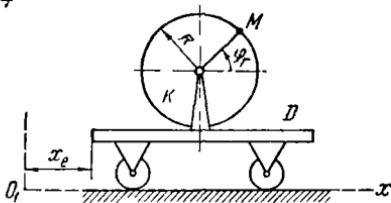
22



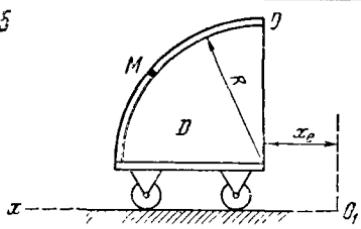
23



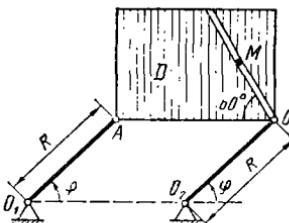
24



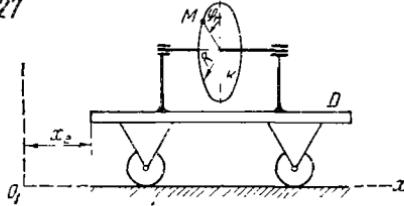
25



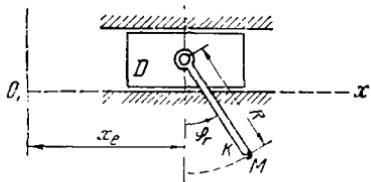
26



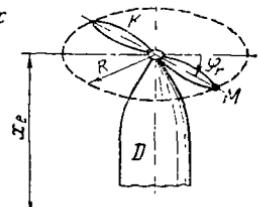
27



28



29



30

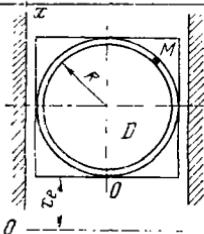


FIG. 117

Таблица 39

Номер варианта (рис. 115–117)	$x_e = f_1(t)$, см	$\Phi = f_2(t)$, рад	Уравнение относительного движения				t_s , с	R , см	Примечание			
			точки M		тела K							
			$OM = s_r = f_3(t)$, см		$\Phi_r = f_4(t)$, рад	$\Phi_r = f_4(t)$, рад						
1	$\frac{t^3 + 4t}{60t^2}$	—	$4\pi t^2$	—	$0,036\pi t^3$	—	2	48				
2	$\frac{2t^2 + 0,2t^3}{\pi t^2/24}$	$\frac{2t^3 + 3t}{\pi t^2/24}$	$2t^3 + 3t$	—	$\pi t^3/12$	—	5/3	80				
3	$\frac{7t + 0,2t^3}{7t + 4t^3}$	—	$20\pi t^2$	—	—	—	2	15				
4	$20 [1 + \sin(\pi t/3)]$	—	$\pi (2t^3 + 3t)$	—	$\pi t^3/3$	—	1/2	20				
5	$\frac{7t + 4t^3}{20t^2 + 3t}$	—	$9t^3 + 5t$	—	—	—	1	30				
6	—	$1,5\pi t^2$	$16t^2 - 2t + 2$	—	$1/3$	—	1/3	25				
7	—	$8\pi t^3/3$	—	$3\pi t^2$	—	$1/2$	25	30				
8	—	$250t^2$	—	$4 \sin(\pi t/3)$	—	$5/3$	30	60				
9	—	$8t^2 + 3t^3$	$4\pi t^2/27$	$2t^3$	—	—	2	—				
10	—	$4(t + 4t^2)$	—	$10\pi \sin(\pi t/6)$	—	—	3/2	25				
11	—	$20 [\cos(\pi t/8) + 1]$	$5\pi t^2/24$	$2\pi t^2$	—	—	1	30				
12	—	$10t^2 - 0,6t^3$	$\pi t^2/8$	$5\pi t^3/4$	—	—	2	24				
13	—	$20t^2 + 4t^3$	$\pi t^2/24$	$3t^3 + 5t$	—	—	3	54				
14	—	$2\pi t^2/3$	$2\pi t^2/3$	$4t^3 + 9t$	—	—	2	20				
15	—	$20t^2 + 15t$	—	$(\pi/3) \cos(2\pi t)$	—	—	1/2	20				
16	—	$25 [1 + \sin(\pi t/3)]$	$1,5t + 10t^3$	$2\pi t^2/3$	$2\pi t^2/3$	—	1/6	15				
17	—	$10 + 3 \sin(\pi t/2)$	$6\pi t^2$	$0,24\pi t^2$	—	—	1/2	40				
18	—	$5\pi t^3/6$	$0,36\pi t^2$	$0,24\pi t^2$	—	—	5/3	30				
19	—	$5\pi t^3/3$	$5\pi t^3/3$	$0,15\pi t^2$	—	—	1/6	18				
20	—	$24t^2 + 7t$	$\pi t^2/12$	$(5\pi/6) \sin(\pi t/12)$	$0,15\pi t^2$	—	2	40				
21	—	$18t^2 + 2t$	—	$5\pi t^3/48$	$10/3$	—	2	35				
22	—	$50t^3/2$	—	—	2	—	5/6	50				
23	—	$50 [1 - \cos(\pi t/2)]$	$12\pi t^2$	$5\pi t^3/48$	—	—	2	75				
24	—	$1,5$	—	—	5/6	—	5/6	25				
25	—	6	—	—	—	—	—	—				
26	—	$13 - 16, 22, 25, 30$	—	—	—	—	—	—				
27	—	$18t^2 + 2t$	—	—	—	—	—	—				
28	—	$50t^3/2$	—	—	—	—	—	—				
29	—	$50 [1 - \cos(\pi t/2)]$	—	—	—	—	—	—				
30	—	$50 [1 - \cos(\pi t/2)]$	—	—	—	—	—	—				

Причина. В вариантах 1, 5, 6, 13–16, 22, 25, 30 OM — дуга окружности, для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r , на схемах 14 и 30 OM — дуга, соответствующая меньшему центральному углу.

Обозначая $\tilde{\omega}$ алгебраическую величину угловой скорости, имеем:

$$\tilde{\omega} = d\varphi/dt = (5/16) \cdot t^2 \text{ с}^{-1}.$$

При $t = 2$ с

$$\tilde{\omega} = (5/4) \cdot \pi \text{ с}^{-1}.$$

Так как $\omega = |\tilde{\omega}|$, то

$$\omega = (5/4) \cdot \pi \text{ с}^{-1}.$$

Положительный знак у величины $\tilde{\omega}$ показывает, что вращение звена Q_1A происходит в направлении возрастания угла φ .

Модуль переносной скорости

$$v_e = v_A = 20 \cdot (5/4) \cdot \pi = 25\pi = 78,5 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_e направлен перпендикулярно к звену O_1A в сторону его вращения.

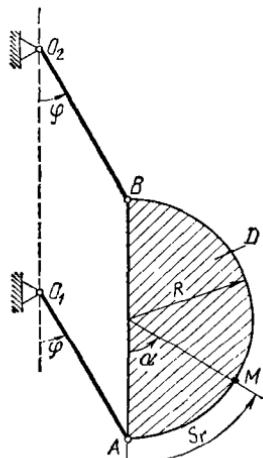


Рис. 118

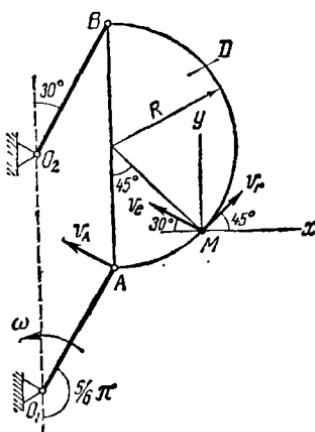


Рис. 119

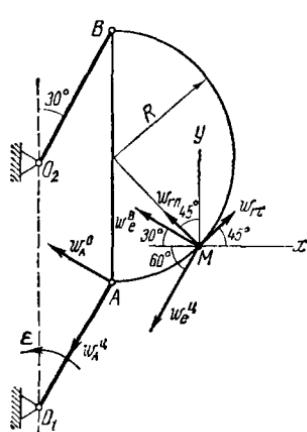


Рис. 120

Модуль абсолютной скорости точки M найдем способом проекций. Как следует из рис. 119,

$$v_x = v_r \cos 45^\circ - v_e \cos 30^\circ; \quad v_y = v_r \cos 45^\circ + v_e \cos 60^\circ.$$

Следовательно,

$$v_x = -59,1 \text{ см/с}; \quad v_y = 48,2 \text{ см/с}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 76,3 \text{ см/с.}$$

Абсолютное ускорение точки при поступательном переносном движении равно геометрической сумме относительного и переносного ускорений:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e$$

или в развернутом виде

$$\vec{w} = \vec{w}_{re} + \vec{w}_{rn} + \vec{w}_{en} + \vec{w}_{ee}.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$\tilde{\omega}_{r\tau} = |\tilde{\omega}_{r\tau}|; \tilde{\omega}_{r\tau} = d\tilde{\omega}_r/dt = d^2s_r/dt^2.$$

В рассматриваемом случае

$$\tilde{\omega}_{r\tau} = 2\pi = 6,28 \text{ см/с}^2; \omega_{r\tau} = 6,28 \text{ см/с}^2.$$

Положительный знак у величины $\tilde{\omega}_{r\tau}$ показывает, что вектор $\tilde{\omega}_{r\tau}$ направлен в сторону положительного отсчета s_r , т. е. так же, как \tilde{v}_r (относительное движение — ускоренное) (рис. 120).

Относительное нормальное ускорение

$$\omega_{rn} = v_r^2/R = 16\pi^2/16 = \pi^2 = 9,87 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\tilde{\omega}_{rn}$ направлен по радиусу к центру кривизны траектории относительного движения точки M .

Переносное вращательное ускорение

$$\tilde{\omega}_e^B = \tilde{\omega}_A^B; \omega_e^B = O_1 A \cdot \epsilon,$$

где ϵ — модуль углового ускорения звена $O_1 A$

$$\epsilon := |\tilde{\epsilon}|.$$

Здесь $\tilde{\epsilon} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ — алгебраическая величина углового ускорения.

В рассматриваемом случае

$$\tilde{\epsilon} = (5/8) \cdot \pi t = (5/4) \cdot \pi = 3,93 \text{ с}^{-2}.$$

Совпадение знаков у величин $\tilde{\epsilon}$ и $\tilde{\omega}_e^B$ показывает, что вращение тела D ускоренное

$$\epsilon = 3,93 \text{ с}^{-2}; \omega_e^B = 20 \cdot 3,93 = 79 \text{ см/с}^2.$$

Направление $\tilde{\omega}_e^B$ соответствует направлению $\tilde{\omega}_A^B$ (см. рис. 120). Переносное центростремительное ускорение

$$\omega_e^H = \omega_A^H = O_1 A \cdot \omega^2 = 20 \cdot (25/16) \cdot \pi^2 = 31,25\pi^2 = 308 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\tilde{\omega}_A^H$ направлен от A к O_1 , а $\tilde{\omega}_e^H$ имеет одинаковое с ним направление.

Модуль абсолютного ускорения находим способом проекций:

$$w_x = (\omega_{r\tau} - \omega_{rn}) \cos 45^\circ - \omega_e^B \cos 30^\circ - \omega_e^H \cos 60^\circ;$$

$$w_y = (\omega_{r\tau} + \omega_{rn}) \cos 45^\circ + \omega_e^B \cos 60^\circ - \omega_e^H \cos 30^\circ$$

или после вычислений

$$w_x = -225 \text{ см/с}^2, w_y = -216 \text{ см/с}^2,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = 312 \text{ см/с}^2.$$

Результаты расчета сведены в табл. 40.

Таблица 40

φ , рад	α , рад	ω , с^{-1}	Скорость, см/с				
			v_e	v_r	v_x	v_y	v
$5\pi/6$	$\pi/4$	$5\pi/4$	78,5	12,6	-59,1	48,2	76,3

ε , с^{-2}	Ускорение, см/с^2						
	w_e^H	w_e^B	w_{rn}	w_{τ}	w_x	w_y	w
$5\pi/4$	308	79	10	6	-225	-216	312

Задание К-10. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения

По заданным уравнениям относительного движения точки M и переносного движения тела D определить для момента времени $t = t_1$ абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки M .

Схемы механизмов показаны на рис. 121—123, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 41.

Пример выполнения задания. Дано схема механизма (рис. 124)

$$\varphi_e = 0,9t^2 - 9t^3 \text{ рад}; \quad s_r = OM = 16 - 8 \cos 3\pi t \text{ см}; \quad t_1 = 2/9 \text{ с.}$$

Решение. Будем считать, что в расчетный момент времени плоскость чертежа (рис. 125) совпадает с плоскостью треугольника D . Положение точки M на теле D определяется расстоянием $s_r = OM$.

При $t = 2/9$ с

$$s_r = 16 - 8 \cos(3\pi \cdot 2/9) = 16 - 4 = 20,0 \text{ см.}$$

Абсолютную скорость точки M найдем как геометрическую сумму относительной и переносной скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e.$$

Модуль относительной скорости

$$v_r = |\tilde{v}_r|,$$

где

$$\tilde{v}_r = ds_r/dt = 24\pi \sin 3\pi t.$$

При $t = 2/9$ с

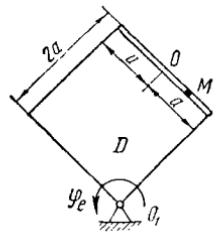
$$\tilde{v}_r = 24\pi \cdot \sqrt{3}/2 = 65,2 \text{ см/с}; \quad v_r = 65,2 \text{ см/с.}$$

Положительный знак у величины \tilde{v}_r показывает, что вектор \vec{v}_r направлен в сторону возрастания s_r .

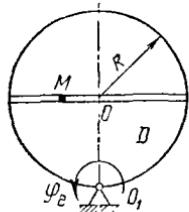
Модуль переносной скорости

$$v_e = R\omega_e,$$

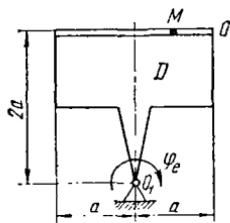
1



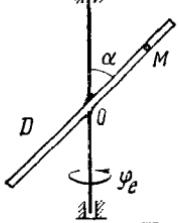
2



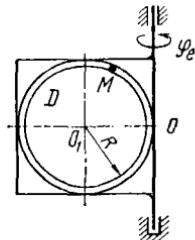
3



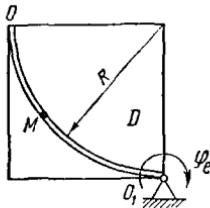
4



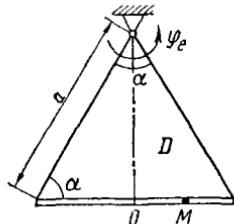
5



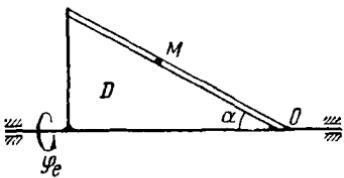
6



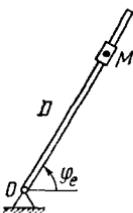
7



8



9



10

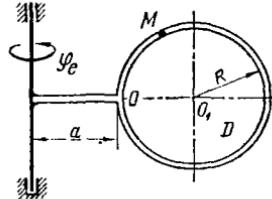
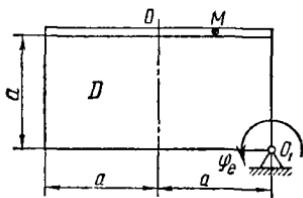
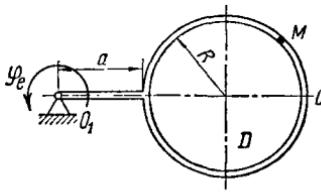


FIG. 121

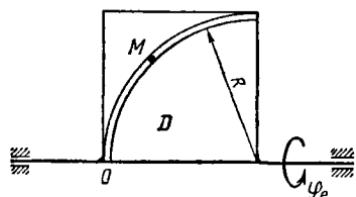
11



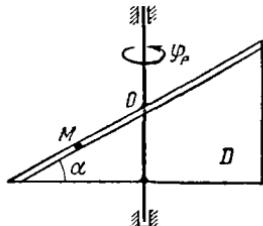
12



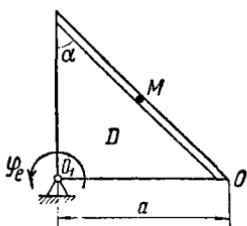
13



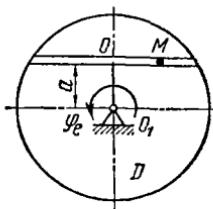
14



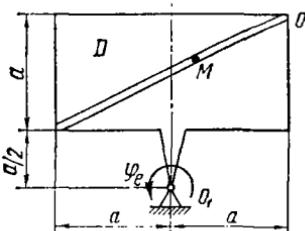
15



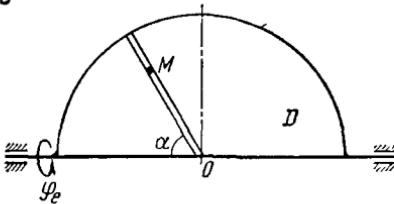
16



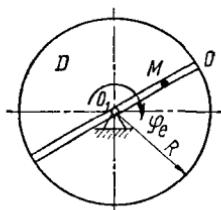
17



18



19



20

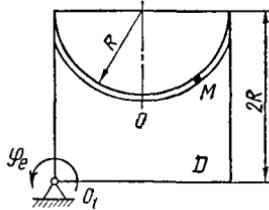
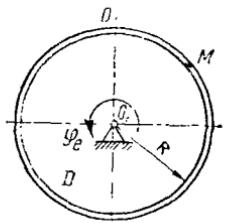
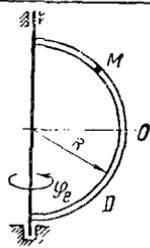


Рис. 122

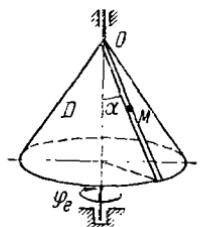
21



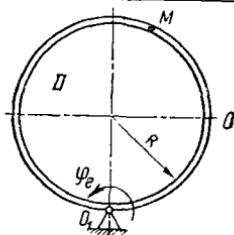
22



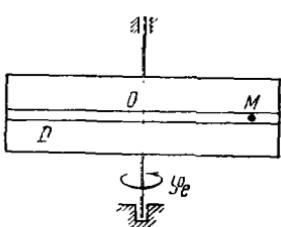
23



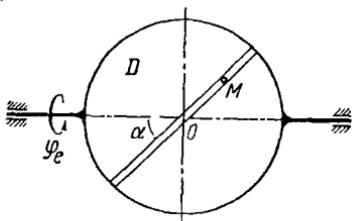
24



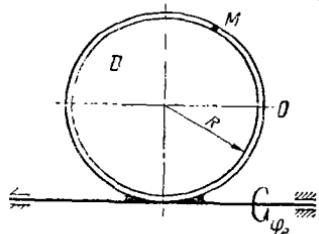
25



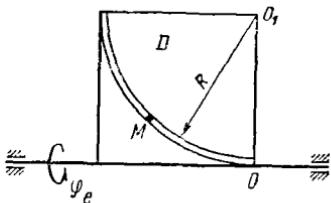
26



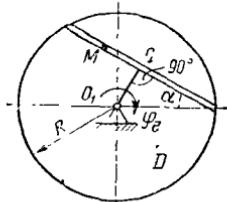
27



28



29



30

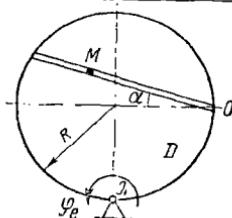


FIG. 123

Таблица 41

Номер варианта (рнс 121—123)	Уравнение движения $\Phi_c = f_1(t)$, рад	Уравнение относительного движения точки M $O.M = s_r + f_2(t)$, см	t_1 , с	P_1	a_1 , см ⁻¹	α_1 , град
1	$2t^3 - t^2$	$18 \sin(\pi t/4)$	$2\sqrt{3}$	—	25	—
2	$0,4t^2 + t$	$20 \sin \pi t$	$5\sqrt{2}$	20	—	—
3	$2t + 0,5t^2$	$6t^3$	$2\sqrt{2}$	—	30	—
4	$0,4t^2$	$10 \sin(\pi t/6)$	1	—	—	60
5	$3t - 0,5t^3$	$40t \cos(\pi t/6)$	2	30	—	—
6	$0,75t + 1,5t^2$	$150t^2$	$1/6$	25	—	—
7	$0,5t^2$	$20 \cos 2\pi t$	$3\sqrt{8}$	—	40	60
8	$t^3 - 5t$	$6(t + 0,5t^2)$	2	—	—	30
9	$4t + 1,5t^2$	$10 + 10 \sin 2\pi t$	$1/8$	—	—	—
10	$1,5t^2 - t^2$	$20t \cos(\pi t/4)$	$4\sqrt{3}$	20	20	—
11	$2t^2 - 0,5t$	$25 \sin(\pi t/3)$	4	25	—	—
12	$5t - 4t^2$	$15\pi t^3/8$	2	20	30	—
13	$8t^2 - 3t$	$120\pi t^2$	$1/3$	40	—	—
14	$4t - 2t^2$	$3 + 14 \sin \pi t$	$2\sqrt{3}$	—	—	30
15	$0,2t^3 + t$	$5\sqrt{2}(t^2 + t)$	2	—	60	45
16	$t - 0,5t^2$	$20 \sin \pi t$	$1\sqrt{3}$	—	20	—
17	$0,5t^2$	$8t^3 + 2t$	1	—	$1\sqrt{5}$	—
18	$8t - t^2$	$10t + t^3$	2	—	—	60
19	$t + 3t^2$	$6t + 4t^3$	2	40	—	—
20	$6t + t^2$	$30t \cos(\pi t/6)$	3	60	—	—
21	$2t - 4t^2$	$25\pi(t + t^2)$	$1/2$	25	—	—
22	$4t - 0,2t^2$	$10\pi \sin(\pi t/4)$	$2\sqrt{3}$	30	—	—
23	$2t - 0,25t^2$	$3t^2 + 4t$	2	—	—	30
24	$2t - 0,3t^2$	$75\pi(0,1t + 0,3t^3)$	1	30	—	—
25	$10t - 0,1t^2$	$15 \sin(\pi t/3)$	5	—	—	—
26	$-2\pi t^2$	$8 \cos(\pi t/2)$	$3/2$	—	—	45
27	$t - 0,5t^3$	$10 + 2\pi \cos 2\pi t$	$1\sqrt{8}$	30	—	—
28	$2t^4 - 5t$	$2,5\pi t^2$	2	40	—	—
29	$0,6t^2$	$6\sqrt{6} \sin(\pi t/16)$	4	36	—	30
30	$2t^2 - 3t$	$5 + 3t/3$	2	20	—	30

Примечание. В вариантах 5, 6, 10, 12, 13, 20—22, 24, 27, 28 OM — дуга окружности; для каждого варианта положение точки M на схеме соответствует положительному значению s_r ; на схемах 5, 10, 12, 21, 24, 27 OM — дуга, соответствующая меньшему центральному углу.

где R — радиус окружности L , описываемой той точкой тела, с которой в данный момент совпадает точка M ,

$$R = s_r \cdot \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10,0 \text{ см};$$

ω_e — модуль угловой скорости тела

$$\omega_e = |\tilde{\omega}_e|; \quad \tilde{\omega}_e = d\varphi_e/dt = 1,8t - 27t^2 \text{ (с}^{-1}\text{).}$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{\omega}_e = 1,8 \cdot 2/9 - 27 \cdot 4/81 = -0,93 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_e = 0,93 \text{ с}^{-1}.$$

Отрицательный знак у величины $\tilde{\omega}_e$ показывает, что вращение треугольника происходит вокруг оси Oz в сторону, обратную направлению отсчета угла φ . Поэтому вектор ω_e направлен по оси Oz вниз (рис. 125, а).

Переносная скорость

$$v_e = 10 \cdot 0,93 = 9,3 \text{ см/с.}$$

Вектор \vec{v}_e направлен по касательной к окружности L в сторону вращения тела. Так как \vec{v}_e и \vec{v}_r взаимно перпендикулярны, модуль абсолютной скорости точки M

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_e^2} = \sqrt{9,3^2 + 65,2^2} = 65,9 \text{ см/с.}$$

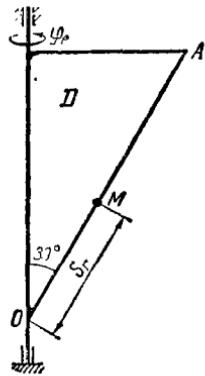


Рис. 124

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений:

$$\vec{w} = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c$$

или в развернутом виде

$$\vec{w} = \vec{w}_{rt} + \vec{w}_{rn} + \vec{w}_e^B + \vec{w}_e^u + \vec{w}_c.$$

Модуль относительного касательного ускорения

$$w_{rt} = |\tilde{w}_{rt}|,$$

где

$$\tilde{w}_{rt} = d^2 s_r / dt^2 = 72\pi^2 \cos 3\pi t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{w}_{rt} = -36\pi^2 = -355 \text{ см/с}; \quad w_{rt} = 355 \text{ см/с}^2.$$

Отрицательный знак \tilde{w}_{rt} показывает, что вектор \vec{w}_{rt} направлен в сторону отрицательных значений s_r .

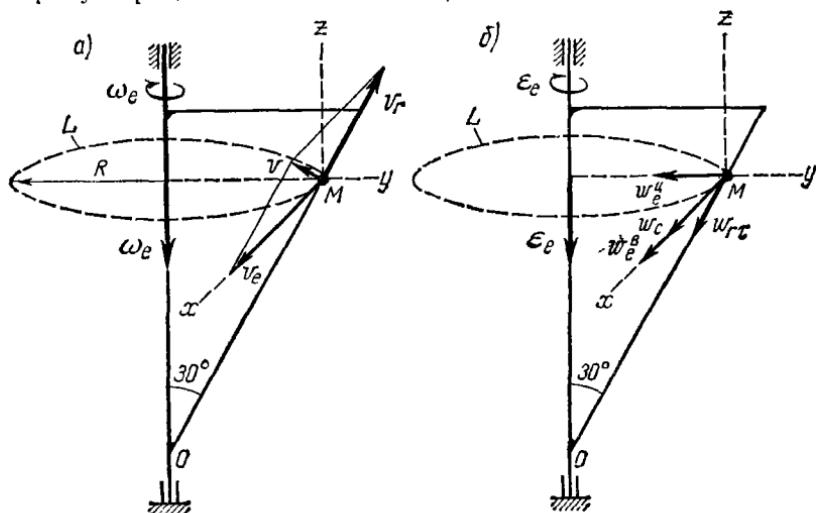


Рис. 125

Относительное нормальное ускорение

$$w_{rn} = v_r^2 / \rho = 0,$$

так как траектория относительного движения — прямая ($\rho = \infty$).

Модуль переносного вращательного ускорения

$$w_e^B = R \varepsilon_e,$$

где $\varepsilon_e = |\tilde{\varepsilon}_e|$ — модуль углового ускорения тела D ;

$$\tilde{\varepsilon}_e = d^2\varphi_e/dt^2 = 1,8 - 54t.$$

При $t = 2/9$ с

$$\tilde{\varepsilon}_e = 1,8 - 54 \cdot 2/9 = -10,2 \text{ с}^{-2}, \quad \varepsilon_e = 10,2 \text{ с}^{-2}.$$

Однаковые знаки у величин $\tilde{\varepsilon}_e$ и $\tilde{\omega}_e$ указывают на то, что вращение треугольника D ускоренное, направления векторов ω_e и $\tilde{\omega}_e$ совпадают (см. рис. 125, а, б).

$$w_e^B = 10 \cdot 10,2 = 102 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\tilde{\omega}_e^B$ направлен в ту же сторону, что и \tilde{v}_e .

Модуль переносного центростремительного ускорения

$$w_e^N = R \omega_e^2 = 10 \cdot 0,93^2 = 8,7 \approx 9 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\tilde{\omega}_e^N$ направлен к центру окружности L .

Кориолисово ускорение

$$\tilde{w}_c = 2\tilde{\omega}_e \times \tilde{v}_r.$$

Модуль кориолисова ускорения

$$w_c = 2\omega_e v_r \sin(\tilde{\omega}_e, \tilde{v}_r).$$

Так как

$$\sin(\tilde{\omega}_e, \tilde{v}_r) = \sin 150^\circ = 0,5,$$

то

$$w_c = 2 \cdot 0,93 \cdot 65,2 \cdot 0,5 = 61 \text{ см/с}^2.$$

В соответствии с правилом векторного произведения вектор \tilde{w}_c направлен перпендикулярно к плоскости треугольника в ту же сторону, что и векторы \tilde{v}_e и $\tilde{\omega}_e^B$ (см. рис. 125, б).

Модуль абсолютного ускорения точки M находим способом проекций

$$w_x = w_e^B + w_c = 102 + 61 = 163 \text{ см/с}^2,$$

$$w_y = -w_e^N - w_{r\tau} \cos 60^\circ = -9 - 355 \cdot 0,5 = -186 \text{ см/с}^2,$$

$$w_z = -w_{r\tau} \cos 30^\circ = -355 \sqrt{3}/2 = -308 \text{ см/с}^2,$$

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = 395 \text{ см/с}^2.$$

Результаты расчета сведены в табл. 42.

Таблица 42

$\tilde{\omega}_e^N$ с ⁻¹	Скорость см/с			ε_e^2 с ⁻²	Ускорение см/с ²								
	v_e	\tilde{v}_r	v		w_e^N	w_e^B	$w_{r\tau}$	$\tilde{w}_{r\tau}$	w_c	w_x	w_y	w_z	w
-0,93	9,3	65,2	65,9	-10,2	9	102	0	-355	61	163	-186	-308	395

**СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. СЛОЖЕНИЕ
ВРАЩЕНИЙ ВОКРУГ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
И ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ОСЕЙ**

Задание К-11. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора с цилиндрическими колесами

Найти угловые скорости ведомого вала II и сателлитов редуктора. Схемы редукторов показаны на рис. 126—128, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 43.

Пример выполнения задания. Исходные данные: схема редуктора (рис. 129); радиусы колес: $r_1 = 30$, $r_2 = 15$, $r_3 = 30$, $r_4 = 75$ см; частоты вращения $n_I = 800$ об/мин, $n_1 = 200$ об/мин.

Таблица 43

Номер варианта (гл.) 126—128	Радиус, см						Частота вращения, об/мин				
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	n_I	n_1	n_2	n_3	n_4
1	15	20	15	20	—	—	2000	—	—	400	—
2	30	30	15	45	—	—	3500	500	—	—	—
3	50	15	20	10	10	—	1000	—	—	—	200
4	20	30	20	120	—	—	100	—300	—	—	—
5	20	25	15	30	10	10	1600	—	—	—	500
6	80	15	35	30	—	—	1200	—	500	—	—
7	50	10	15	55	—	—	800	—200	—	—	—
8	20	15	25	60	—	—	3000	—	—	300	—
9	60	10	20	70	20	15	600	—	—	—	600
10	90	15	15	30	50	10	200	—	—	—	400
11	25	20	65	15	15	—	2500	—	—	300	—
12	30	15	30	75	—	—	3300	—	700	—	—
13	20	30	15	35	—	—	100	1000	—	—	—
14	100	30	20	50	—	—	400	—500	—	—	—
15	15	5	9	11	—	—	2700	—	—	200	—
16	75	30	20	25	15	15	1200	—	—	—	3000
17	75	20	15	70	15	20	500	—	—	—	1600
18	20	12	16	48	18	4	1100	—	—	—	—2000
19	15	7	5	17	—	—	700	—	—	200	—
20	10	10	12	54	—	—	2000	—	—100	—	—
21	15	10	10	55	20	10	3500	—	—	—	500
22	50	10	15	55	—	—	300	—	—300	—	—
23	15	30	15	60	—	—	2400	—	—	400	—
24	24	12	48	12	8	—	500	—	—	2300	—
25	40	10	20	10	—	—	600	—	—	—200	—
26	70	15	10	25	—	—	500	—300	—	—	—
27	30	10	15	55	6	4	200	—	—	—	1000
28	40	10	20	50	—	—	400	—	—	—300	—
29	15	15	10	40	10	6	1300	—	—	—	1300
30	50	10	10	50	—	—	400	400	—	—	—

Приложение.

Положительный и отрицательный знак у угловых скоростей (частот вращения) означают соответственно направление вращения против и по часовой стрелке, если смотреть со стороны ведущего вала I .

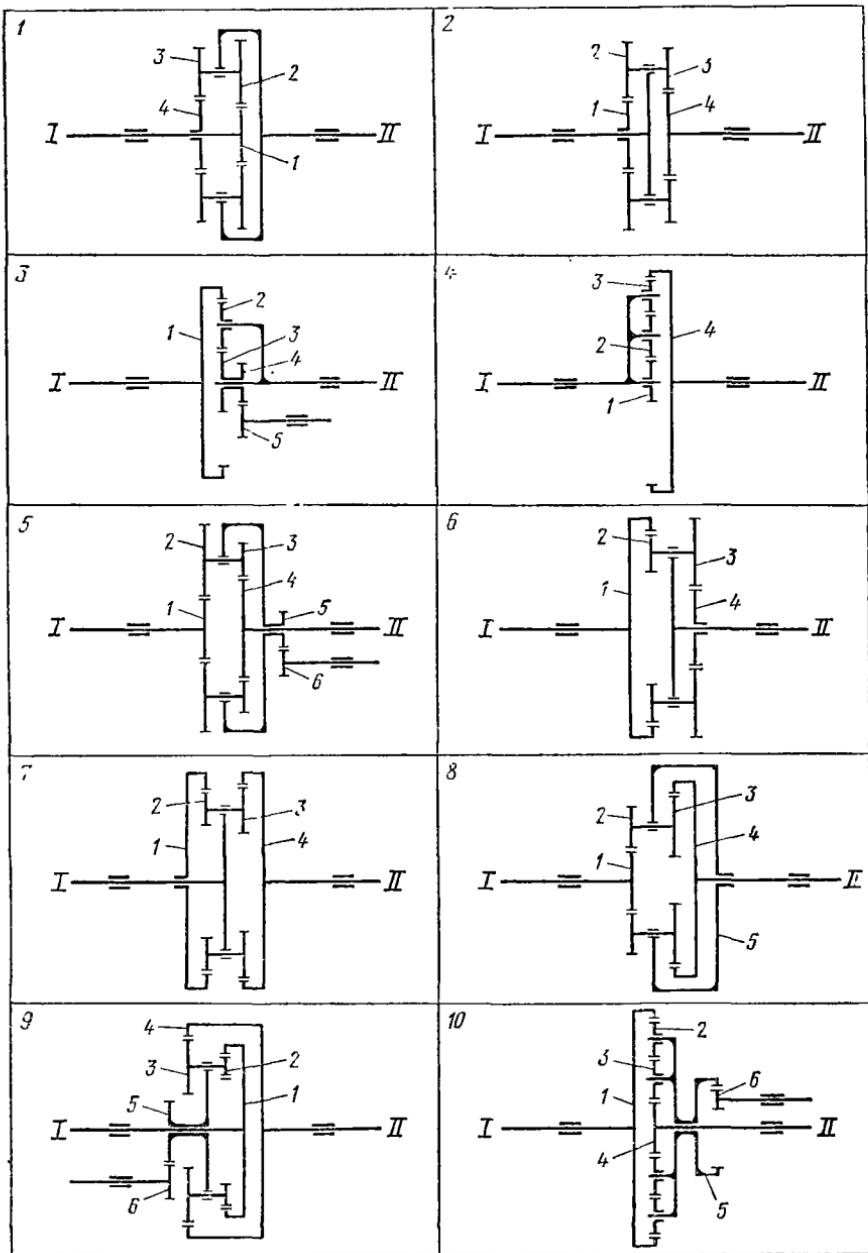


Рис. 126

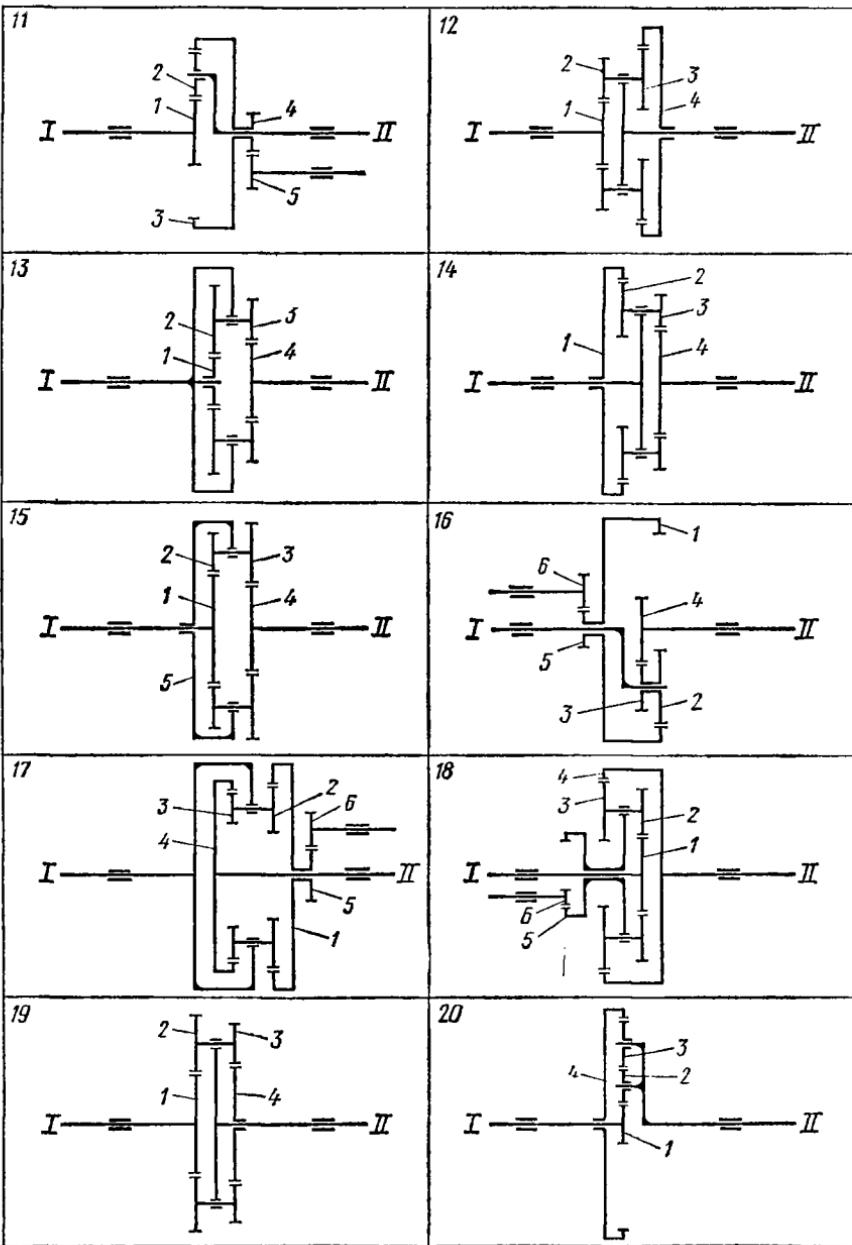


Рис 127

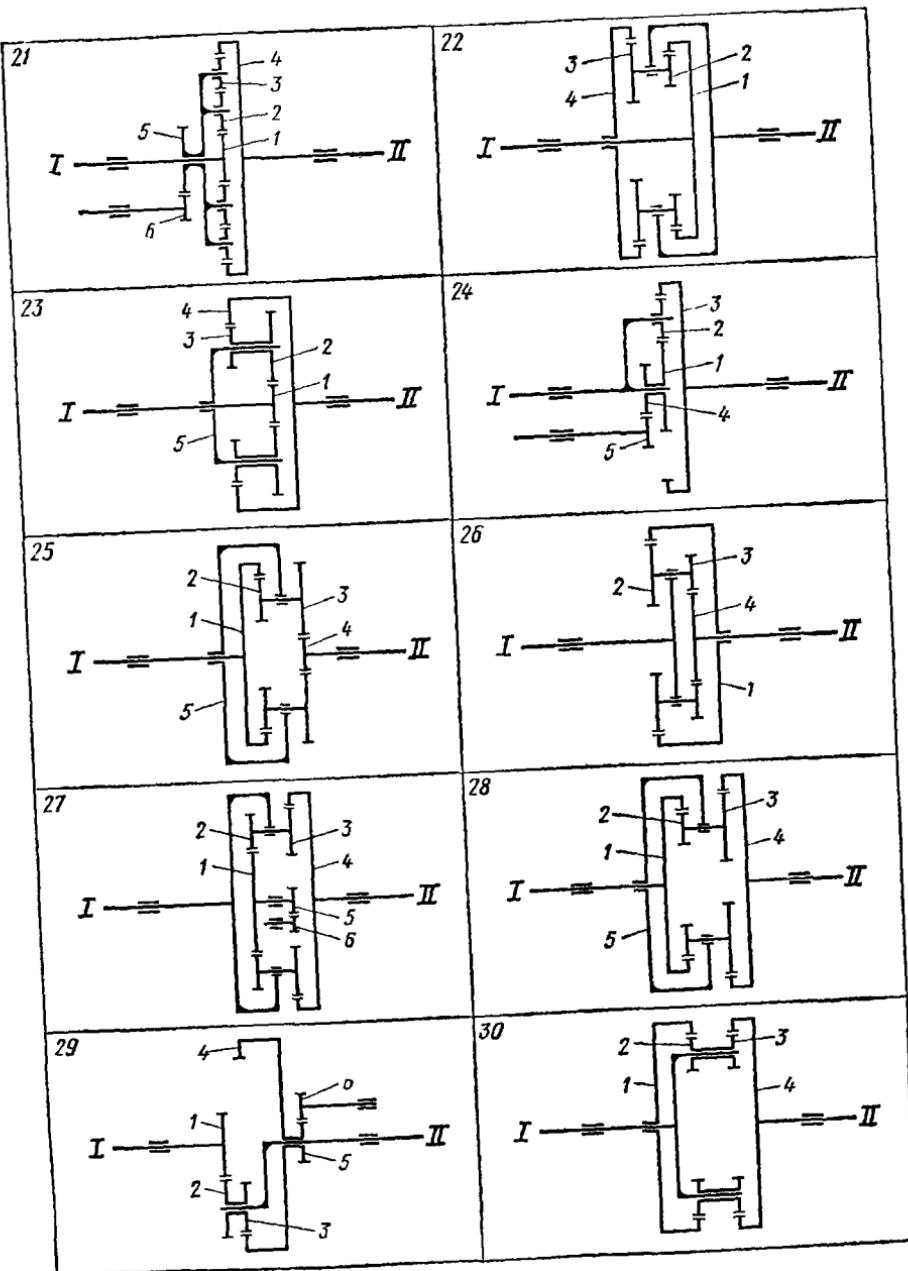


Рис. 128

Решение. 1. Способом Виллиса. Способ Виллиса позволяет определять угловые скорости звеньев механизма, участвующих в двух вращениях: переносном и относительном.

Колеса редуктора участвуют: 1) в относительном вращении (по отношению к водилу) вокруг собственной оси и 2) в переносном вращении вместе с водилом вокруг его оси.

Переносной угловой скоростью для каждого колеса является угловая скорость водила ω_0 .

Относительные угловые скорости колес определяются как разности абсолютных и переносных угловых скоростей:

$$\omega_{1r} = \omega_1 - \omega_0;$$

$$\omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0;$$

.....

$$\omega_{kr} = \omega_k - \omega_0.$$

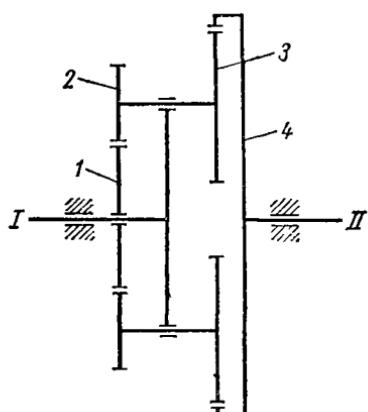


Рис. 129

Эти относительные скорости являются угловыми скоростями всех колес при мысленно остановленном водиле.

В этом случае между относительными угловыми скоростями имеются такие же соотношения, как в зубчатых передачах с неподвижными осями вращений. Следовательно,

$$(\omega_1 - \omega_0)/(\omega_k - \omega_0) = (-1)^m i,$$

где m — число внешних зацеплений между колесами 1 и k ; i — передаточное число от колеса 1 к колесу k в относительном движении (при остановленном водиле).

Это соотношение носит название *формулы Виллиса*.

Отметим, что в эту формулу входят алгебраические значения угловых скоростей; знак «+» примем соответствующим вращению против часовой стрелки, а «—» — вращению по часовой стрелке. В формулу Виллиса вместо угловой скорости ω можно, разумеется, подставить частоту вращения n (об/мин).

Применим формулу Виллиса к решению рассматриваемой задачи (рис. 130, а). Так как колеса 1 и 2 находятся во внешнем зацеплении, а колеса 3 и 4 — во внутреннем и частота вращения водила равна n_1 , то

$$(n_1 - n_1)/(n_4 - n_1) = (-1)^1 \cdot r_2 r_4 / (r_1 r_3),$$

откуда

$$n_4 = n_{11} = n_1 - [r_1 r_3 / (r_2 r_4)] (n_1 - n_1).$$

Подставляя сюда числовые значения, находим

$$n_{11} = 800 - [(30 \cdot 30) / (15 \cdot 75)] (200 - 800) = 1280 \text{ об/мин.}$$

Знак «+» в ответе указывает, что вал II вращается в направлении, противоположном вращению часовой стрелки.

Частоту вращения n_{2-3} шестерен 2—3 (сателлитов) определяем из следующего отношения:

$$(n_1 - n_1)/(n_{2-3} - n_1) = -r_2/r_1,$$

откуда

$$n_{2-3} = n_1 - (r_1/r_2)(n_1 - n_1).$$

Подставляя сюда числовые значения, находим:

$$n_{2-3} = 800 - (30/15)(200 - 800) = 2000 \text{ об/мин.}$$

Вращение шестерен 2—3 также происходит в направлении, противоположном вращению часовой стрелки.

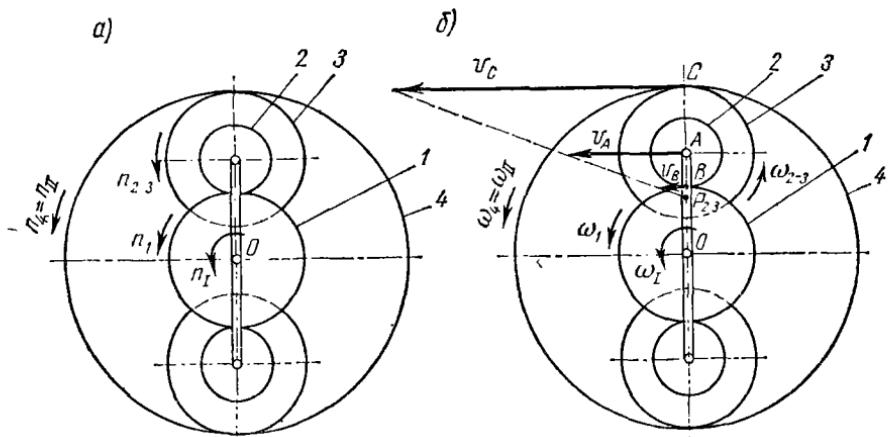


Рис. 130

2. Способом мгновенных центров скоростей. По угловым скоростям ведущих звеньев найдем скорость точки A оси спаренных шестерен и скорость точки B касания колес 1 и 2:

$$\omega_1 = \pi n_1 / 30 = (\pi \cdot 800) / 30 = (80/3) \pi \text{ c}^{-1};$$

$$\omega_1 = \pi n_1 / 30 = (\pi \cdot 200) / 30 = (20/3) \pi \text{ c}^{-1};$$

$$v_A = \omega_1 (r_1 + r_2) = (80/3) \pi \cdot 45 = 1200\pi \text{ см/с;}$$

$$v_B = \omega_1 r_1 = (20/3) \pi \cdot 30 = 200\pi \text{ см/с.}$$

Отложив векторы \vec{v}_A и \vec{v}_B (рис. 130, б), найдем мгновенный центр скоростей шестерен 2—3:

$$(P_{2-3}A)/(P_{2-3}B) = v_A/v_B = 1200\pi/200\pi = 6; \quad P_{2-3}A = 6 \cdot P_{2-3}B.$$

Так как

$$P_{2-3}A - P_{2-3}B = r_2 = 15 \text{ см},$$

то

$$P_{2-3}B = 15/5 = 3 \text{ см}; \quad P_{2-3}A = 18 \text{ см}; \quad P_{2-3}C = 48 \text{ см.}$$

Затем определим скорость точки C :

$$\frac{v_C}{v_A} = \frac{P_2 \cdot 3C}{P_2 \cdot 3A} = \frac{48}{18}; \quad v_C = \frac{48}{18} v_A = \frac{48}{18} 1200\pi = 3200\pi \text{ см/с.}$$

По скорости точки A (или B) находим угловую скорость шестерни 2—3 и частоту их вращения:

$$\omega_{2-3} = \frac{v_A}{P_{2-3}A} = \frac{1200\pi}{18} = \frac{200}{3}\pi \text{ с}^{-1};$$
$$\omega_{2-3} = \frac{\pi n_{2-3}}{30}; \quad n_{2-3} = \frac{30 \cdot \omega_{2-3}}{\pi} = \frac{30 \cdot (200/3) \cdot \pi}{\pi} = 2000 \text{ об/мин.}$$

По скорости точки C находим угловую скорость колеса 4:

$$\omega_4 = \frac{v_C}{r_4} = \frac{3200\pi}{75} = \frac{128\pi}{3} \text{ с}^{-1}.$$

Частота вращения колеса 4

$$n_4 = \frac{30 \cdot \omega_4}{\pi} = \frac{30 \cdot (128/3) \cdot \pi}{\pi} = 1280 \text{ об/мин.}$$

$$n_{II} = n_4 = 1280 \text{ об/мин.}$$

Задание К-12. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора с коническими колесами

Найти угловые скорости ведомого вала II и шестерни 2—3 редуктора с коническими колесами. Схемы редукторов показаны на рис. 131—133, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 44.

Пример выполнения задания. Исходные данные: схема редуктора (рис. 134); радиусы колес: $r_1 = 24$, $r_2 = 30$, $r_3 = 40$, $r_4 = 44$ см, $\omega_1 = 60 \text{ с}^{-1}$, $\omega_1 = -40 \text{ с}^{-1}$.

Решение. 1. *Способом Виллиса.* Способ Виллиса, который изложен в примере выполнения задания К-11, можно применять и для механизма с коническими колесами, т. е. когда оси вращения колес пересекаются. В этом случае надо лишь иметь в виду следующее:

1. зубчатые колеса 2—3 (сателлит) участвуют во вращениях вокруг пересекающихся осей. Поэтому их угловая скорость относительно водила не может быть выражена алгебраической разностью между абсолютной и переносной угловыми скоростями.

2. Знаки передаточного числа от одного колеса к другому в формуле Виллиса определяются из следующего условия: «+» — если, глядя со стороны положительных направлений осей, видеть вращения соответствующих колес происходящими (при остановленном водиле) в одном направлении; «—» — если вращения колес видеть происходящими в разных направлениях.

В рассматриваемой задаче угловая скорость водила равна угловой скорости ведущего вала ω_1 . Угловую скорость сателлита относи-

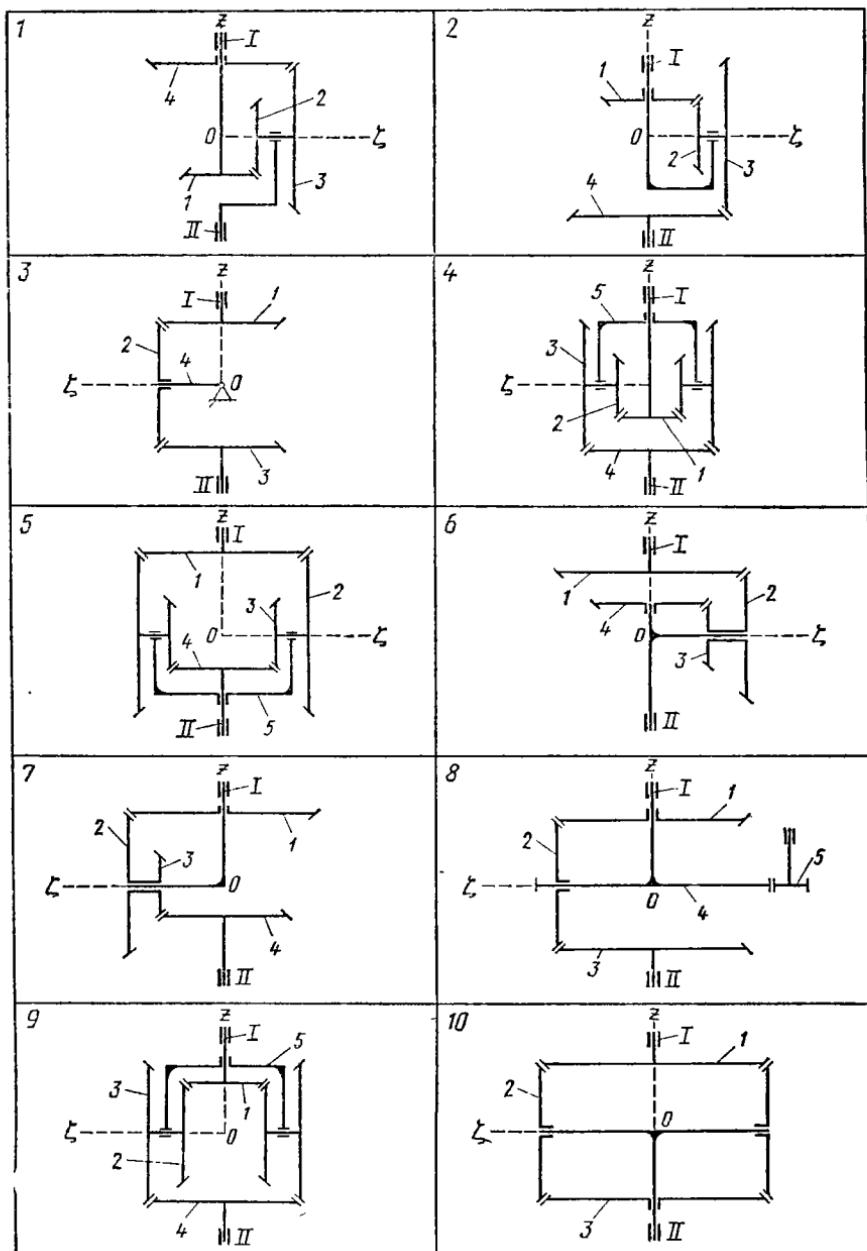


Рис. 131

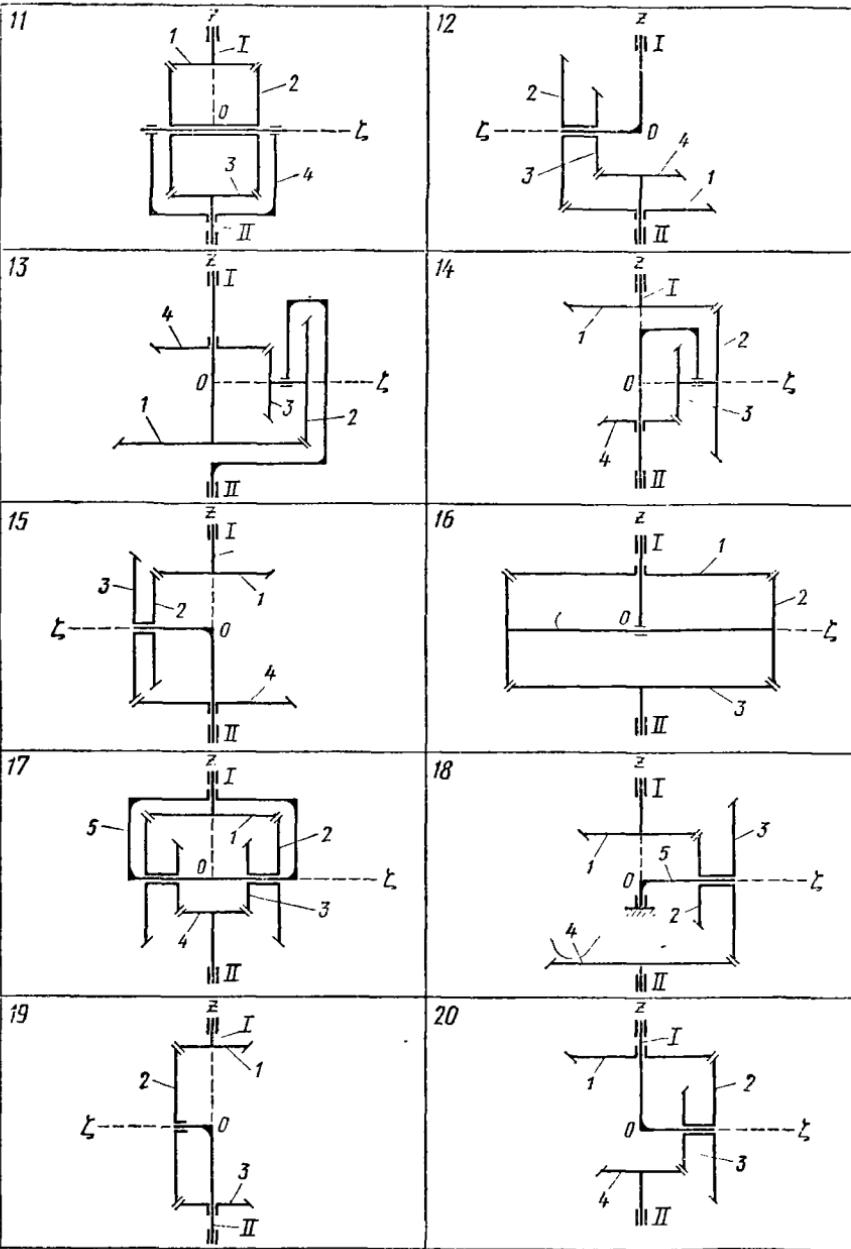


FIG. 132

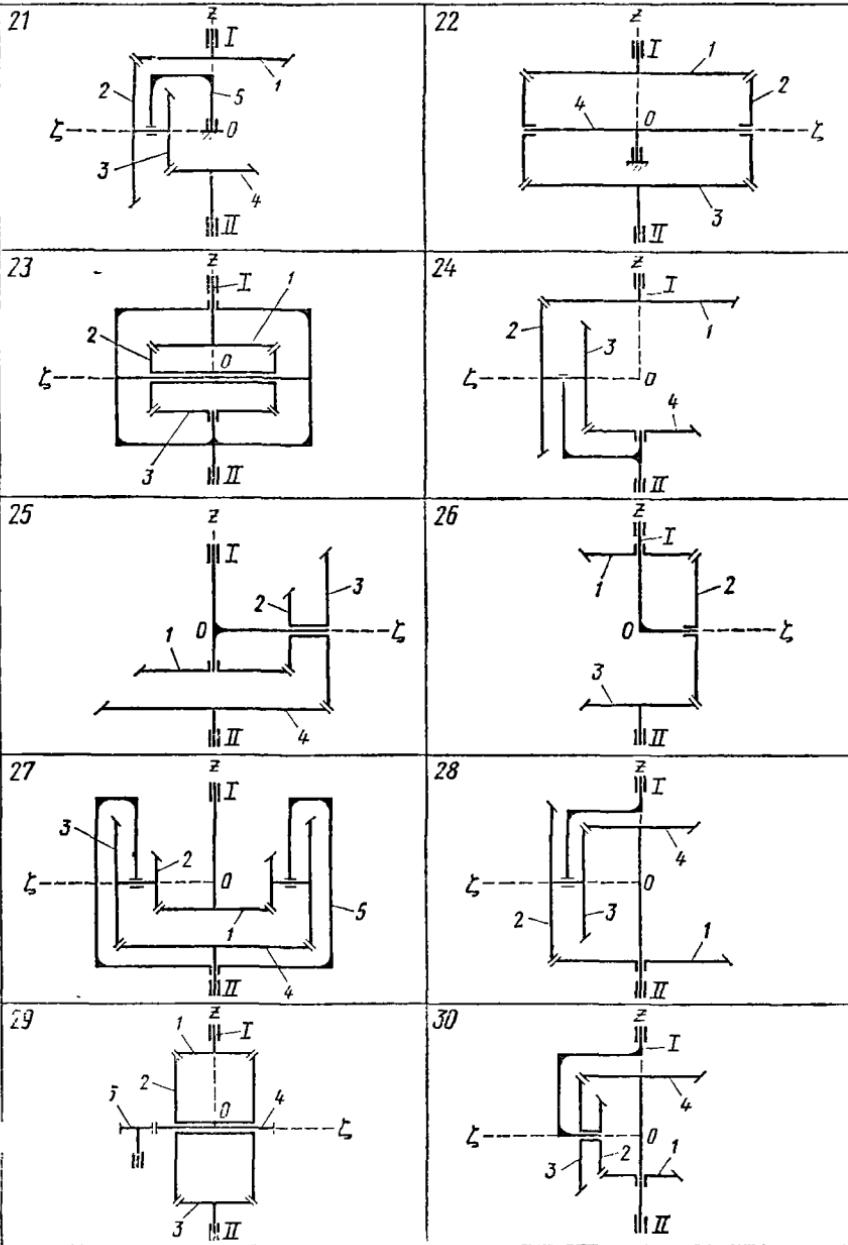


FIG. 133

Таблица 44

Номер варианта (рис. 131—133)	Радиус, см					Угловая скорость, с^{-1}				
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	20	20	40	40	—	320	—	—	50	—
2	15	9	24	24	—	50	—200	—	—	—
3	30	30	30	—	—	100	—	—	40	—
4	30	30	60	60	—	350	—	—	—	80
5	45	45	15	35	—	30	—	—	—	40
6	50	40	20	30	—	60	—	—	—300	—
7	25	19	9	15	—	40	110	—	—	—
8	75	57	75	90	15	—	—90	—	—	340
9	10	13	17	20	—	330	—	—	—	30
10	60	18	60	—	—	80	—	—50	—	—
11	15	17	15	—	—	310	—	—	30	—
12	100	92	52	60	—	20	—10	—	—	—
13	50	28	16	30	—	70	—	—	—150	—
14	40	42	22	22	—	90	—	—	200	—
15	60	60	80	80	—	340	—	—	—80	—
16	35	15	35	—	—	40	70	—	—	—
17	16	16	9	9	—	150	—	—	—	50
18	15	12	21	25	—	200	—	—	—	70
19	20	44	20	—	—	250	—	40	—	—
20	40	42	20	20	—	130	—250	—	—	—
21	60	60	36	30	—	180	—	—	—	30
22	30	13	30	—	—	80	—	—	40	—
23	15	11	15	—	—	110	—	—300	—	—
24	25	21	13	15	—	70	—	—	—50	—
25	20	10	20	30	—	40	150	—	—	—
26	45	60	45	—	—	50	—120	—	—	—
27	30	14	32	50	—	220	—	—	—	40
28	25	20	10	15	—	60	80	—	—	—
29	10	20	10	15	5	310	—	—	—	200
30	15	15	20	20	—	30	—350	—	—	—

Положительный и отрицательный знаки угловых скоростей означают соответственно направление вращения против хода и по ходу часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления соответствующей оси.

тельно водила обозначим ω_{lc} . Тогда для колес 1 и 2 имеем:

$$(\omega_1 - \omega_{lc})/\omega_{lc} = - r_2/r_1. \quad (1)$$

Для колес 3 и 4

$$\omega_{lc}/(\omega_4 - \omega_{lc}) = r_4/r_3. \quad (2)$$

Перемножая (1) и (2), получаем:

$$(\omega_1 - \omega_{lc})/(\omega_4 - \omega_{lc}) = - r_2 r_4 / r_1 r_3,$$

откуда

$$\omega_4 = \omega_{ll} = \omega_1 - (\omega_1 - \omega_{lc}) \cdot r_1 r_3 / r_2 r_4. \quad (3)$$

Подставляя в (3) числовые значения, находим:

$$\omega_{ll} = 60 - (-40 - 60) \cdot (24 \cdot 40) / (30 \cdot 44) = 60 + 72,7 \approx 133 \text{ с}^{-1}.$$

Положительный знак у величины ω_{1c} показывает, что ведомый вал вращается в направлении против вращения часовой стрелки (если смотреть со стороны положительного направления оси Oz).

Для определения угловой скорости сателлита из (1) определяем сначала его угловую скорость относительно водила:

$$\omega_{1c} = - (r_1/r_2) \cdot (\omega_1 - \omega_1)$$

или

$$\omega_{1c} = - 24/30 \cdot (- 40 - 60) = 80 \text{ c}^{-1}.$$

Абсолютная угловая скорость сателлита

$$\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{1c},$$

причем вектор $\vec{\omega}_1$ направлен по оси Oz , а $\vec{\omega}_{1c}$ по $O\xi$.

Так как $\vec{\omega}_{1c}$ и $\vec{\omega}_1$ взаимно перпендикулярны, то

$$\omega_c = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_{1c}^2}$$

или

$$\omega_c = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100 \text{ c}^{-1}.$$

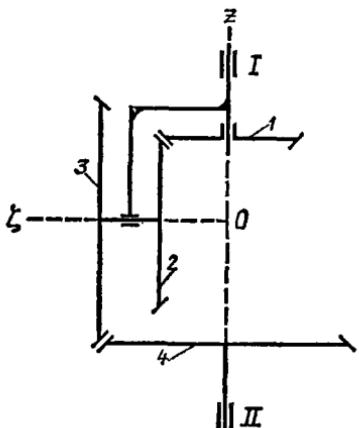


Рис. 134

2. Графическим способом. Графическое решение задачи основано на том, что движение сателлита может рассматриваться как совокупность двух вращательных движений. При этом в качестве пере-

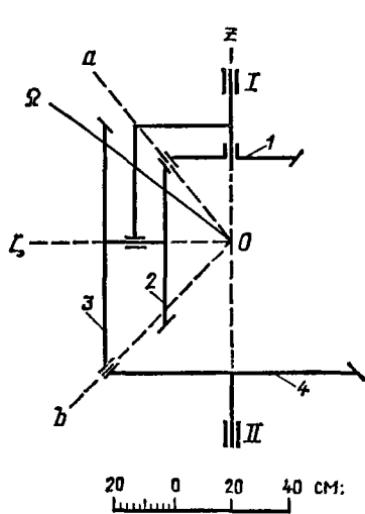


Рис. 135

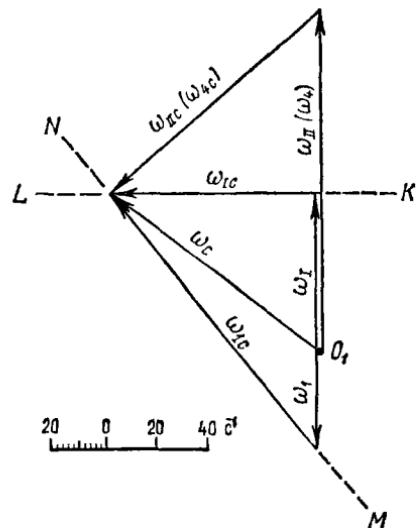


Рис. 136

носного движения можно принять не только вращение водила вокруг оси Oz (как в способе Виллиса), но и вращение колеса 1 или

колеса 4. Следовательно,

$$\vec{\omega}_c = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{1c}; \quad \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{1c}; \quad \vec{\omega}_c = \vec{\omega}_4 + \vec{\omega}_{4c}.$$

Заметим, что линии действия любых двух составляющих вектора $\vec{\omega}_c$ известны. Угловые скорости $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_4$ направлены по оси Oz (рис. 135); $\vec{\omega}_{1c}$ — по оси $O\xi$; $\vec{\omega}_{1c}$ и $\vec{\omega}_{4c}$ — соответственно по линиям Oa и Ob (по мгновенным осям вращения в относительном движении).

Из произвольного полюса O_1 (рис. 136) отложим в выбранном масштабе параллельно оси Oz векторы заданных угловых скоростей $\vec{\omega}_1$ и $\vec{\omega}_4$. Через конец вектора $\vec{\omega}_1$ проводим прямую KL , параллельную $O\xi$ (линии действия $\vec{\omega}_{1c}$); из конца вектора $\vec{\omega}_4$ — прямую MN , параллельную Oa (линии действия $\vec{\omega}_{4c}$). Точка пересечения этих прямых определяет конец вектора $\vec{\omega}_c$, а также $\vec{\omega}_{1c}$ и $\vec{\omega}_{4c}$.

Измерением на чертеже находим

$$\omega_c = 100 \text{ c}^{-1}.$$

Направление $\vec{\omega}_c$ определяет положение мгновенной оси вращения сателлита $O\Omega$ (см. рис. 135).

Для определения $\vec{\omega}_{11}$ разложим $\vec{\omega}_c$ на две составляющие, направленные параллельно Oz и Ob . Полученные векторы представляют собой $\vec{\omega}_{11}$ ($\vec{\omega}_4$) и $\vec{\omega}_{11c}$ ($\vec{\omega}_{4c}$).

Измерением на чертеже находим:

$$\omega_{11} = 135 \text{ c}^{-1}.$$

Направление $\vec{\omega}_{11}$ соответствует положительному знаку угловой скрости ω_{11} , найденной способом Виллиса.

РАЗДЕЛ ТРЕТИЙ

ДИНАМИКА

Задания по динамике тематически разделены на три группы:

- 1) динамика материальной точки (6 заданий),
- 2) динамика механической системы (6 заданий),
- 3) аналитическая механика (14 заданий).

Из четырех заданий первой группы, посвященных дифференциальным уравнениям движения материальной точки, наиболее простым является задание Д-1, в котором рассматривается движение точки под действием постоянных сил. Остальные три задания требуют более глубокого знания теории дифференциальных уравнений.

Во второй группе повышенную трудность представляют задания Д-7 и Д-12. Они могут быть отнесены к работам с элементами самостоятельного исследования.

В третьей группе на каждую из тем даны задания различной сложности и трудоемкости. К числу сравнительно сложных следует отнести задания: Д-14, Д-16, Д-18, Д-20, Д-21, вторую часть задания Д-22, Д-24, Д-25, Д-26. Эти задания требуют более глубокого знания теоретического материала и также содержат элементы самостоятельного исследования.

I. Динамика материальной точки

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил

Варианты 1—5 (рис. 137, схема 1). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, в течение t с. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f .

В точке B тело покидает плоскость со скоростью v_B и попадает со скоростью v_C в точку C плоскости BD , наклоненной под углом β к горизонту, находясь в воздухе T с.

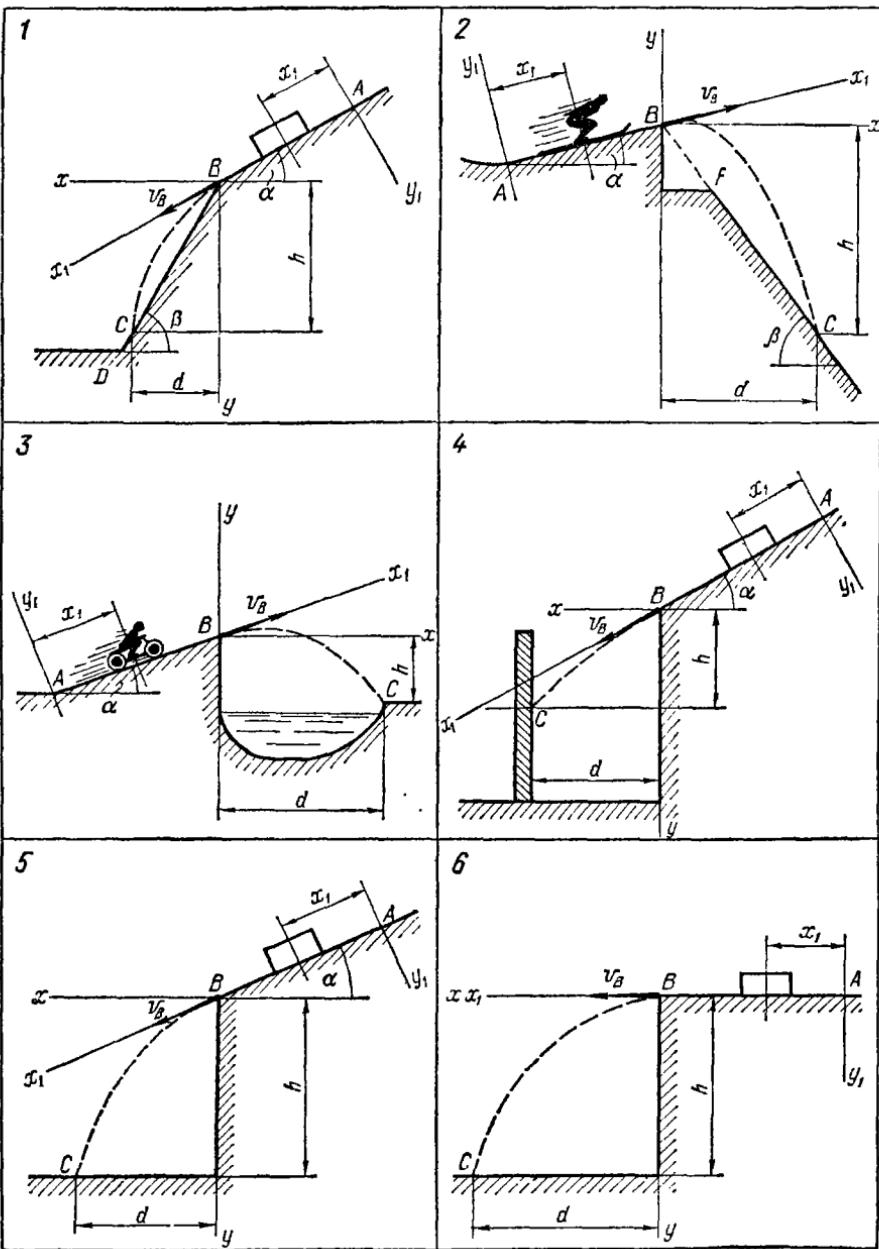


Рис. 137

При решении задачи тело принять за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 1. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,2$; $l = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и h .

Вариант 2. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $v_A = 2$ м/с; $f = 0,2$; $h = 4$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить l и уравнение траектории точки на участке BC .

Вариант 3. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 2,5$ м/с; $f \neq 0$; $l = 8$ м; $d = 10$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить v_B и τ .

Вариант 4. Дано: $v_A = 0$; $\tau = 2$ с; $l = 9,8$ м; $\beta = 60^\circ$; $f = 0$. Определить α и T .

Вариант 5. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $l = 9,8$ м; $\tau = 3$ с; $\beta = 45^\circ$. Определить f и v_c .

Варианты 6—10 (рис. 137, схема 2). Лыжник подходит к точке A участка трамплина AB , наклоненного под углом α к горизонту и имеющего длину l , со скоростью v_A . Коэффициент трения скольжения лыж на участке AB равен f . Лыжник от A до B движется τ с; в точке B со скоростью v_B он покидает трамплин. Через T (с) лыжник приземляется со скоростью v_C в точке C горы, составляющей угол β с горизонтом.

При решении задачи принять лыжника за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 6. Дано: $\alpha = 20^\circ$; $f = 0,1$; $\tau = 0,2$ с; $h = 40$ м; $\beta = 30^\circ$. Определить l и v_C .

Вариант 7. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 16$ м/с; $l = 5$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить v_B и T .

Вариант 8. Дано: $v_A = 21$ м/с; $f = 0$; $\tau = 0,3$ с; $v_B = 20$ м/с; $\beta = 60^\circ$. Определить α и d .

Вариант 9. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $\tau = 0,3$ с; $f = 0,1$; $h = 30\sqrt{2}$ м; $\beta = 45^\circ$. Определить v_B и v_A .

Вариант 10. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $f = 0$; $v_A = 12$ м/с; $d = 50$ м; $\beta = 60^\circ$. Определить τ и уравнение траектории лыжника на участке BC .

Варианты 11—15 (рис. 137, схема 3). Имея в точке A скорость v_A мотоцикл поднимается τ с по участку AB длиной l , составляющему с горизонтом угол α . При постоянной на всем участке AB движущей силе P мотоцикл в точке B приобретает скорость v_B и перелетает через ров шириной d , находясь в воздухе T (с) и приземляясь в точке C со скоростью v_C . Масса мотоцикла с мотоциклистом равна m .

При решении задачи считать мотоцикл с мотоциклистом материальной точкой и не учитывать сил сопротивления движению.

Вариант 11. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P \neq 0$; $l = 40$ м; $v_A = 0$; $v_B = 4,5$ м/с; $d = 3$ м. Определить τ и h .

Вариант 12. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $P = 0$; $l = 40$ м; $v_B = 4,5$ м/с; $h = 1,5$ м. Определить v_A и d .

Вариант 13. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг, $v_A = 0$; $\tau = 20$ с; $d = 3$ м; $h = 1,5$ м. Определить P и l .

Вариант 14. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $m = 400$ кг; $P = 2,2$ кН; $v_A = 0$; $l = 40$ м; $d = 5$ м. Определить v_B и v_C .

Вариант 15. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 0$; $P = 2$ кН, $l = 50$ м; $h = 2$ м; $d = 4$ м. Определить T и m .

Варианты 16—20 (рис. 137, схема 4). Камень скользит в течение τ с по участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l . Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения камня по откосу равен f . Имея в точке B скорость v_B , камень через T с (с) ударяется в точке C о вертикальную защитную стену. При решении задачи принять камень за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 16. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $v_A = 1 \text{ м/с}$; $l = 3 \text{ м}$; $f = 0,2$; $d = 2,5 \text{ м}$. Определить h и T .

Вариант 17. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $l = 6 \text{ м}$; $v_B = 2v_A$; $\tau = 1 \text{ с}$; $h = 6 \text{ м}$. Определить d и f .

Вариант 18. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $l = 2 \text{ м}$; $v_A = 0$; $f = 0,1$; $d = 3 \text{ м}$. Определить h и τ .

Вариант 19. Дано: $\alpha = 15^\circ$; $l = 3 \text{ м}$; $v_B = 3 \text{ м/с}$; $f \neq 0$; $\tau = 1,5 \text{ с}$; $d = 2 \text{ м}$. Определить v_A и h .

Вариант 20. Дано: $\alpha = 45^\circ$; $v_A = 0$; $f = 0,3$; $d = 2 \text{ м}$; $h = 4 \text{ м}$. Определить l и τ .

Варианты 21—25 (рис. 137, схема 5). Тело движется из точки A по участку AB (длиной l) наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Его начальная скорость v_A . Коэффициент трения скольжения равен f . Через τ с тело в точке B со скоростью v_B покидает наклонную плоскость и падает на горизонтальную плоскость в точку C со скоростью v_C ; при этом оно находится в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку и не учитывать сопротивление воздуха.

Вариант 21. Дано: $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$; $v_A = 1 \text{ м/с}$; $\tau = 1,5 \text{ с}$; $h = 10 \text{ м}$. Определить v_B и d .

Вариант 22. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 45^\circ$; $l = 10 \text{ м}$; $\tau = 2 \text{ с}$. Определить f и уравнение траектории на участке BC .

Вариант 23. Дано: $f = 0$; $v_A = 0$; $l = 9,81 \text{ м}$; $\tau = 2 \text{ с}$; $h = 20 \text{ м}$. Определить α и T .

Вариант 24. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 10 \text{ м}$, $d = 12 \text{ м}$. Определить τ и h .

Вариант 25. Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,2$; $l = 6 \text{ м}$, $h = 4,5 \text{ м}$. Определить τ и v_C .

Варианты 26—30 (рис. 137, схема 6). Имея в точке A скорость v_A , тело движется по горизонтальному участку AB длиной l в течение τ с. Коэффициент трения скольжения тела по плоскости равен f . Со скоростью v_B тело в точке B покидает плоскость и попадает в точку C со скоростью v_C , находясь в воздухе T с. При решении задачи принять тело за материальную точку; сопротивление воздуха не учитывать.

Вариант 26. Дано: $v_A = 7 \text{ м/с}$; $f = 0,2$; $l = 8 \text{ м}$; $h = 20 \text{ м}$. Определить d и v_C .

Вариант 27. Дано: $v_A = 4 \text{ м/с}$, $f = 0,1$; $\tau = 2 \text{ с}$; $d = 2 \text{ м}$. Определить v_B и h .

Вариант 28. Дано: $v_B = 3 \text{ м/с}$; $f = 0,3$; $l = 3 \text{ м}$; $h = 5 \text{ м}$. Определить v_A и T .

Вариант 29. Дано: $v_A = 3 \text{ м/с}$; $v_B = 1 \text{ м/с}$; $l = 2,5 \text{ м}$; $h = 20 \text{ м}$. Определить f и d .

Вариант 30. Дано: $f = 0,25$; $l = 4$ м; $d = 3$ м; $h = 5$ м. Определить v_A и τ .

Пример выполнения задания (рис. 138). В железнодорожных скальных выемках для защиты кюветов от попадания в них с откосов каменных осыпей устраивается «полка» DC . Учитывая возможность движения камня из наивысшей точки A откоса и полагая при этом его начальную скорость v_0 равной нулю, определить минимальную ширину полки b и скорость v_C , с которой камень падает на нее. По участку AB откоса, составляющему угол α с горизонтом и имеющему длину l , камень движется τ с.

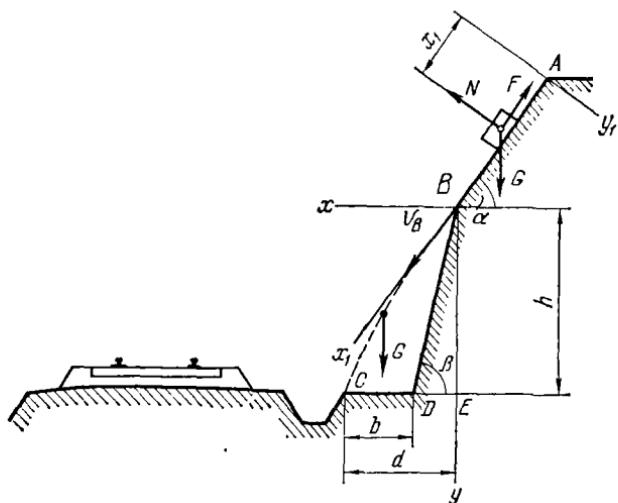


Рис. 138

При решении задачи считать коэффициент трения скольжения f камня на участке AB постоянным, а сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано: $v_A = 0$; $\alpha = 60^\circ$; $l = 4$ м; $\tau = 1$ с; $f \neq 0$; $h = 5$ м; $\beta = 75^\circ$.
Определить b и v_C .

Решение. Рассмотрим движение камня на участке AB . Принимая камень за материальную точку, покажем (см. рис. 138) действующие на него силы: вес G , нормальную реакцию N и силу трения скольжения F . Составим дифференциальное уравнение движения камня на участке AB :

$$m\ddot{x}_1 = \sum X_1; \quad m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - F.$$

Сила трения

$$F = fN,$$

где

$$N = G \cos \alpha.$$

Таким образом,

$$m\ddot{x}_1 = G \sin \alpha - fG \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x}_1 = g \sin \alpha - fg \cos \alpha.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение дважды, получаем:

$$\dot{x}_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t + C_1,$$

$$x_1 = [g (\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \cdot t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования воспользуемся начальными условиями задачи: при $t=0$ $x_{10}=0$ и $\dot{x}_{10}=0$. Составив уравнения, полученные при интегрировании, для $t=0$

$$\dot{x}_{10} = C_1; \quad x_{10} = C_2,$$

найдем постоянные:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x}_1 = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) t;$$

$$x_1 = [g (\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \cdot t^2.$$

Для момента τ , когда камень покидает участок,

$$\dot{x}_1 = v_B; \quad x_1 = l,$$

т. е.

$$v_B = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \tau;$$

$$l = [g (\sin \alpha - f \cos \alpha)/2] \cdot \tau^2,$$

откуда

$$v_B = 2l/\tau,$$

т. е.

$$v_B = (2 \cdot 4)/1 = 8 \text{ м/с.}$$

Рассмотрим движение камня от точки B до точки C .

Показав силу тяжести G , действующую на камень, составим дифференциальные уравнения его движения:

$$m\ddot{x} = 0; \quad m\ddot{y} = G.$$

Интегрируем первое из этих уравнений:

$$\dot{x} = C_3; \quad x = C_3 t + C_4.$$

Постоянные интегрирования C_3 и C_4 определим, используя начальные условия задачи: при $t=0$ $x_0=0$, $\dot{x}_0=v_B \cos \alpha$.

С помощью уравнений, полученных при интегрировании и составленных для $t=0$,

$$\dot{x}_0 = C_3; \quad x_0 = C_4,$$

найдем, что

$$C_3 = v_B \cos \alpha; \quad C_4 = 0.$$

Тогда

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha; \quad x = v_B \cos \alpha \cdot t.$$

Интегрируя уравнение $m\ddot{y} = G$, имеем:

$$\dot{y} = gt + C_5; \quad y = gt^2/2 + C_5 t + C_6.$$

Начальные условия: при $t=0$ $y_0=0$ $\dot{y}_0=v_B \sin \alpha$. Из уравнений, полученных интегрированием и составленных для $t=0$,

$$\dot{y}_0 = C_5; \quad y_0 = C_6,$$

найдем, что

$$C_5 = v_B \sin \alpha \quad \text{и} \quad C_6 = 0.$$

Окончательно

$$\dot{y} = gt + v_B \sin \alpha; \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Таким образом, уравнения движения камня имеют вид

$$x = v_B \cos \alpha \cdot t; \quad y = gt^2/2 + v_B \sin \alpha \cdot t.$$

Уравнение траектории камня найдем, исключив параметр t из уравнений движения. Определив t из первого уравнения и подставив его значение во второе, получаем уравнение параболы:

$$y = \frac{gx^2}{2v_B^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

В момент падения

$$y = h = 5 \text{ м, а } x = d,$$

т. е.

$$5 = \frac{9,81d^2}{2 \cdot 8^2 \cdot 0,5^2} + d \sqrt{3},$$

откуда

$$d_{1,2} = -2,82 \pm 4,93,$$

так что

$$d_1 = 2,11 \text{ м, } d_2 = -7,75 \text{ м.}$$

Поскольку траекторией движения камня является ветвь параболы с положительными абсциссами ее точек, то $d = 2,11 \text{ м.}$

Минимальная ширина полки

$$b = d - ED = d - h / \operatorname{tg} 75^\circ = 2,11 - 5/3,73 = 0,77 \text{ м.}$$

Используя уравнение движения камня $x = v_B \cos \alpha \cdot t$, найдем время T движения камня от точки B до точки C :

$$2,11 = 8 \cdot 0,5T,$$

откуда

$$T = 0,53 \text{ с.}$$

Скорость камня при падении найдем через проекции скорости на оси координат:

$$\dot{x} = v_B \cos \alpha, \quad \dot{y} = gt + v_B \sin \alpha$$

по формуле

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}.$$

Для момента падения $t = T = 0,53 \text{ с}$

$$\begin{aligned} v_C &= \sqrt{(v_B \cos \alpha)^2 + (gT + v_B \sin \alpha)^2} = \\ &= \sqrt{(8 \cdot 0,5)^2 + (9,81 \cdot 0,53 + 8 \cdot 0,87)^2} = 12,8 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Задание Д-2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил

Найти уравнения движения тела M массой m (рис. 139 – 141), принимаемого за материальную точку и находящегося под действием переменной силы $\vec{P} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, при заданных начальных условиях. Во всех вариантах, где показана ось z , эта ось вертикальна, за исключением вариантов 8 и 30.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 45, в которой приняты следующие обозначения: i, j, k – орты координатных осей (соответственно x, y, z); g – ускорение свободного падения ($9,81 \text{ м/с}^2$); f – коэффициент трения скольжения; t – время в с; $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – координаты точки и проекции ее скорости на оси координат соответственно в м и м/с.

Во всех случаях, где сила \vec{P} зависит от x, \dot{x}, z, \dot{z} , рассмотреть движение точки, при котором эти величины только положительны.

Пример выполнения задания. Дано: $m = 1 \text{ кг}$, $\vec{P} = -4r(\vec{i} \cos \varphi + \vec{k} \sin \varphi) H$; $x_0 = 10 \text{ м}$; $z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = 40 \text{ м/с}$ (рис. 142, а).

Найти уравнения движения.

Решение. Материальная точка M находится под действием силы тяжести \vec{G} и силы \vec{P} , линия действия которой проходит через неподвижный центр O (рис. 142, б). Сила \vec{P} притягивает точку M к центру O . Модуль силы прямо пропорционален расстоянию r от точки до полюса O .

В начальный момент времени ($t = 0$) точка M находится на оси x на расстоянии 10 м от начала отсчета и ей сообщается начальная скорость 40 м/с, направленная вверх по вертикали.

Заданные силы \vec{P} , \vec{G} и вектор начальной скорости расположены в плоскости xOz и поэтому дальнейшее движение точки происходит в этой плоскости.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки имеют вид:

$$m\ddot{x} = \sum X_i, \quad m\ddot{z} = \sum Z_i.$$

Сумма проекций сил на оси координат равна:

$$\sum X_i = P_x = -4r \cos \varphi, \quad \sum Z_i = P_z - G = -4r \sin \varphi - G.$$

Так как $\cos \varphi = x/r$, $\sin \varphi = z/r$, то

$$\sum X_i = -4x, \quad \sum Z_i = -4z - G.$$

С учетом исходных данных

$$\ddot{x} = -4x, \quad \ddot{z} = -4z - g$$

или

$$\ddot{x} + 4x = 0; \tag{1}$$

$$\ddot{z} + 4z = -g. \tag{2}$$

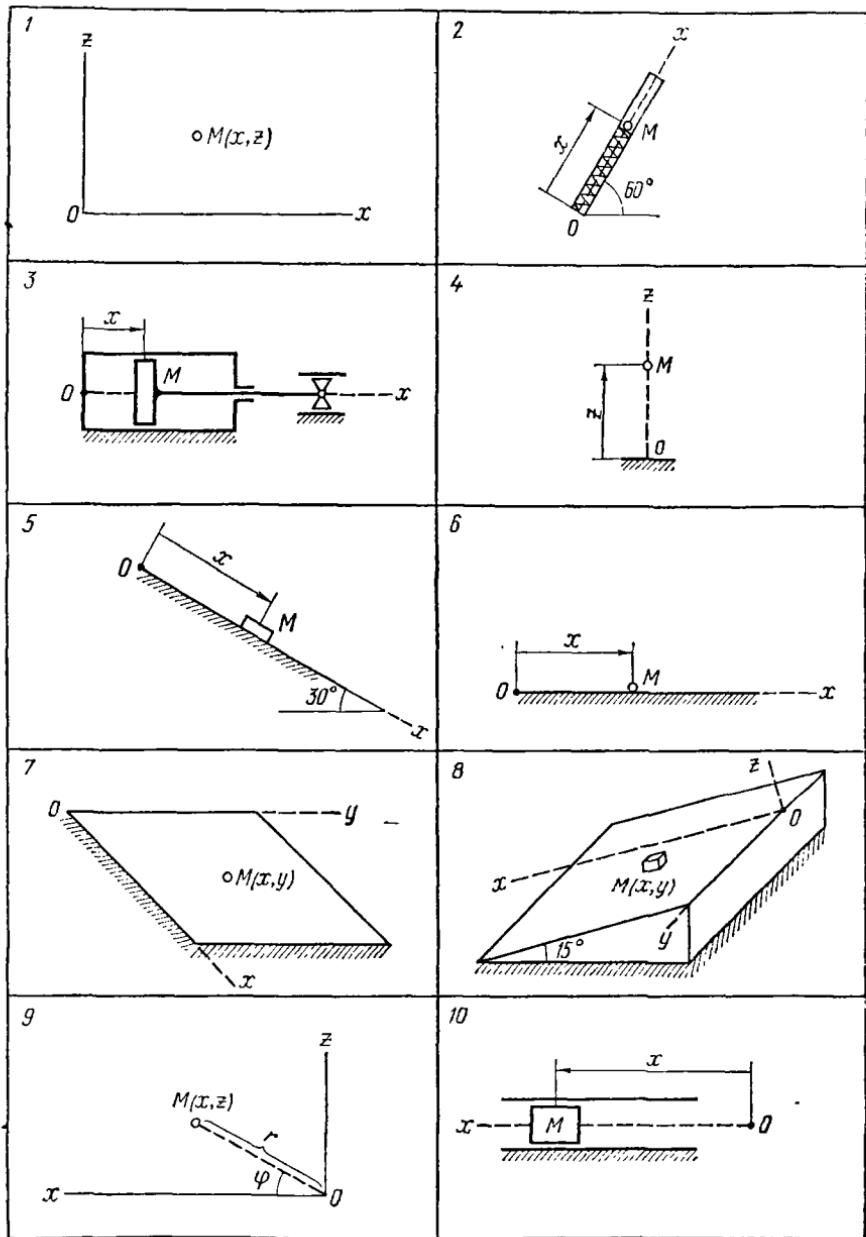
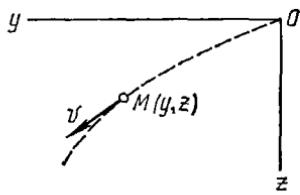
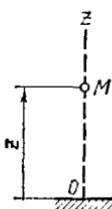


FIG. 139

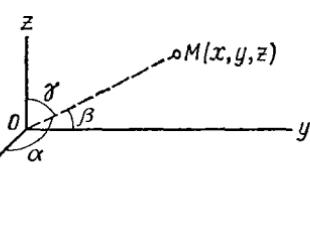
11



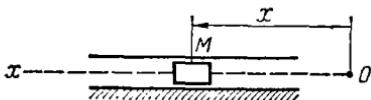
12



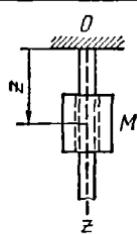
13



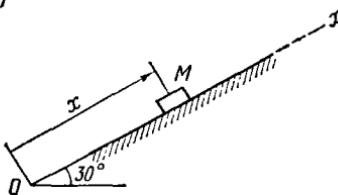
14



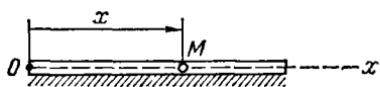
15



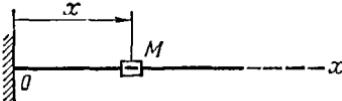
16



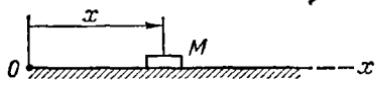
17



18



19



20

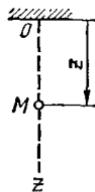
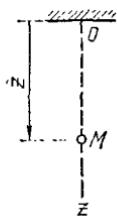
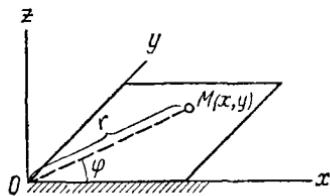


Рис 140

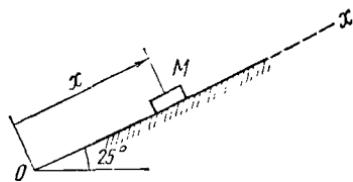
21



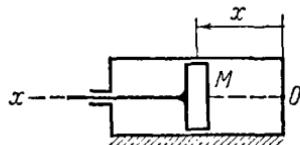
22



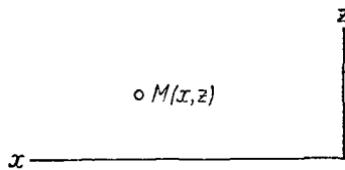
23



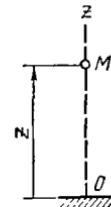
24



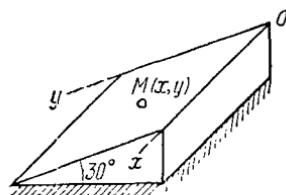
25



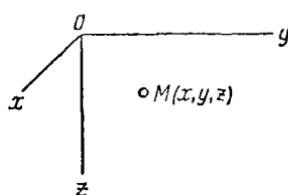
26



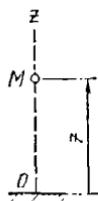
27



28



29



30

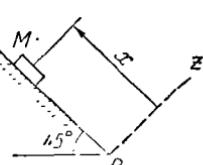


FIG. 141

Таблица 45

Номер варианта (рис. 139—141)	\vec{F} , Н	f	Начальные условия						Примечание
			x_0	y_0	z_0	\dot{x}_0	\dot{y}_0	\dot{z}_0	
			м	м	м	м/с	м/с	м	
1	2	$-0,5(\vec{x} + \vec{z})$	—	0	—	0	20	20	—
2	0,25	$100\vec{x}_t$	0,3	0,03	—	—	0,5	—	—
3	2	$-(20x - 4x)\vec{t}$	0	0,15	—	—	1	—	—
4	m	$-\mu z^2 \vec{k}$	—	—	—	a	—	—	$\sqrt{\frac{2\mu}{ma}}$ Учтеть только силу \vec{P} , μ , a — полу- ожительные по- стоянные
5	50	$-(5x - 25x)\vec{t}$ $-m\mu x^{-3}\vec{t}$	0	0	—	—	1	—	—
6	m	$4\vec{t} \cos(\pi t/6) + \vec{y}_f$	0	0	0	—	v_0	—	—
7	2	$120t(\vec{t} \cos 30^\circ + \vec{z} \sin 30^\circ)$	0	0	0	0	0,5	2	—
8	150	$4r(\vec{t} \cos \varphi + \vec{z} \sin \varphi)$ $-3\sqrt{x}\vec{t}$ $-3\vec{v}$	—	0	—	2	5	—	0
9	1	$-3\vec{v}$	0	0	—	—	16	—	—
10	1	$-3\vec{v}$	—	—	0	0	—	15	0
11	20	$-R$	—	—	—	R	—	—	$\sqrt{2gR}$ Рассмотреть движе- ние при $y > 0$, $z > 0$
12	m	$-mgR^2 z \vec{y}$	—	—	—	—	—	—	$\sqrt{2gR}$ Учтеть только силу \vec{P} , $R > 0$ (const)

13	m	$-9mr(\vec{t} \cos \alpha + \vec{r} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma)$	$-$	1	0	1	$-$
14	$1,5$	$(4,5 \div \dot{z}x) \vec{t}$	$0,1$	2	2	$0,3$	$-$
15	$1,5$	$(6 - 1,5z + 3\dot{z}) \vec{k}$	0	1	$-$	1	$-$
16	100	$-20\vec{r} \vec{t}$	0	0	$-$	$2,5$	$-$
17	1	$5(1 - e^{-2t}) \vec{t}$	0	0	$-$	0	$-$
18	2	$-6x^2 \vec{t}$	0	0	$-$	10	$-$
19	6	$(30e^{-3t} - 18\dot{x} - 12x) \vec{t}$	0	0	$-$	10	$-$
20	$0,1$	$-0,2\dot{z} \vec{k}$	$-$	$-$	200	$-$	$-$
21	$0,1$	$0,1\dot{z}^3 \vec{k}$	$-$	$-$	$-$	300	$-$
22	m	$-4mr(\vec{t} \cos \varphi + \vec{r} \sin \varphi)$	0	20	0	0	0
23	100	$50(3+x) \vec{t}$	$0,2$	0	$-$	1	$-$
24	3	$-3(3x+2\dot{x}) \vec{t}$	0	0	$-$	2	$-$
25	$1,5$	$-\vec{t}, \vec{z}(x^2 \vec{t} - 2g \vec{k})$	$-$	0	$-$	100	4
26	$0,1$	$-(2\dot{z}^3 - 0,981) \vec{k}$	$-$	$-$	$-$	0	$-$
27	2	$3t \vec{t}$	0	0	$-$	3	0
28	4	$-2(x \vec{t} + y \vec{r} + z \vec{k})$	$-$	0	0	1	2
29	$0,01$	$-3 \vec{t} \vec{z} \vec{k}$	$-$	$-$	$-$	0	$-$
30	100	$120(7,5+t)(\vec{t} \cos 30^\circ + \vec{k} \sin 30^\circ)$	$0,25$	0	$-$	$0,5$	0

Учестъ только силы
 \vec{P}

Влиянием силы ги-
жести пренебречь

Уравнения (1) и (2) — линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; первое из них однородное, а второе неоднородное.

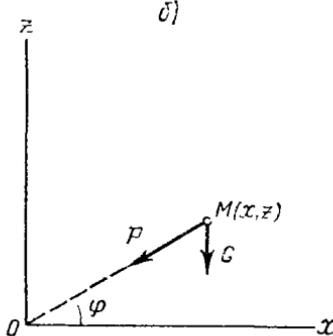
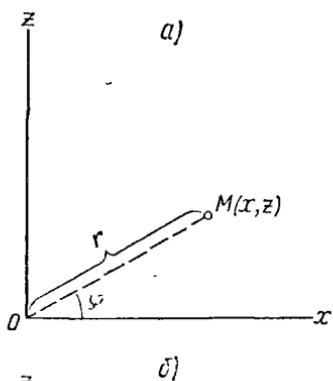


Рис. 142

Характеристическое уравнение для уравнения (1):

$$u^2 + 4 = 0. \quad (3)$$

Корни этого уравнения:

$$u_{1,2} = \pm 2i, \quad (i = \sqrt{-1}). \quad (4)$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \quad (5)$$

Дифференцируя по времени (5), получаем:

$$\dot{x} = 2(-C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t). \quad (6)$$

Постоянные интегрирования C_1 , C_2 находим из начальных условий

$$10 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0;$$

$$0 = 2(-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cos 0),$$

откуда

$$C_1 = 10, \quad C_2 = 0. \quad (7)$$

Искомое уравнение движения $x = x(t)$:

$$x = 10 \cos 2t. \quad (8)$$

Общий интеграл неоднородного уравнения (2) имеет вид:

$$z = z^* + z^{**}, \quad (9)$$

где z^* — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{z} + 4z = 0, \quad (10)$$

z^{**} — частное решение неоднородного уравнения (2).

Уравнения (1) и (10) аналогичны и поэтому общий интеграл уравнения (10) имеет вид:

$$z^* = C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t. \quad (11)$$

Частное решение z^{**} следует искать в виде

$$z^{**} = A = \text{const}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (2), получаем:

$$0 + 4A = -g, \quad A = -g/4 = -2,45. \quad (13)$$

Таким образом,

$$z = C_3 \cos 2t + C_4 \sin 2t - 2,45. \quad (14)$$

Дифференцируя (14) по времени, получаем:

$$\ddot{z} = 2(-C_3 \sin 2t + C_4 \cos 2t). \quad (15)$$

С учетом начальных условий уравнения (14) и (15) при $t=0$ получают вид

$$0 = C_3 \cdot 1 + C_4 \cdot 0 - 2,45;$$

$$40 = 2(-C_3 \cdot 0 + C_4 \cdot 1),$$

откуда

$$C_3 = 2,45; \quad C_4 = 20.$$

Окончательно

$$z = 2,45 \cos 2t + 20 \sin 2t - 2,45 \text{ (м).} \quad (16)$$

Уравнения (8) и (16) являются решением задачи.

Задание Д-3. Исследование колебательного движения материальной точки

Варианты 1-5 (рис. 143). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 2 и 4) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 1, 3, 5), отнеся их движение к оси x ; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Стержень, соединяющий грузы, считать невесомым и недеформируемым.

Вариант 1. Груз D ($m_D = 2$ кг) прикреплен к брускам AB , подвешенному к двум одинаковым параллельным пружинам, коэффициент жесткости каждой из которых $c = 3$ Н/см. Точка прикрепления груза D находится на равных расстояниях от осей пружин.

В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1$ кг). Сопротивление движению системы двух грузов пропорционально скорости: $R = 12 v$ (Н), где v — скорость (м/с).

Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, прикрепленной к бруску, пренебречь.

Вариант 2. В момент, когда стержень, соединяющий грузы D ($m_D = 1$ кг) и E ($m_E = 2$ кг), перерезают, точка B (верхний конец последовательно соединенных пружин) начинает совершать движение по закону $\xi = 1,5 \sin 18t$ (см) (ось ξ направлена вертикально вниз). Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 12$ Н/см, $c_2 = 36$ Н/см.

Вариант 3. Груз D ($m_D = 0,8$ кг) висит на пружине, прикрепленной к точке F бруска AB и имеющей коэффициент жесткости $c_1 = 10$ Н/см. Бруск подвешен к двум параллельным пружинам, коэффициенты жесткости которых $c_2 = 4$ Н/см, $c_3 = 6$ Н/см; точка F находится на расстояниях a и b от осей этих пружин: $a/b = c_3/c_2$.

В некоторый момент времени к грузу D подвешивают груз E ($m_E = 1,2$ кг). В этот же момент системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0,2$ м/с направленную вниз. Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 4. Статическая деформация двух одинаковых параллельных пружин под действием грузов D ($m_D = 0,5$ кг) и E ($m_E = 1,5$ кг) $f_{ct} = 4$ см. Грузы подвешены к пружинам с помощью абсолютно

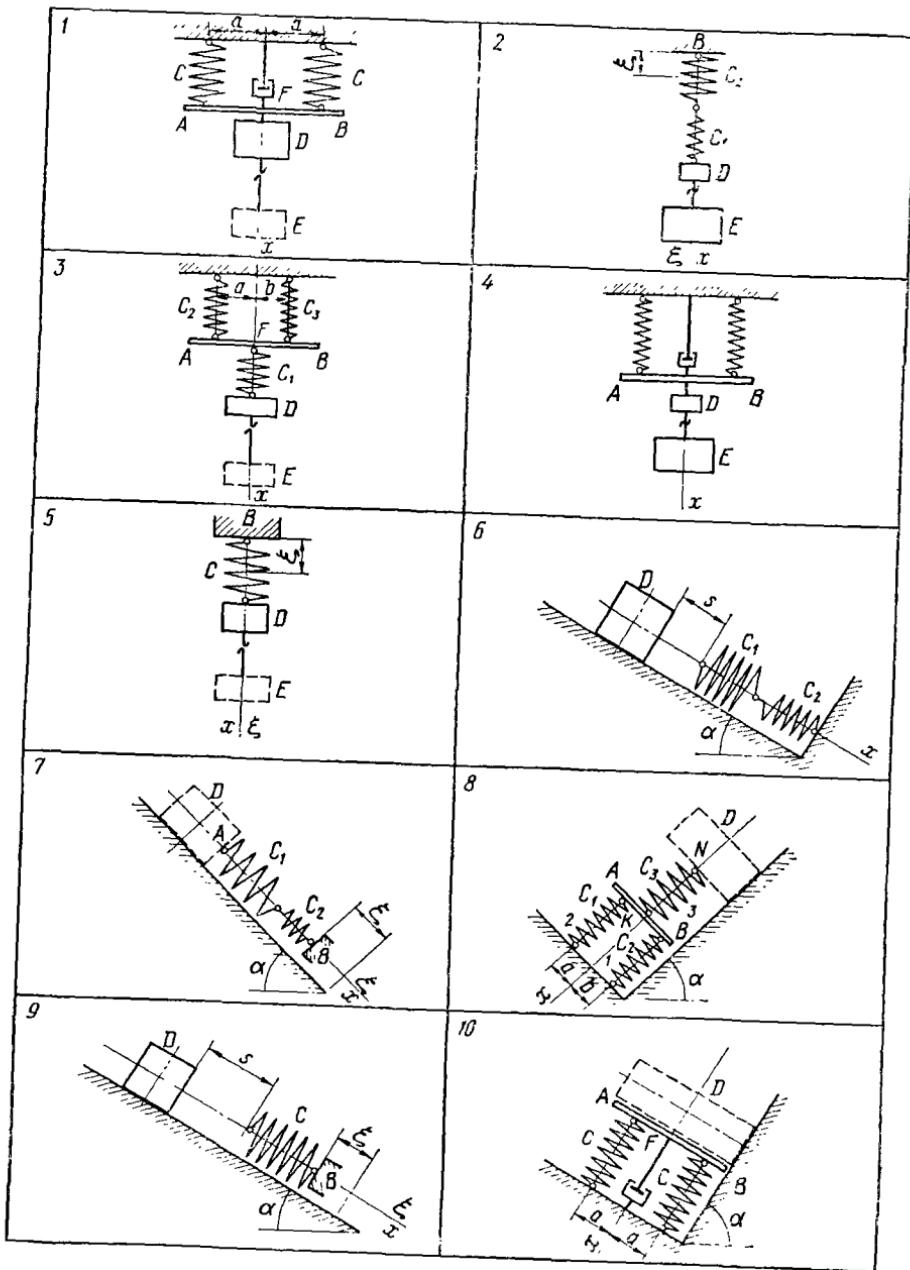


FIG. 143

жесткого бруска AB . В некоторый момент времени стержень, соединяющий грузы, перерезают. Сопротивление движению груза D пропорционально скорости $R = 6v$ (N), где v — скорость (м/с). Массой бруска и массой, прикрепленной к бруску части демпфера, пренебречь.

Вариант 5. Одновременно с подвешиванием к грузу D ($m_D = 1,6$ кг), висящему на пружине, коэффициент жесткости которой $c = 4$ Н/см, груза E ($m_E = 2,4$ кг) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 2 \sin 5t$ (см) (ось ξ направлена вертикально вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$)

Варианты 6—10 (рис. 143). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α , с момента соприкосновения груза с пружиной или с системой пружин, предполагая, что при дальнейшем движении груз от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x , приняв за начало отсчета положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 6. Пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) расстояние $s = 0,1$ м, груз D ($m = 4$ кг) ударяется о недеформированные, последовательно соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости $c_1 = 48$ и $c_2 = 24$ Н/см.

Вариант 7. В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) присоединяют без начальной скорости к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 12$, $c_2 = 6$ Н/см. В тот же момент времени ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45^\circ$) по закону $\xi = 0,02 \sin 20t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз)

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$)

Вариант 8. Две параллельные пружины 1 и 2 , имеющие коэффициенты жесткости $c_1 = 4$ Н/см и $c_2 = 6$ Н/см, соединены абсолютно жестким бруском AB , к точке K которого прикреплена пружина 3 с коэффициентом жесткости $c_3 = 15$ Н/см. Точка K находится на расстояниях a и b от осей пружин 1 и 2 $a/b = c_2/c_1$. Пружины 1 , 2 и 3 не деформированы. Груз D массой 1,5 кг присоединяют к концу N пружины 3 , в тот же момент грузу D сообщают скорость $v_0 = 0,5$ м/с, направленную вниз параллельно наклонной плоскости ($\alpha = 45^\circ$). Массой бруска AB пренебречь.

Вариант 9. Груз D ($m = 1,2$ кг), пройдя без начальной скорости по наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) расстояние $s = 0,2$ м, ударяется о недеформированную пружину, коэффициент жесткости которой $c = 4,8$ Н/см. В этот же момент ($t = 0$) точка B (нижний конец пружины) начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0,03 \sin 12t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз) (см. примечание к варианту 7).

Вариант 10. Груз D ($m = 1$ кг) прикрепляют к середине абсолютно жесткого бруска AB , соединяющего концы двух одинаковых параллельных пружин, не сообщая начальной скорости; пружины не деформированы. Коэффициенты жесткости пружин $c = 1,5$ Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 8v$ (Н), где v — скорость (м/с); $\alpha = 60^\circ$. Массой бруска AB и массой прикрепленной к бруски части демпфера пренебречь.

Варианты 11—15 (рис. 144). Груз D массой m укреплен на конце невесомого стержня, который может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси E . Груз соединен с пружиной или с системой пружин; вертикальное положение стержня соответствует недеформированным пружинам. Считая, что груз D , принимаемый за материальную точку, движется по прямой, определить уравнение движения этого груза.

Движение отнести к оси x , за начало отсчета принять точку, соответствующую положению покоя груза (при недеформированных пружинах).

Вариант 11. Груз D ($m = 2,4$ кг) соединен с точкой F бруска AB , связывающего концы двух параллельных пружин, коэффициенты жесткости которых $c_1 = 1$ Н/см и $c_2 = 1,4$ Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$.

Груз D отклоняют на величину $\lambda = 2$ см влево от положения, соответствующего вертикальному положению стержня, и отпускают без начальной скорости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 6v$ (Н), где v — скорость (м/с). Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой демпфера пренебречь.

Вариант 12. В некоторый момент времени груз D ($m = 3$ кг), удерживаемый в положении, при котором пружина сжата на величину $\lambda = 2$ см, отпускают без начальной скорости. Коэффициент жесткости пружины $c = 9$ Н/см. Одновременно ($t = 0$) точка B (правый конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = 1,2 \sin 8t$ (см) (ось ξ направлена горизонтально влево).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 13. Груз D ($m = 1$ кг) прикреплен к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости $c_1 = 12$ Н/см и соединенной другим концом с точкой F бруска AB . Бруск AB связывает концы двух параллельных пружин, коэффициент жесткости каждой из которых $c = 3$ Н/см. Точка F находится на равных расстояниях от осей параллельных пружин. Грузу при вертикальном положении стержня сообщают скорость $v_0 = 0,5$ м/с, направленную вправо.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = -12v$ (Н), где v — скорость (м/с).

Шток демпфера пропущен через отверстие в невесомом бруске AB и соединен с грузом D .

Вариант 14. Груз D ($m = 1,5$ кг) прикреплен одной стороной к концу пружины, имеющей коэффициент жесткости $c_1 = 4,4$ Н/см, а другой стороной — к концу двух последовательно соединенных пружин, коэффициенты жесткости которых $c_2 = 2$, $c_3 = 8$ Н/см.

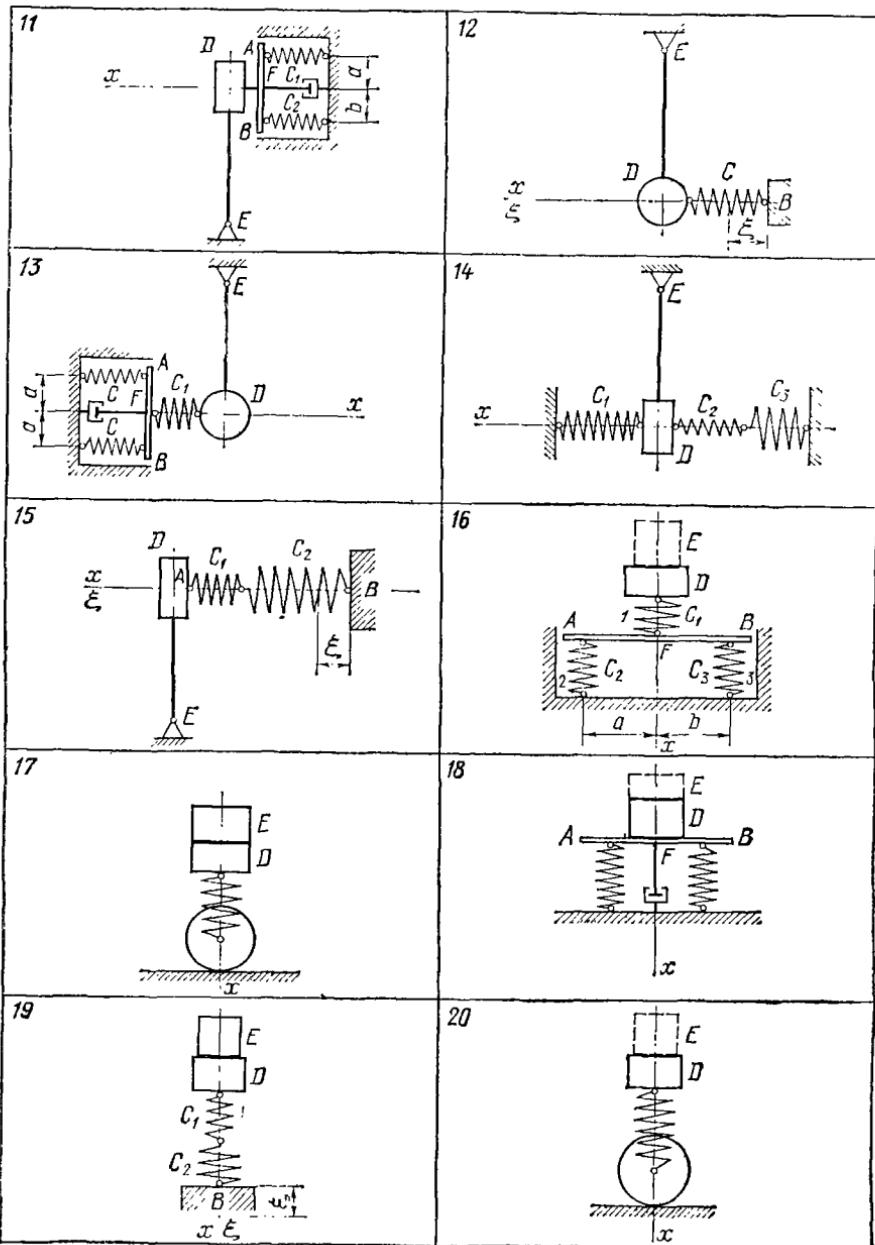


Рис. 144

Груз отклоняют на величину $\lambda = 2,5$ см влево от его положения, соответствующего вертикальному положению стержня, и отпускают, одновременно сообщая грузу начальную скорость $v_0 = 0,4$ м/с, направленную вправо.

Вариант 15. Груз D ($m = 1$ кг) прикреплен к концу A последовательно соединенных пружин. Другой конец пружин B движется по закону: $\xi = 1,8 \sin 12t$ (см) (ось ξ направлена горизонтально влево). Коэффициенты жесткости пружин: $c_1 = 4$, $c_2 = 12$ Н/см. При $t = 0$ груз находился в положении покоя, соответствующем недеформированным пружинам (см. примечание к варианту 12).

Варианты 16—20 (рис. 144). Найти уравнение движения груза D массой m_D (варианты 17 и 19) или системы грузов D и E массами m_D и m_E (варианты 16, 18, 20), относя движение к оси x ; начало отсчета совместить с положением покоя груза D или соответственно системы грузов D и E (при статической деформации пружин). Предполагается, что грузы D и E при совместном движении не отделяются.

Вариант 16. Пружина I , на которой поконится груз D ($m_D = 10$ кг), опирается в точке F на бруск AB , соединяющий концы двух параллельных пружин 2 и 3 . Коэффициенты жесткости пружин I , 2 и 3 : $c_1 = 200$, $c_2 = 160$, $c_3 = 140$ Н/см.

Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружин 2 и 3 : $a/b = c_3/c_2$.

В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E ($m_E = 20$ кг); одновременно системе грузов сообщают скорость $v_0 = 0,4$ м/с, направленную вниз.

Массой абсолютно жесткого бруска AB пренебречь.

Вариант 17. В некоторый момент времени груз E снимают с груза D (оба груза находятся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины). Циклическая частота собственных колебаний системы грузов D и E на пружине $k = 20$ с⁻¹, отношение масс $m_D/m_E = 2/3$.

Вариант 18. Статическая деформация каждой из двух одинаковых параллельных пружин под действием груза D ($m_D = 20$ кг) равна $f_{c1D} = 2$ см. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E ($m_E = 10$ кг). Сопротивление движению грузов пропорционально скорости: $R = 60\sqrt{3}v$ (Н), где v — скорость (м/с). Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, связанной с ним, пренебречь.

Вариант 19. Два груза D и E ($m_D = 15$ кг, $m_E = 25$ кг) покоятся на последовательно соединенных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 250$ Н/см и $c_2 = 375$ Н/см. В момент, когда снимают груз E , точка B опирания пружин начинает совершать движение по закону $\xi = 0,5 \sin 30t$ (см) (ось ξ направлена вертикально вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 20. На груз D , находящийся в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины, в некоторый момент времени устанавливают груз E . В этот же момент времени системе

двух грузов сообщают скорость $v_0 = 0,3$ м/с, направленную вниз. Циклическая частота собственных колебаний груза D на пружине $\omega_D = 24$ с¹, отношение масс $m_f/m_D = 3$.

Варианты 21—25 (рис. 145). Найти уравнение движения груза D массой m по гладкой наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α , относя движение к оси x ; за начало отсчета принять положение покоя груза (при статической деформации пружин).

Вариант 21. В некоторый момент времени груз D ($m = 2$ кг) прикрепляют к концам недеформированных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 7$ и $c_2 = 3$ Н/см; одновременно грузу сообщают скорость $v_0 = 0,4$ м/с, направленную вдоль наклонной плоскости ($\alpha = 45^\circ$) вниз.

Вариант 22. Груз D находится на наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины $f_{ct} = 2$ см. В некоторый момент времени ($t = 0$) точка B (верхний конец пружины) начинает совершать движение по закону $\xi = -0,01 \sin 10t$ (м) (ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз).

Примечание. Положение начала отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Вариант 23. Груз D ($m = 3$ кг) прикрепляют к точке F бруска AB , соединяющего концы двух недеформированных параллельных пружин, и отпускают без начальной скорости. Коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 2$ и $c_2 = 4$ Н/см. Точка F находится на расстояниях a и b от осей пружины: $a/b = c_2/c_1$; $\alpha = 60^\circ$.

Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = -12v$ (Н), где v — скорость (м/с). Массой бруска AB и массой демпфера пренебречь.

Вариант 24. В некоторый момент времени груз D ($m = 1$ кг) прикрепляют к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 12$ и $c_2 = 4$ Н/см, и отпускают без начальной скорости.

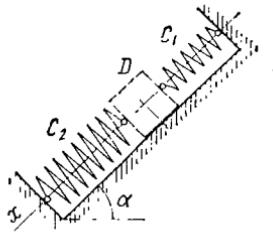
Одновременно ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение по закону $\xi = 1,5 \sin 10t$ (см). Ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз ($\alpha = 30^\circ$) (см. примечание к варианту 22).

Вариант 25. Концы двух одинаковых параллельных пружин соединены бруском AB . Статическая деформация каждой из пружин под действием груза D ($m = 1,5$ кг), находящегося на наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$), $f_{ct} = 4,9$ см. В некоторый момент грузу D сообщают скорость $v_0 = 0,3$ м/с, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Сопротивление движению груза пропорционально скорости груза: $R = 6v$ (Н), где v — скорость (м/с).

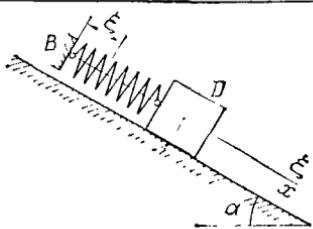
Массой абсолютно жесткого бруска AB и массой части демпфера, связанной с бруском, пренебречь.

Варианты 26—30 (рис. 145). Пренебрегая массой плиты и считая ее абсолютно жесткой, найти уравнение движения груза D массой m с момента соприкосновения его с плитой, предполагая, что при дальнейшем движении груз от плиты не отделяется.

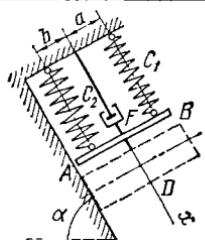
21



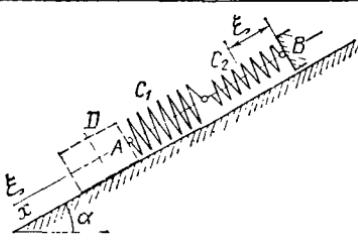
22



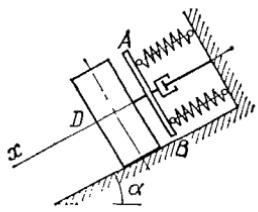
23



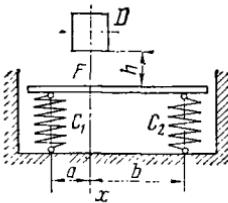
24



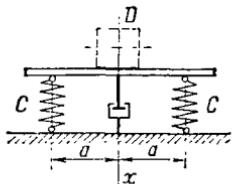
25



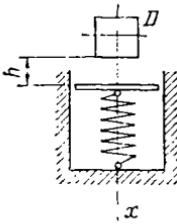
26



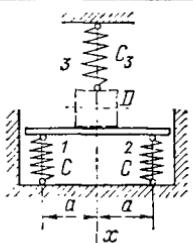
27



28



29



30

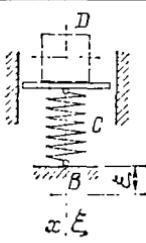


FIG. 145

Движение груза отнести к оси x , приняв за начало отсчета положение покоя этого груза (при статической деформации пружин).

Вариант 26. Плита лежит на двух параллельных пружинах, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 600$ и $c_2 = 400$ Н/см. Груз D ($m = 50$ кг) падает без начальной скорости с высоты $h = 0,1$ м в точку F плиты, находящуюся на расстояниях a и b от осей пружин: $a/b = c_2/c_1$.

Вариант 27. Коэффициент жесткости каждой из двух параллельных пружин, на которых лежит плита, $c = 130$ Н/см. Груз D ($m = 40$ кг) устанавливают на середину плиты и отпускают без начальной скорости при недеформированных пружинах. Сопротивление движению груза пропорционально скорости: $R = 400v$ (Н), где v — скорость (м/с). Массой плиты и демпфера пренебречь.

Вариант 28. Груз D падает на плиту с высоты $h = 5$ см. Статический прогиб пружины под действием этого груза $f_{ct} = 1$ см.

Вариант 29. Плита лежит на двух однолаковых параллельных пружинах I и 2 , коэффициенты жесткости которых $c_1 = c_2 = c = 400$ Н/см. В некоторый момент времени груз D ($m = 200$ кг) устанавливают на середину плиты и одновременно прикрепляют к недеформированной пружине 3 , имеющей коэффициент жесткости $c_3 = 200$ Н/см. В тот же момент времени (при недеформированных пружинах) грузу сообщают скорость $v_0 = 0,6$ м/с, направленную вниз.

Вариант 30. В некоторый момент времени груз D ($m = 100$ кг) устанавливают на плиту и отпускают (при недеформированной пружине) без начальной скорости. В этот же момент времени точка B (нижний конец пружины) начинает совершать движение по вертикали согласно закону $\xi = 0,5 \sin 20t$ (см) (ось ξ направлена вниз). Коэффициент жесткости пружины $c = 2000$ Н/см.

Примечание. Начало отсчета на оси x соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$).

Пример выполнения задания (рис. 146). Два груза D и E массами $m_D = 2$ и $m_E = 3$ кг лежат на гладкой плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, опираясь на пружину, коэффициент жесткости которой $c = 6$ Н/см = 600 Н/м.

В некоторый момент времени груз E убирают; одновременно ($t = 0$) нижний конец пружины B начинает совершать вдоль наклонной плоскости движение по закону $\xi = 0,02 \sin 10t$ (м). Найти уравнение движения груза D .

Решение. Применим к решению задачи дифференциальные уравнения движения точки. Совместим начало координатной системы с положением покоя груза D , соответствующим статической деформации пружины, при условии, что точка B занимает свое среднее положение ($\xi = 0$).

Направим ось x вверх вдоль наклонной плоскости (в сторону движения груза D после снятия груза E). Движение груза D определяется по следующему дифференциальному уравнению:

$$m_D \ddot{x} = \sum X_i,$$

где ΣX_i — сумма проекций на ось x сил, действующих на груз D (рис. 146, а): G_D — веса, N — нормальной реакции наклонной плоскости, P — силы упругости пружины.

Таким образом,

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - P.$$

Здесь

$$P = c(x - f_{ctD} - \xi),$$

где f_{ctD} — статическая деформация пружины под действием груза D , ξ — перемещение точки прикрепления нижнего конца пружины, происходящее по закону $\xi = d \sin pt$ ($d = 0,02$ м, $p = 10$ с⁻¹).

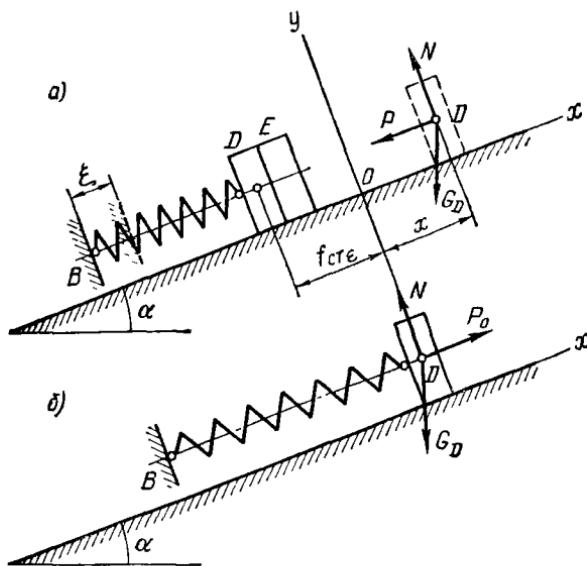


Рис. 146

Статическую деформацию пружины f_{ctD} найдем из уравнения, соответствующего состоянию покоя груза D на наклонной плоскости (рис. 146, б):

$$\Sigma X_i = 0; \quad -G_D \sin \alpha + P_0 = 0,$$

т. е.

$$-G_D \sin \alpha + cf_{ctD} = 0,$$

откуда

$$f_{ctD} = G_D \sin \alpha / c.$$

Дифференциальное уравнение движения груза D примет вид

$$m_D \ddot{x} = -G_D \sin \alpha - c(x - f_{ctD} - \xi)$$

или после преобразования:

$$m_D \ddot{x} + cx = cd \sin pt.$$

Разделив все члены уравнения на m_D и введя обозначения

$$c/m_D = k^2, \quad cd/m_D = h,$$

приведем дифференциальное уравнение к следующему виду:

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin pt.$$

Решение этого неоднородного уравнения складывается из общего решения x^* соответствующего однородного уравнения и частного решения x^{**} данного неоднородного уравнения:

$$x = x^* + x^{**}.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x^* = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$x^{**} = [h/(k^2 - p^2)] \sin pt.$$

Общий интеграл

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + [h/(k^2 - p^2)] \sin pt.$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 найдем, кроме того, уравнение для \dot{x} :

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + [hp/(k^2 - p^2)] \cos pt$$

и используем начальные условия задачи.

Рассматриваемое движение начинается в момент ($t = 0$), когда деформация пружины является статической деформацией под действием грузов D и E . При принятом положении начала отсчета O начальная координата груза D равна $x_0 = -f_{ctE}$, причем $f_{ctE} = \frac{G_E \sin \alpha}{c}$ — статическая деформация пружины под действием груза E .

Таким образом, при $t = 0$

$$x_0 = -f_{ctE}, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Составим уравнения $x = x(t)$ и $\dot{x} = \dot{x}(t)$ для $t = 0$:

$$x_0 = C_1; \quad \dot{x}_0 = C_2 k + hp/(k^2 - p^2),$$

откуда

$$C_1 = -f_{ctE}, \quad C_2 = -hp/k(k^2 - p^2).$$

Уравнение движения груза D имеет следующий вид:

$$x = -f_{ctE} \cos kt - [hp/k(k^2 - p^2)] \sin kt + [h/(k^2 - p^2)] \sin pt.$$

Найдем числовые значения входящих в уравнение величин:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_D}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 100}{2}} = 17,3 \text{ см}^{-1}$$

$$f_{c1E} = \frac{G_F \sin \alpha}{c} = \frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{6 \cdot 100} = 0,0245 \text{ м;}$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{cd}{m_D (k^2 - p^2)} = \frac{600 \cdot 0,02}{2(300 - 100)} = 0,03 \text{ м;}$$

$$\frac{hp}{k(k^2 - p^2)} = \frac{0,03 \cdot 10}{17,3} = 0,0173 \text{ м.}$$

Следовательно, уравнение движения груза D :

$$x = -2,45 \cos 17,3t - 1,73 \sin 17,3t + 3 \sin 10t \text{ (см).}$$

Задание Д-4. Исследование относительного движения материальной точки

Шарик M , рассматриваемый как материальная точка, перемещается по цилиндрическому каналу движущегося тела A (рис. 147—149). Найти уравнение относительного движения этого шарика $x = f(t)$, приняв за начало отсчета точку O .

Тело A равномерно вращается вокруг неподвижной оси (в вариантах 2, 3, 4, 7, 10, 11, 14, 20, 23, 26 и 30 ось вращения z_1 вертикальна, в вариантах 1, 12, 15 и 25 ось вращения x_1 горизонтальна). В вариантах 5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 19, 21, 22, 24, 27, 28 и 29 тело A движется поступательно, параллельно вертикальной плоскости $y_1O_1z_1$.

Найти также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном значении $t = \tau$. Данные, необходимые для выполнения задания, приведены в табл. 46.

В задании приняты следующие обозначения: m — масса шарика M ; ω — постоянная угловая скорость тела A (в вариантах 1—4, 7, 10—12, 14, 15, 20, 23, 25, 26, 30) или кривошипов O_1B и O_2C (в вариантах 6, 17, 22); c — коэффициент жесткости пружины, к которой прикреплен шарик M ; l_0 — длина недеформированной пружины; f — коэффициент трения скольжения шарика по стенке канала; x_0 , \dot{x}_0 — начальная координата и проекция начальной скорости на ось x .

Пример выполнения задания (рис. 150). Дано: $\alpha = 30^\circ$, $\omega = \pi \text{ см}^{-1}$; $m = 0,01 \text{ кг}$; $\tau = 0,2 \text{ с}$; $x_0 = 0,3 \text{ м}$; $\dot{x}_0 = 2 \text{ м/с}$, $c = 0,01 \text{ Н/см} = 1 \text{ Н/м}$; $l_0 = 0,2 \text{ м}$; $r = 0,2 \text{ м}$

Найти уравнение $x = x(t)$ относительного движения шарика M , а также координату x и давление шарика на стенку канала при заданном $t = \tau$.

Решение. Связем подвижную систему отсчета $Oxuz$ с вращающимся каналом (трубкой), совместив ось x с траекторией относительного движения шарика M .

Вращение этой системы вокруг оси z_1 является переносным движением для шарика M . Относительным движением шарика M яв-

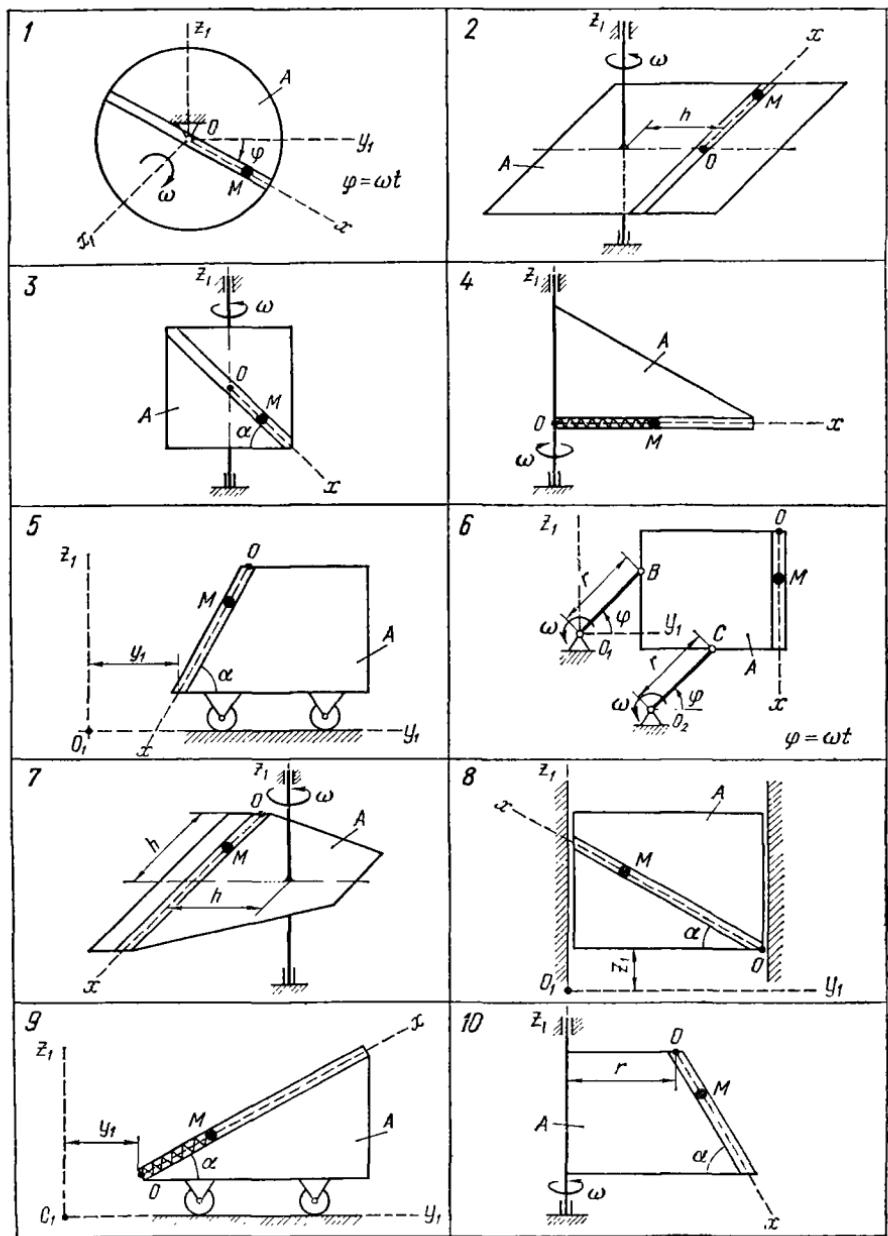
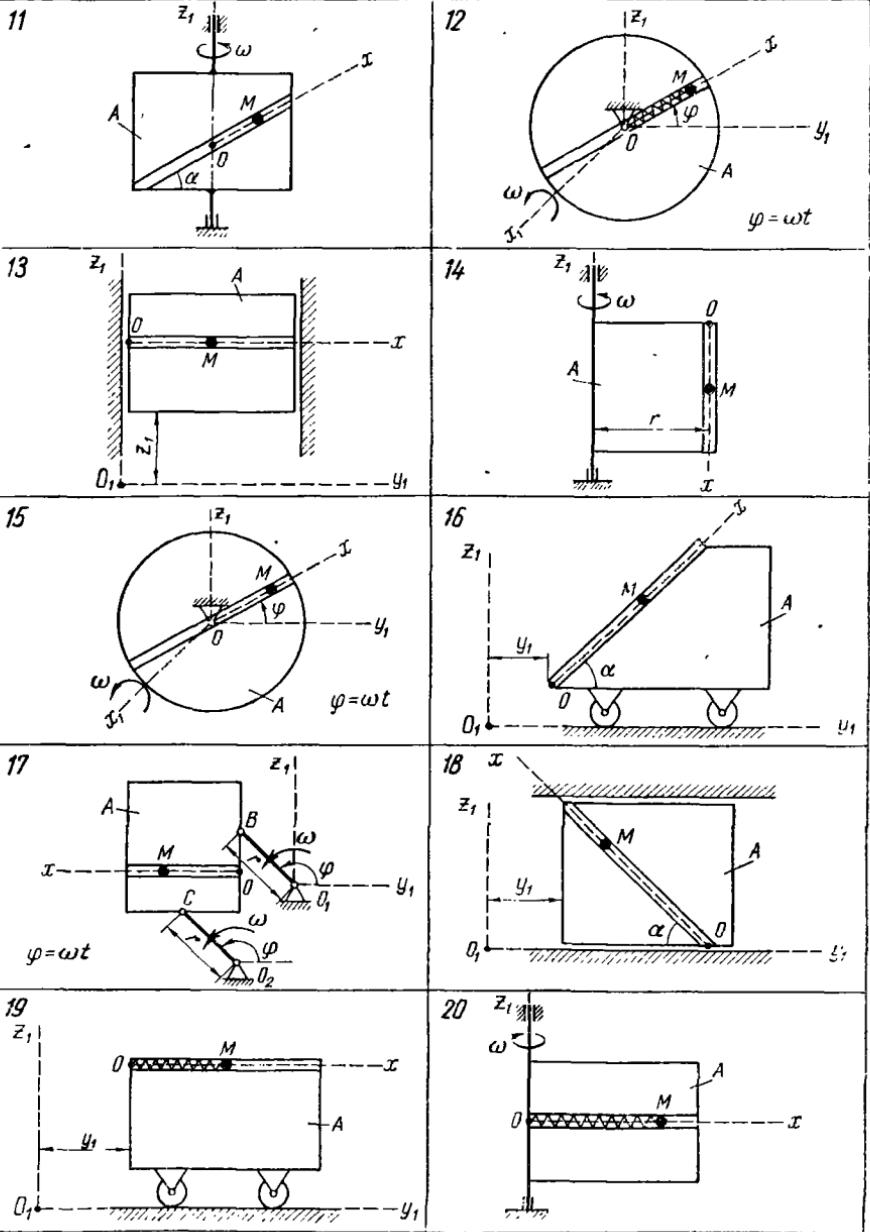
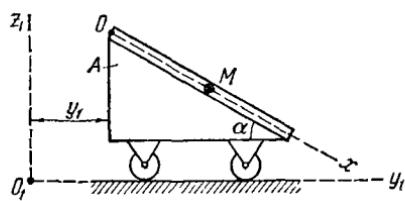


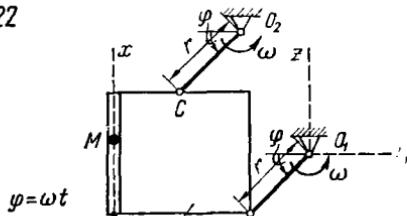
FIG. 147



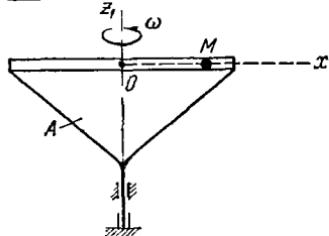
21



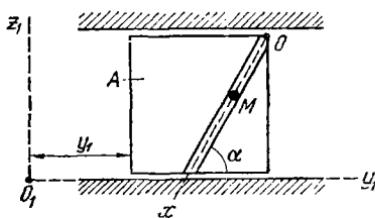
22



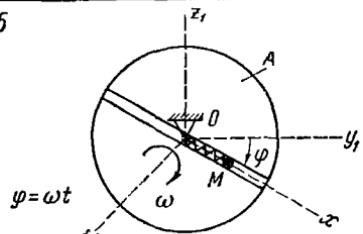
23



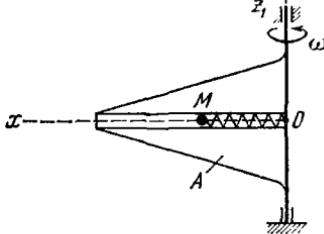
24



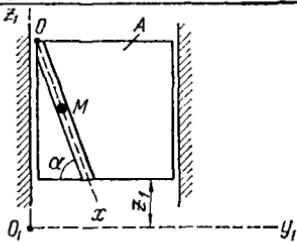
25



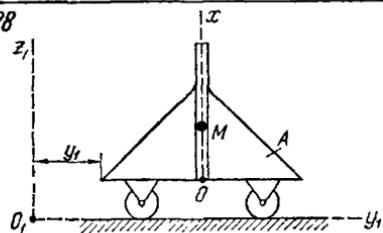
26



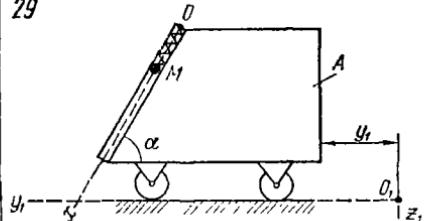
27



28



29



30

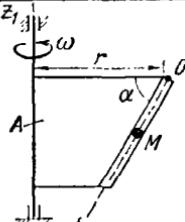


Таблица 46

Номер ячейки (стр. 147— 119)	a , град	m , кг	ω_0 , с^{-1}	Начальные данные		τ , с	c , Н/см	I_0 , м	Уравнение движения тела А		r , м	h , м	f
				x_0 , м	\dot{x}_0 , м/с								
1	—	0,02	π	0	0,4	0,5	—	—	—	—	—	0,15	0
2	—	0,02	2π	0,5	0,2	0,4	—	—	—	—	—	0	0
3	45	0,03	4π	0,2	—0,8	0,2	0,1	0,36	0,15	—	—	0	0
4	—	0,09	—	0,6	0	0,2	—	—	—	—	—	0,10	0
5	60	0,02	—	0,5	0	0,2	—	—	—	—	—	0,20	0
6	—	0,01	10π	0,5	0	0,2	—	—	—	—	—	0	0
7	—	0,03	2π	0,3	0	0,2	—	—	—	—	—	0	0
8	30	0,03	—	0,8	0	0,1	—	—	—	—	—	0	0
9	30	0,02	—	0,4	0	0,1	0,20	0,20	0,10	—	—	0,20	0
10	60	0,05	6π	0,4	0	0,4	—	—	—	—	—	0	0
11	30	0,05	π	0	0	0,4	—	—	—	—	—	0	0
12	—	0,08	6π	0,05	0	0,1	0,20	0,10	—	—	—	0	0
13	—	0,01	—	0	0,5	0,2	—	—	—	—	—	0,1	0,2
14	—	0,05	4π	0,5	0	0,1	—	—	—	—	—	0,20	0
15	—	0,01	π	0,5	0	1,0	—	—	—	—	—	0	0
16	45	0,02	—	1,0	2,0	0,1	—	—	—	—	—	0,20	0
17	—	0,02	6π	0	4,0	0,2	—	—	—	—	—	0	0
18	40	0,02	—	0,6	0	0,1	0,40	0,20	0,10	—	—	0	0
19	—	0,08	—	0,4	—0,8	0,1	0,2	—	—	—	—	0	0
20	—	0,01	10π	0,1	0	0,1	0,2	—	—	—	—	0	0
21	30	0,05	—	0,5	0,1	3,0	0,1	—	—	—	—	0,10	0
22	—	0,03	4π	0,1	—0,5	—0,1	0,2	—	—	—	—	0	0
23	—	0,01	2π	—	0	0,2	0,2	—	—	—	—	0	0
24	60	0,01	—	0,1	0,2	0,1	0,20	0,20	0,10	—	—	0	0
25	—	0,05	π	—	—0,4	0,1	0,20	0,20	0,10	—	—	0	0
26	—	0,09	—	0,2	0,3	0,1	0,3	—	—	—	—	0	0
27	75	0,02	—	1,0	0,6	0,3	—	—	—	—	—	0,1	0
28	—	0,03	—	0,8	0	0,1	0,20	0,20	0,10	—	—	0,50	0
29	60	0,0	$\pi/2$	—	0,4	0,5	0,2	—	—	—	—	0	0
30	50	0,02	—	0	0	0,5	—	—	—	—	—	0	0

ляется его движение вдоль трубы. В случае, когда переносное движение является равномерным вращением, относительное движение точки определяется уравнением

$$m\ddot{\omega}_r = \Sigma \vec{P}_i + \vec{\Phi}_e^u + \vec{\Phi}_c.$$

К шарнику M приложены силы: вес \vec{G} , реакция пружины \vec{P} и нормальная реакция стенки трубы; эту реакцию можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие \vec{N}_1 и \vec{N}_2 .

Присоединяя к силам, действующим на шарик M , переносную центробежную силу инерции $\vec{\Phi}_e^u$ и кориолисову силу инерции $\vec{\Phi}_c$, направленные противоположно ускорениям $\vec{\omega}_e^u$ и $\vec{\omega}_c$. Направление ускорения $\vec{\omega}_c$ найдем по известному правилу, предположив, что проекция относительной скорости \vec{v}_r на ось x положительна. В рассматриваемом примере кориолисова сила инерции $\vec{\Phi}_c$ параллельна оси y и перпендикулярна к плоскости xOz (рис. 150).

Модули сил инерции определяются по формулам:

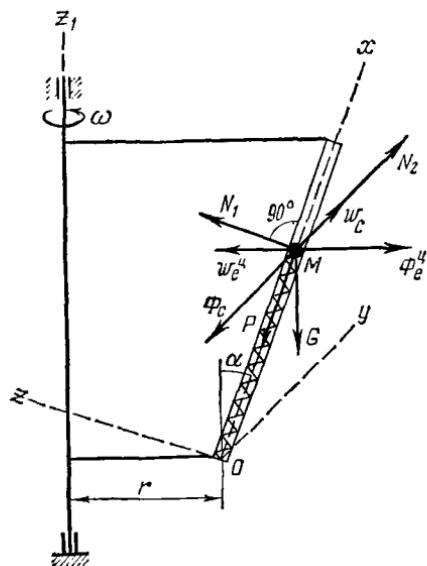
$$\Phi_e^u = m\omega_e^u = m\omega_e^2(r + x \sin \alpha);$$

$$\Phi_c = m\omega_c = 2m\omega_e v_r \sin \alpha,$$

где

$$\omega_e = \omega, \quad v_r = |\dot{x}|.$$

Рис. 150



Основное уравнение относительного движения в данном случае имеет вид:

$$m\ddot{\omega}_r = \vec{G} + \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{\Phi}_e^u + \vec{\Phi}_c. \quad (1)$$

Составим дифференциальное уравнение относительного движения шарика M вдоль оси x :

$$m\ddot{x} = \Sigma X_t = \Phi_e^u \sin \alpha - G \cos \alpha - P;$$

$$m\ddot{x} = m\omega^2(r + x \sin \alpha) \sin \alpha - mg \cos \alpha - c(x - l_0)$$

(реакция пружины P равна произведению коэффициента жесткости на величину деформации пружины).

Последнее уравнение представим в виде

$$\ddot{x} + (c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha)x = \omega^2 r \sin \alpha - g \cos \alpha + cl_0/m. \quad (2)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения (2) имеет вид

$$x' = x^* + x^{**},$$

где x^* — общее решение соответствующего однородного уравнения; x^{**} — частное решение уравнения (2).

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\lambda^2 + c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha = 0;$$

$$\lambda_1 = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \alpha - c/m} = \sqrt{\pi^2 \cdot 0,0^2 - 1/0,01} = 9,876i.$$

$$\lambda_2 = -9,876i.$$

Таким образом, общее решение однородного уравнения

$$x^* = C_1 \cos 9,876t + C_2 \sin 9,876t.$$

Частное решение уравнения (2) находим в форме

$$x^{**} = B.$$

Из дифференциального уравнения (2)

$$\begin{aligned} x^{**} = B &= \frac{\omega^2 r \sin \alpha - g \cos \alpha + c/m}{c/m - \omega^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= \frac{\pi^2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 9,81 \cdot 0,866 + (1,0 \cdot 0,2)/0,01}{1,0/0,01 - \pi^2 \cdot 0,5^2} = 0,128 \text{ м.} \end{aligned}$$

Решение дифференциального уравнения (2) относительного движения шарика M получает вид

$$x = C_1 \cos 9,876t + C_2 \sin 9,876t + 0,128 \text{ (м).} \quad (3)$$

Скорость этого движения

$$\dot{x} = -9,876C_1 \sin 9,876t + 9,876C_2 \cos 9,876t \text{ (м/с).} \quad (4)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем, используя начальные условия: при $t = 0$

$$x_0 = 0,3 \text{ м, } \dot{x}_0 = 2,0 \text{ м/с.}$$

Составим уравнения (3) и (4) для $t = 0$:

$$x_0 = C_1 + 0,128; \quad \dot{x}_0 = 9,876C_2,$$

откуда

$$C_1 = 0,3 - 0,128 = 0,172; \quad C_2 = 2/9,876 = 0,202.$$

Уравнение относительного движения шарика M принимает вид

$$x = 0,172 \cos 9,876t + 0,202 \sin 9,876t + 0,128 \text{ (м).}$$

Скорость относительного движения шарика

$$\dot{x} = -1,69 \sin 9,876t + 1,99 \cos 9,876t \text{ (м/с).}$$

Для определения составляющих реакции стенки трубы N_1 и N_2 при $t = \tau = 0,2$ с выразим векторное уравнение (1) в проекциях на оси y и z . Учитывая, что вектор \vec{w}_r перпендикулярен к этим осям, получаем:

$$0 = N_2 - \Phi_c, \quad 0 = N_1 - G \cos 60^\circ - \Phi_t^u \cos 30^\circ.$$

Из этих уравнений

$$N_2 = \Phi_c = 2m\omega v_r \sin \alpha,$$

$$N_1 = G \cos 60^\circ + \Phi_e^u \cos 30^\circ = mg \cos 60^\circ + m\omega^2 (r + x \sin \alpha) \cos 30^\circ.$$

Для получения числовых значений N_1 и N_2 необходимо определить координату x и проекцию относительной скорости точки \dot{x} , соответствующие значению $t = 0,2$ с.

$$\begin{aligned} x &= 0,172 \cos (9,876 \cdot 0,2) + 0,202 \sin (9,876 \cdot 0,2) + 0,128 = \\ &= 0,172 \cos 113^\circ + 0,202 \sin 113^\circ + 0,128 = \\ &= -0,172 \cdot 0,391 + 0,202 \cdot 0,92 + 0,128 = 0,246 \text{ м}; \\ \dot{x} &= -1,69 \sin 113^\circ + 1,99 \cos 113^\circ = -1,69 \cdot 0,92 - \\ &- 1,99 \cdot 0,391 = -1,55 - 0,78 = -2,33 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Следовательно, составляющие реакции N_1 и N_2

$$N_1 = 0,01 \cdot 9,81 \cdot \frac{1}{2} + 0,01\pi^2 (0,2 + 0,246 \cdot 0,5) \cdot 0,866 = 0,077 \text{ Н};$$

$$N_2 = 2 \cdot 0,01\pi \cdot 2,33 \cdot 0,5 = 0,080 \text{ Н}.$$

Реакция стенки трубы

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = \sqrt{0,077^2 + 0,080^2} = 0,111 \text{ Н}.$$

Искомое давление шарика M на стенки трубы по величине равно найденной реакции N и направлено в противоположную сторону.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Задание Д-5. Применение теоремы об изменении количества движения к определению скорости материальной точки

Телу массой m сообщена начальная скорость v_0 , направленная вверх по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. На тело действует сила P , направленная в ту же сторону (рис. 151). Зная закон изменения силы $P = P(t)$ и коэффициент трения скольжения f , определить скорость тела в моменты времени t_1 , t_2 , t_3 и проверить полученный результат для момента времени t_1 с помощью дифференциального уравнения движения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 47.

При построении графика изменения силы P по заданным ее значениям P_0 , P_1 , P_2 , P_3 для моментов времени t_0 , t_1 , t_2 , t_3 считать зависимость $P = P(t)$ между указанными моментами времени линей-

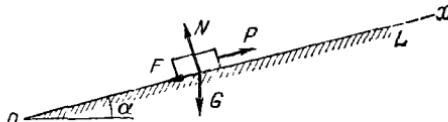


Рис. 151

ной. Значение силы P , задаваемое в табл. 47 в виде дроби, указывает на то, что модуль силы в заданный момент времени претерпевает «скакок»: в числителе указан модуль силы в конце промежутка времени, а в знаменателе — в начале следующего промежутка времени.

Таблица 47

Номер варианта	m , кг	v_0 , м/с	t_1	t_2	t_3	P_0	P_1	P_2	P_3	α град	f
			с			Н					
1	35	5,4	4	10	18	100	200	150	250	25	0,10
2	20	0	6	10	15	200	160	160	180	37	0,25
3	25	0	4	10	16	200	200/120	120	0	21	0,10
4	10	4,5	5	10	16	0	180	40	100	32	0,12
5	16	9,0	4	8	16	120	120/0	0	160	24	0,08
6	40	4,0	4	8	12	400	300	300	0	40	0,06
7	20	8,0	5	8	11	0	300	0	0	25	0,20
8	16	7,6	6	11	13	75	200	0	0	23	0,12
9	12	0	6	10	14	100	140	0	0	20	0,20
10	50	12,0	2	6	12	0	300	200	200	27	0,08
11	10	5,0	6	10	16	50	100	100	200	35	0,24
12	12	3,0	3	8	14	60	180	120	120	42	0,15
13	10	8,0	4	12	16	0	150	150	100	30	0,18
14	20	8,5	5	8	15	40	100	150	0	23	0,07
15	14	9,0	7	12	18	0	140	0	100	18	0,15
16	20	3,0	5	9	17	300	150	100	100	39	0,12
17	24	10,0	6	10	15	0	180	60	140	15	0,20
18	15	13,0	8	16	20	110	150	0	90	26	0,22
19	15	7,2	3	10	16	150	110	90	120	30	0,30
20	22	8,2	2	9	11	70	110	110	50	15	0,15
21	13	10,0	8	12	16	0	200/0	0/200	100	28	0,14
22	11	6,0	7	9	14	160	0	0/100	120	31	0,11
23	12	4,5	5	10	16	50	120	40	80	21	0,22
24	10	7,0	4	14	29	100	50	50	0	18	0,09
25	18	0	8	10	16	180	160/0	0/140	180	33	0,17
26	8	9,0	4	8	12	0	150	0	120	45	0,10
27	17	5,0	7	10	18	190	170/0	100	280	38	0,21
28	9	7,5	4	12	17	0	140/70	100/70	70	26	0,20
29	20	9,5	5	6	11	0	400	400/100	200	15	0,25
30	10	10,2	6	7	10	120	70	0	120	33	0,15

Пример выполнения задания. Дано: $m = 40$ кг; $v_0 = 10$ м/с; $t_1 = 3$ с; $t_2 = 8$ с; $t_3 = 12$ с; $P_0 = 0$; $P_1 = 250$ Н; $P_2 = 300/200$ Н; $P_3 = 150$ Н; $\alpha = 30^\circ$; $f = 0,1$.

Определить v_1 , v_2 , и v_3 для t_1 , t_2 , t_3

Решение. Покажем силы, действующие на тело (рис. 151): вес \vec{G} , нормальную реакцию плоскости \vec{N} , силу \vec{P} и силу трения скольжения \vec{F} , направив ее противоположно начальной скорости, т. е. вниз по наклонной плоскости.

Построим график $P = P(t)$ по заданным значениям P_0 , P_1 , P_2 и P_3 (рис. 152).

1. Для тела, принимаемого за материальную точку, составим уравнение, выраждающее теорему об изменении количества движения

в проекциях на ось x для промежутка времени от 0 до t_1 :

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \Sigma S_{ix}, \quad (1)$$

где

$$\Sigma S_{ix} = -Gt_1 \sin \alpha - Ft_1 + S_{Px}.$$

Проекция импульса перемещенной силы P за t_1 с

$$S_{Px} = \int_0^{t_1} P dt.$$

Этот интеграл определяется как площадь треугольника OBM на графике $P = P(t)$:

$$S_{Px} = (3 \cdot 250)/2 = 375 \text{ H} \cdot \text{с.}$$

Учитывая, что сила трения скольжения $F = fN = fG \cos \alpha$, получаем уравнение (1) в следующем виде:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = -mgt_1 \sin \alpha - fmg t_1 \cos \alpha + 375,$$

откуда

$$v_{1x} = v_{0x} - gt_1 \sin \alpha - fgt_1 \cos \alpha + 375/m,$$

т. е.

$$v_{1x} = 10 - 9,81 \cdot 3 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot 0,87 + 375/40 = \\ = 10 - 14,72 - 2,56 + 9,38 = 2,10 \text{ м/с.}$$

Таким образом,

$$v_1 = v_{1x} = 2,10 \text{ м/с.}$$

Примечание. Сила трения скольжения \vec{F} направлена противоположно скорости и поэтому, прежде чем производить приведенный расчет, нужно выяснить, не изменит ли скорость тела за время t_1 первоначального направления

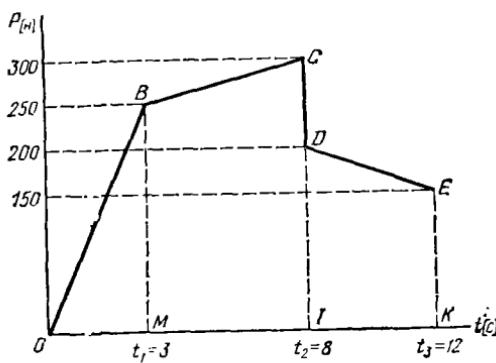


Рис. 152

вверх по наклонной плоскости ($v_{0x} > 0$), а, следовательно, сила трения — направлена вниз.

Для этого надо установить, возможен ли такой момент времени $t^* < t_1$, при котором скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил \vec{G} , \vec{N} , \vec{F} и силы \vec{P} , изменяющейся по закону прямой OB : $P = (250/3) \cdot t$.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для предполагаемого промежутка времени от 0 до t^* :

$$mv_{2x} - mv_{0x} = -mg t^* \sin \alpha - fmg t^* \cos \alpha + S_{Px},$$

где в данном случае

$$v_x = 0, \quad S_{Px} = t^* \cdot (250/3) t^* \cdot 1/2 = (125/3) \cdot t^{*2}.$$

В результате получим следующее уравнение для определения t^* :

$$125/3 \cdot t^{*2} - mg (\sin \alpha + f \cos \alpha) t^* + mv_{0x} = 0,$$

т. е.

$$t^{*2} - (196,2 + 34,1) 3t^*/125 + (400 \cdot 3)/125 = 0$$

или

$$t^{*2} - 5,52t^* + 9,6 = 0.$$

Решая это уравнение, делаем вывод, что не существует такого момента времени, для которого скорость тела, находящегося под действием указанных сил, будет равна нулю.

2. Для определения скорости тела в момент времени t_2 составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени $t_2 - t_1$:

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix}, \quad (2)$$

где

$$\sum S_{ix} = -G(t_2 - t_1) \sin \alpha - F(t_2 - t_1) + S_{Px}.$$

Проекция импульса переменной силы P за $(t_2 - t_1)$ выражается площадью трапеции $MBCI$ на графике $P = P(t)$:

$$S_{Px} = [5(250 + 300)]/2 = 1375 \text{ Н} \cdot \text{с.}$$

Поэтому уравнение (2) имеет вид

$$mv_{2x} - mv_{1x} = -mg(t_2 - t_1) \sin \alpha - fmg \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) + 1375,$$

откуда

$$\begin{aligned} v_{2x} &= v_{1x} - g(t_2 - t_1) \sin \alpha - f g \cos \alpha \cdot (t_2 - t_1) + 1375/m = \\ &= 2,10 - 9,81 \cdot 5 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 5 + 1375/40 = \\ &= 2,10 - 24,52 - 4,27 + 34,38 = 7,68 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_2 = v_{2x} = 7,68 \text{ м/с.}$$

Примечание. Прежде чем составить уравнение (2), нужно убедиться, что за время $t_2 - t_1$ первоначальная скорость $v_1 (v_{1x} > 0)$ не изменит своего направления. Действительно, в начале движения на этом участке сила $P > -G \sin \alpha - f G \cos \alpha$ и продолжает расти, значит, скорость тела не может изменить своего первоначального направления.

3. Уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения и составленное для промежутка времени $t_3 - t_2$, дает возможность определить скорость тела v_3 в момент t_3 :

$$mv_{3x} - mv_{2x} = \sum S_{ix}, \quad (3)$$

где

$$\sum S_{ix} = -G(t_3 - t_2) \sin \alpha - f G \cos \alpha (t_3 - t_2) + S_{Px}.$$

Проекция импульса переменной силы P за $(t_3 - t_2)$ с выражается площадью трапеции $IDEK$:

$$S_P = [4(200 + 150)]/2 = 700 \text{ Н} \cdot \text{с.}$$

Тогда

$$\begin{aligned} v_{3x} = v_{2x} - g(t_3 - t_2) \sin \alpha - f g \cos \alpha (t_3 - t_2) + 700/40 = 7,68 - 9,81 \times \\ \times 4 \cdot 0,5 - 0,1 \cdot 9,81 \cdot 0,87 \cdot 4 + 17,5 = 7,68 - 19,62 - 3,41 + \\ + 17,5 = 2,15 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_3 = v_{3x} = 2,15 \text{ м/с.}$$

Примечание. Уравнение (3) можно составить после того, как установлено, что и на третьем участке тело не изменяет направления своей первоначальной скорости ($v_{2x} > 0$) и сила трения скольжения направлена в течение всего промежутка времени $t_3 - t_2$ вниз по наклонной плоскости. Для этого следует выяснить, возможен ли такой момент времени $\tau^* < t_3$, когда скорость тела станет равной нулю под действием постоянных сил \vec{G} , \vec{N} , \vec{F} и силы \vec{P} , закон изменения которой представлен на третьем участке графика (см. рис. 73) прямой DE . Уравнение DE имеет вид:

$$P = 200 - [(200 - 150)/4] \cdot \tau = 200 - 12,5\tau,$$

где τ — время, отсчитываемое от момента $t_2 = 8$ с.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении количества движения, для промежутка времени от $\tau_0 = 0$ до $\tau = \tau^*$:

$$mv_1 - mv_{2x} = -mg\tau^* \sin \alpha - fmg\tau^* \cos \alpha + S_{Px},$$

где для данного случая $v_x = 0$, а

$$S_{Px} = \frac{200 + (200 - 12,5\tau^*)}{2} \tau^* = 200\tau^* - 6,25\tau^{*2}.$$

В результате получим следующее уравнение, позволяющее определить τ^* :

$$6,25\tau^{*2} - 200\tau^* + mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)\tau^* - mv_{2x} = 0,$$

т. е.

$$\tau^{*2} + \frac{230,3 - 200}{6,25} \tau^* - \frac{40 \cdot 7,68}{6,25} = 0$$

или

$$\tau^{*2} + 4,85\tau^* - 49,1 = 0.$$

откуда

$$\tau^* = -2,42 \pm \sqrt{5,86 + 49,1} = -2,41 \pm 7,41 \text{ (с).}$$

Таким образом

$$\tau^* = 4,99 \text{ с.}$$

Скорость станет равной нулю при $\tau = 4,99$ с, но $(t_3 - t_2) < \tau^*$, поэтому изменения скорости в рассматриваемый промежуток времени $t_3 - t_2$ не произойдет.

4. Проверим полученное в момент t_1 значение скорости v_1 с помощью дифференциального уравнения

$$m\ddot{x} = \Sigma X_t.$$

Раскроем правую часть уравнения:

$$m\ddot{x} = -G \sin \alpha - F + P$$

или

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha + P,$$

т. е.

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + P/m,$$

где $P = (250/3) \cdot t$ — уравнение прямой OB , а поэтому

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha - fg \cos \alpha + (25/12) \cdot t.$$

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение, получаем

$$\dot{x} = -g (\sin \alpha + f \cos \alpha) t + (25/24) \cdot t^2 + C.$$

Для определения C используем начальное условие задачи: при $t = 0$ $v_{0x} = \dot{x}_0 = 10$ м/с.

Составим уравнение, полученное интегрированием, для $t = 0$, найдем, что $C = 10$ м/с. Таким образом, уравнение, определяющее изменение скорости за промежуток времени от 0 до t_1 , имеет вид:

$$\dot{x} = -g (\sin \alpha + f \cos \alpha) t + (25/24) \cdot t^2 + 10.$$

При $t = 3$ с

$$v_1 = \dot{x}_1 = -9,81 (0,5 + 0,1 \cdot 0,87) \cdot 3 + (25/24) \cdot 9 + 10 = 2,10 \text{ м/с.}$$

Задание Д-6. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки

Шарик, принимаемый за материальную точку, движется из положения A внутри трубки, ось которой расположена в вертикальной плоскости (рис. 153 – 155). Найти скорость шарика в положениях B и C и давление шарика на стенку трубы в положении C . Трением на криволинейных участках траектории пренебречь. В вариантах 3, 6, 7, 10, 13, 15, 17, 19, 25, 28, 29 шарик, пройдя путь h_0 , отделяется от пружины.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 48.

В задании приняты следующие обозначения: m — масса шарика; v_A — начальная скорость шарика; τ — время движения шарика на участке AB (в вариантах 1, 2, 5, 8, 14, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 30) или на участке BD (в вариантах 3, 4, 6, 7, 9 – 13, 15 – 17, 19, 22, 25, 26, 28, 29); f — коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубы; h_0 — начальная деформация пружины; c — коэффициент жесткости пружины; H — наибольшая высота подъема шарика; s — путь, пройденный шариком до остановки.

Пример выполнения задания (рис. 156). Дано: $m = 0,5$ кг; $v_A = 0,8$ м/с; $\tau = 0,1$ с (время движения на участке BD); $R = 0,2$ м; $f = 0,1$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $h_0 = 0$; $c = 10$ Н/см = 1000 Н/м.

Определить v_B , v_C , N_C , v_D , h .

Решение. Для определения v_B и v_C применим теорему об изменении кинетической энергии материальной точки. Движение шарика на участках AC и AB траектории происходит под действием силы

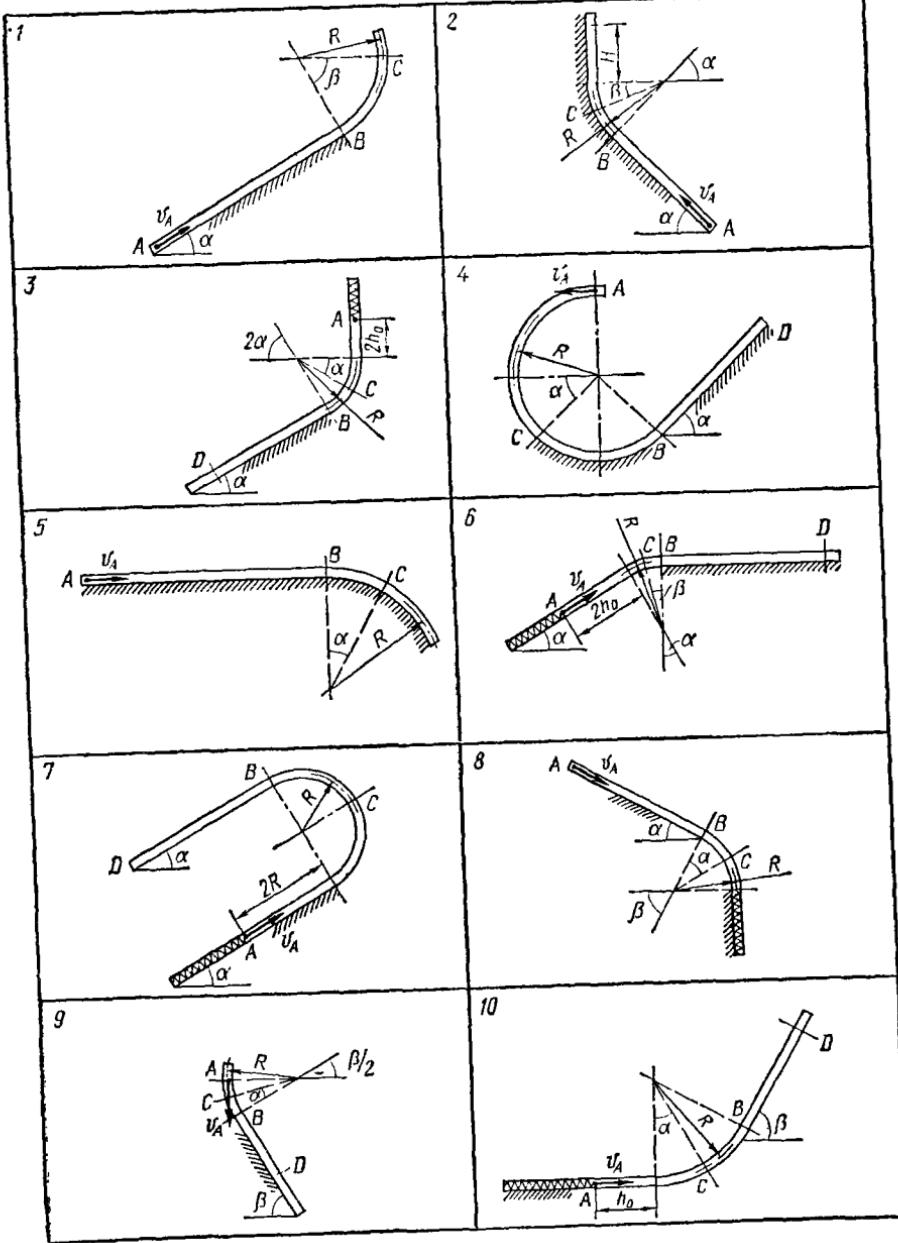


FIG. 153

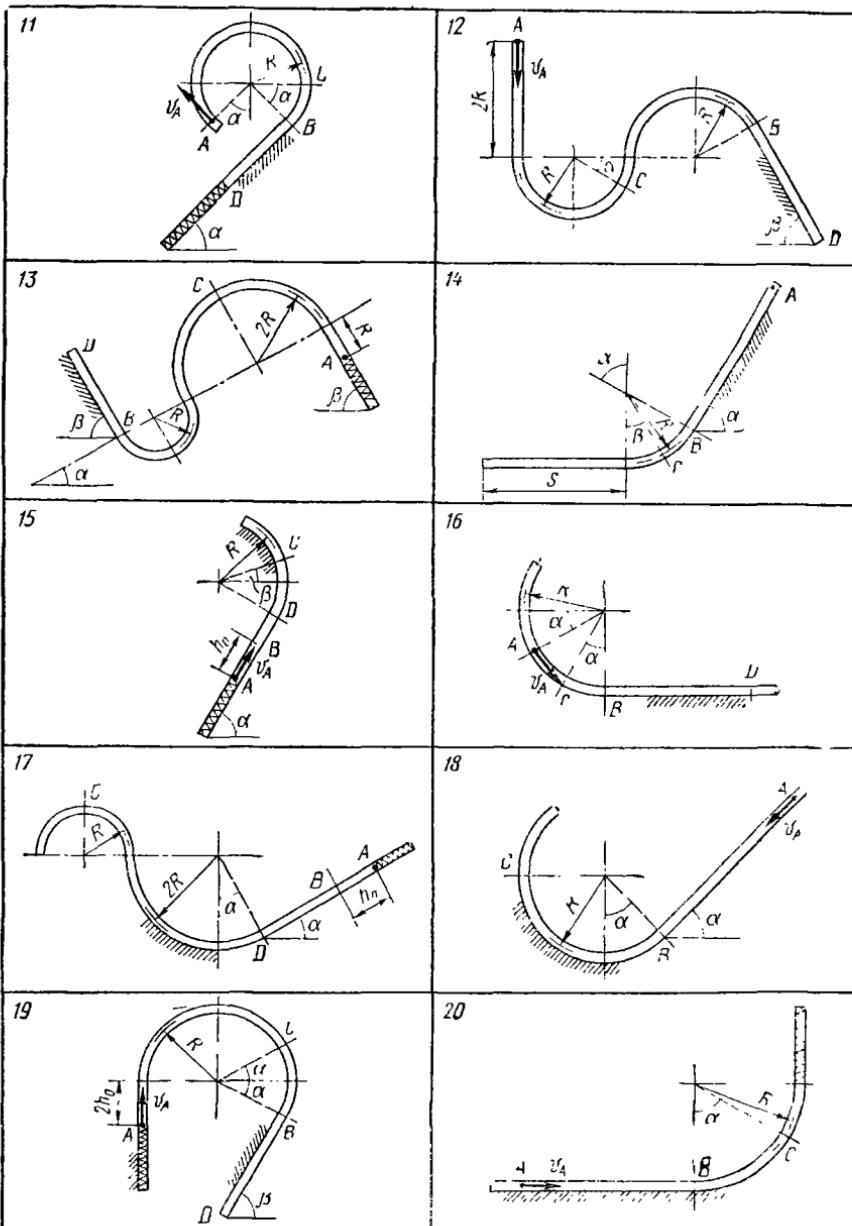


Рис. 154

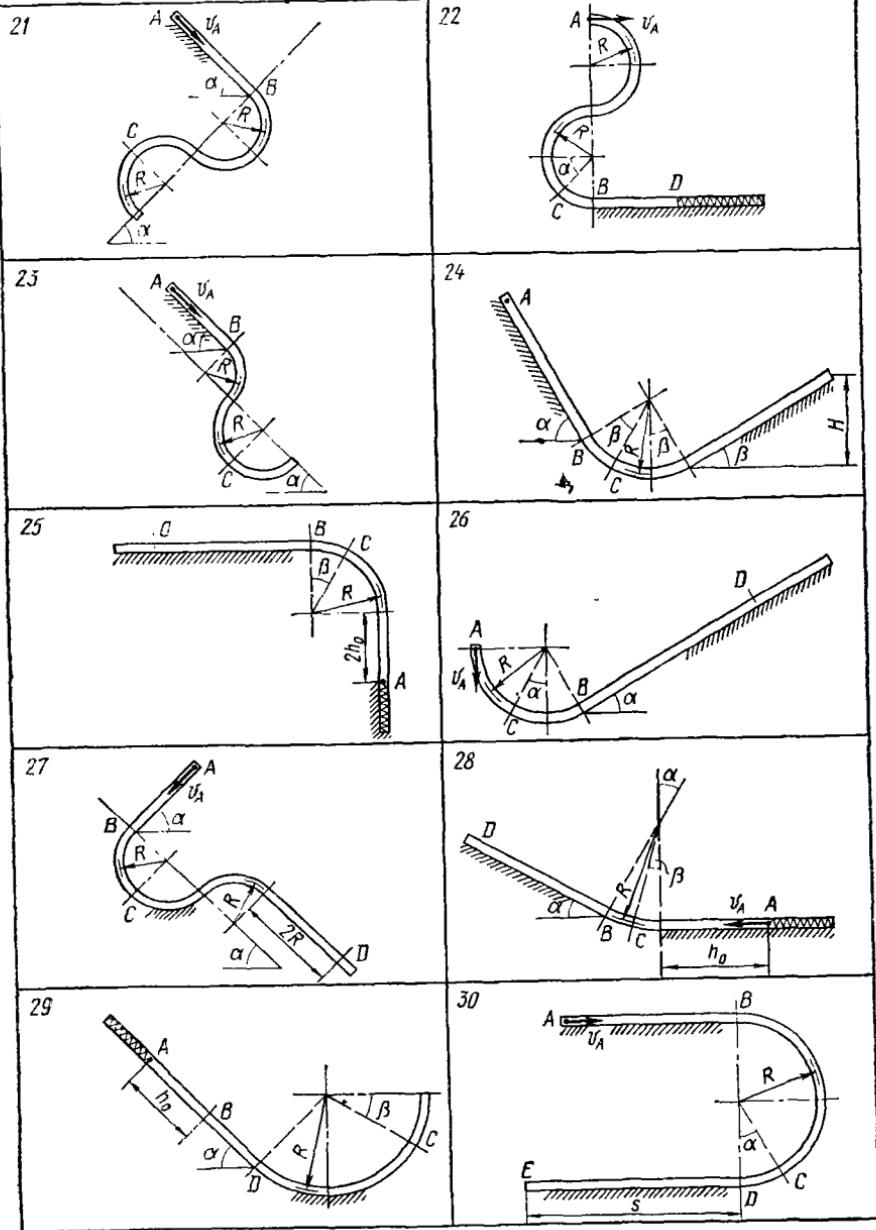


Рис. 155

Таблица 48

Номер варианта (рис. 153— 155)	m , кг	v_A , м/с	τ , с	R , м	f	α , град	β , град	h_0 , см	c , Н/см	Величины, которые требуются определить дополнитель- тельно
1	0,5	20	2,0	2,0	0,20	30	45	—	—	—
2	0,6	16	0,2	4,0	0,10	45	20	—	—	H
3	0,4	0	2,0	0,2	0,15	30	—	10	1	v_D
4	0,2	5	0,5	1,0	0,10	45	—	—	—	v_D
5	0,1	8	1,5	2,0	0,20	30	—	—	—	v_D
6	0,3	2	2,0	4,0	0,10	30	20	30	2	v_D
7	0,4	5	1,0	1,0	0,10	30	—	50	5	v_D
8	0,2	1	0,5	1,5	0,15	30	60	0	4	h
9	0,5	2	1,5	4,0	0,25	20	60	—	—	v_D
10	0,4	4	0,1	0,5	0,10	30	60	0,2	0,2	v_D
11	0,2	6	1,0	1,0	0,30	45	—	—	3	v_D, h
12	0,4	5	0,4	2,0	0,20	30	60	—	—	v_D
13	0,3	0	0,1	1,0	0,10	30	60	50	10	v_D
14	0,6	0	2,0	3,0	0,20	60	30	—	—	s
15	0,1	1	0,1	1,0	0,15	60	20	50	0,2	v_D
16	0,4	2	0,2	2,0	0,40	30	—	—	—	v_D
17	0,2	0	0,1	1,0	0,20	30	—	40	1,0	v_D
18	0,3	3	0,4	1,5	0,10	45	—	—	—	v_D
19	0,1	2	0,1	0,4	0,30	30	60	10	0,5	v_D
20	0,2	10	1,0	0,5	0,10	60	—	0	1,2	h
21	0,7	3	0,3	0,3	0,20	45	—	—	—	v_D, h
22	0,4	1	0,2	0,2	0,40	45	—	0	1,1	v_D, h
23	0,6	2	0,4	0,2	0,20	45	—	—	—	v_D
24	0,5	0	0,5	0,6	0,30	60	30	—	—	H
25	0,1	0	0,2	0,5	0,25	—	30	30	0,4	v_D
26	0,2	2	0,1	0,2	0,20	30	—	—	—	v_D
27	0,8	3	0,2	0,4	0,15	45	—	—	—	v_D
28	0,3	4	0,1	0,6	0,35	30	15	60	0,1	v_D
29	0,5	0	0,2	0,5	0,20	45	30	50	0,8	v_D
30	0,8	5	0,3	0,6	0,15	30	—	—	—	v_{DE}

тяжести G (силы трения на криволинейных участках не учитываем)

$$mv_B^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_1 = mgAB \sin \alpha = mg6R \sin \alpha;$$

$$v_B^2 - v_A^2 = 2g6R \sin \alpha;$$

$$v_B = \sqrt{v_A^2 + 12gR \sin \alpha} = \sqrt{0,8^2 + 12 \cdot 9,81 \cdot 0,2 \cdot 0,866} = 4,59 \text{ м/с};$$

$$mv_C^2/2 - mv_A^2/2 = \sum A_i = GH_2 = mg(4R \sin \alpha + 2R \cos \alpha);$$

$$v_C^2 - v_A^2 = 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha);$$

$$v_C = \sqrt{v_A^2 + 4gR(2 \sin \alpha + \cos \alpha)} =$$

$$= \sqrt{0,8^2 + 4 \cdot 9,81 \cdot 0,2(2 \cdot 0,866 + 0,5)} = 4,26 \text{ м/с}.$$

Определяем давление шарика на стенку канала в положении C .

В соответствии с принципом Даламбера для материальной точки геометрическая сумма сил, приложенных к точке, и силы инерции этой точки равна нулю (рис. 156):

$$\vec{G} + \vec{N}'_C + \vec{\Phi} = 0.$$

Силу инерции материальной точки можно разложить на нормальную и касательную составляющие

$$\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_n + \vec{\Phi}_t.$$

Сумма проекций сил \vec{G} , \vec{N}'_C и $\vec{\Phi}$ на ось x должна равняться нулю:

$$N'_C - G \cos 60^\circ - \Phi_n = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N'_C &= G \cos 60^\circ + \Phi_n = mg \cos 60^\circ + \frac{mv_C^2}{2R} = \\ &= m \left(g \cos 60^\circ + \frac{v_C^2}{2R} \right) = 0,5 \left(9,81 \cdot 0,5 + \frac{4,20^2}{2 \cdot 0,2} \right) = 25,2 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Искомое давление N_C шарика на стенку трубы по величине равно найденной реакции N'_C и направлено в противоположную сторону.

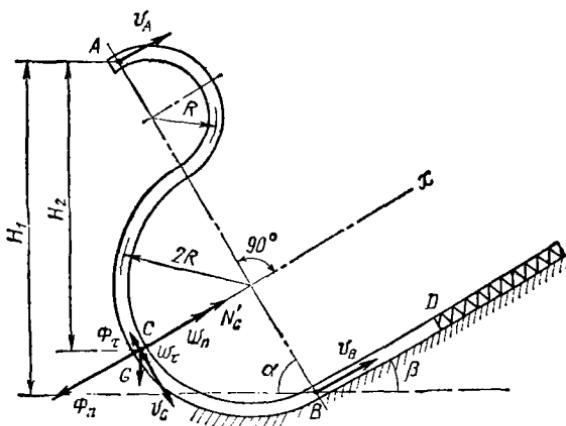


Рис. 156

Скорость шарика в положении D найдем, применив на участке BD теорему об изменении количества движения материальной точки (рис. 157):

$$mv_{Dx} - mv_{Bx} = \sum S_{ix}.$$

К точке приложены: сила тяжести \vec{G} , реакция стени трубы \vec{N}' и сила трения \vec{F}

$$F = fN' = fG \cos \beta.$$

Так как

$$v_{Dx} = v_D, \quad v_{Bx} = v_B, \quad \sum S_{ix} = -G \sin \beta \cdot t - Ft = \\ = -mg \sin \beta \cdot t - f mg \cos \beta \cdot t,$$

то

$$mv_D - mv_B = -mg \sin \beta \cdot t - f mg \cos \beta \cdot t,$$

откуда

$$v_D = v_B - gt (\sin \beta + f \cos \beta) = \\ = 4,59 - 9,81 \cdot 0,1 (0,5 + 0,1 \cdot 0,866) = 4,01 \text{ м/с.}$$

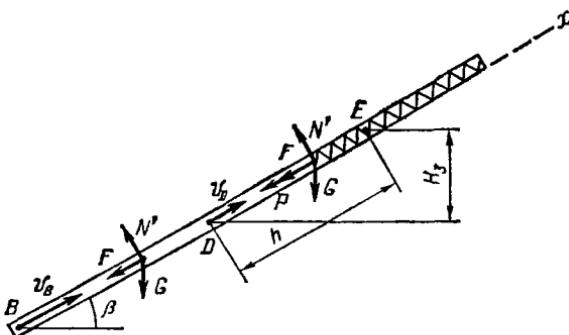


Рис. 157

Для определения величины максимального сжатия h пружины воспользуемся на участке DE теоремой об изменении кинетической энергии материальной точки (рис. 157):

$$mv_E^2/2 - mv_D^2/2 = \sum A_i = -ch^2/2 - GH_3 - Fh.$$

Учитывая, что $v_E = 0$ и $H_3 = h \sin \beta$, получаем

$$ch^2/2 + G (\sin \beta + f \cos \beta) h - mv_D^2/2 = 0$$

или

$$h^2 + \frac{2G (\sin \beta + f \cos \beta)}{c} h - \frac{mv_D^2}{c} = 0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение относительно h :

$$h = -\frac{G (\sin \beta + f \cos \beta)}{c} \pm \sqrt{\left[\frac{G (\sin \beta + f \cos \beta)}{c} \right]^2 + \frac{mv_D^2}{c}} = \\ = -\frac{0,5 \cdot 9,81 (0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{1000} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left[\frac{0,5 \cdot 9,81 (0,5 + 0,1 \cdot 0,866)}{1000} \right]^2 + \frac{0,5 \cdot 4,01^2}{1000}} = -0,003 \pm 0,090 \text{ м.}$$

Принимаем в качестве искомой величины положительный корень квадратного уравнения:

$$h = -0,003 + 0,090 = 0,087 \text{ м.}$$

II. Динамика механической системы

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задание Д-7. Применение теорем об изменении количества движения и о движении центра масс к исследованию движения механической системы

Тело 2 (рис. 158—160) приводится в движение приводом, установленным на теле 1 (варианты 2, 3, 8, 11, 16, 17, 19, 21, 22, 23, 25, 27), или является составной частью самоходной установки (варианты 1, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 18, 2), 24, 26, 28, 29, 30); угловая скорость тела 2 изменяется по закону:

$$\omega_2 = \omega_0 (1 - e^{-st}).$$

В начальный момент тело 1 неподвижно.

Найти уравнение движения и скорость \vec{v} тела 1, если сила сопротивления, действующая на это тело, $\vec{R} = b\vec{v} + \vec{F}_{tp}$.

Заданы следующие величины: m_i — масса i -го тела; r_i, R_i — радиусы малых и больших окружностей; b — постоянный коэффициент; f — коэффициент трения скольжения тела 1 по неподвижной плоскости, $F_{tp} = fN$; α, β — углы, показанные на рис. 158—160.

Во всех вариантах нити считать невесомыми и нерастяжимыми; проскальзыванием нитей и катящихся колес пренебречь.

Пример выполнения задания (рис. 161). 1. Применим теорему об изменении количества движения системы к телам 1—6:

$$\vec{K} - \vec{K}_0 = \sum \vec{S}_t^E, \quad (1)$$

где \vec{K}_0 , \vec{K} — количество движения системы в начальный момент времени $t=0$ и в некоторый момент времени t ; $\sum \vec{S}_t^E$ — геометрическая сумма импульсов всех внешних сил, действующих на систему за промежуток времени t .

Так как при $t=0$ система находилась в состоянии покоя, то $K_0=0$, а следовательно:

$$\vec{K} = \sum \vec{S}_t^E. \quad (2)$$

Проектируя равенство (2) на оси координат, получаем:

$$K_x = \sum S_{tx}^E; \quad (3a)$$

$$K_y = \sum S_{ty}^E. \quad (3b)$$

Так как количество движения рассматриваемой системы равно геометрической сумме количеств движений всех тел, входящих в эту систему, то

$$\vec{K} = \vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + \vec{K}_3 + \vec{K}_4 + \vec{K}_5 + \vec{K}_6.$$

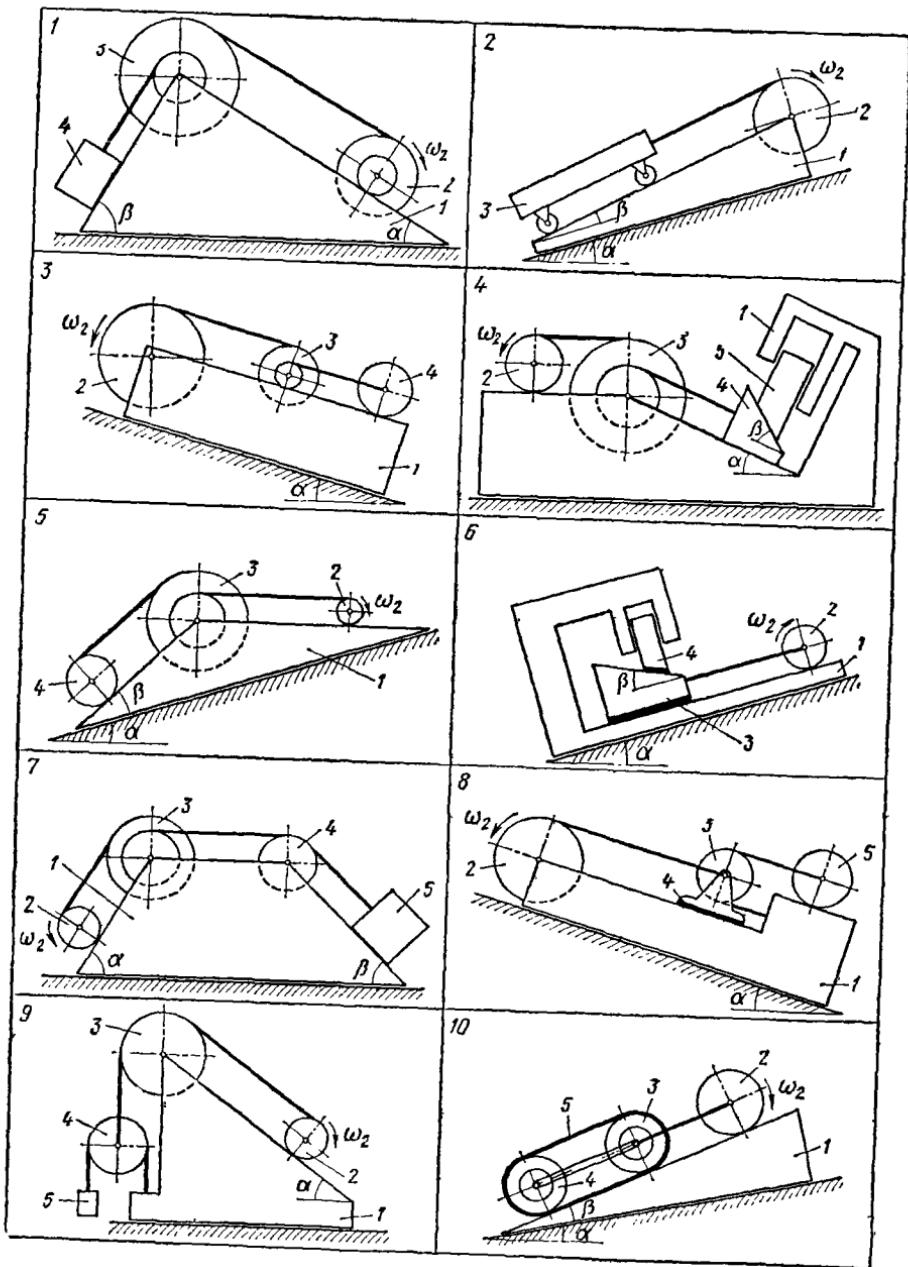


FIG. 158

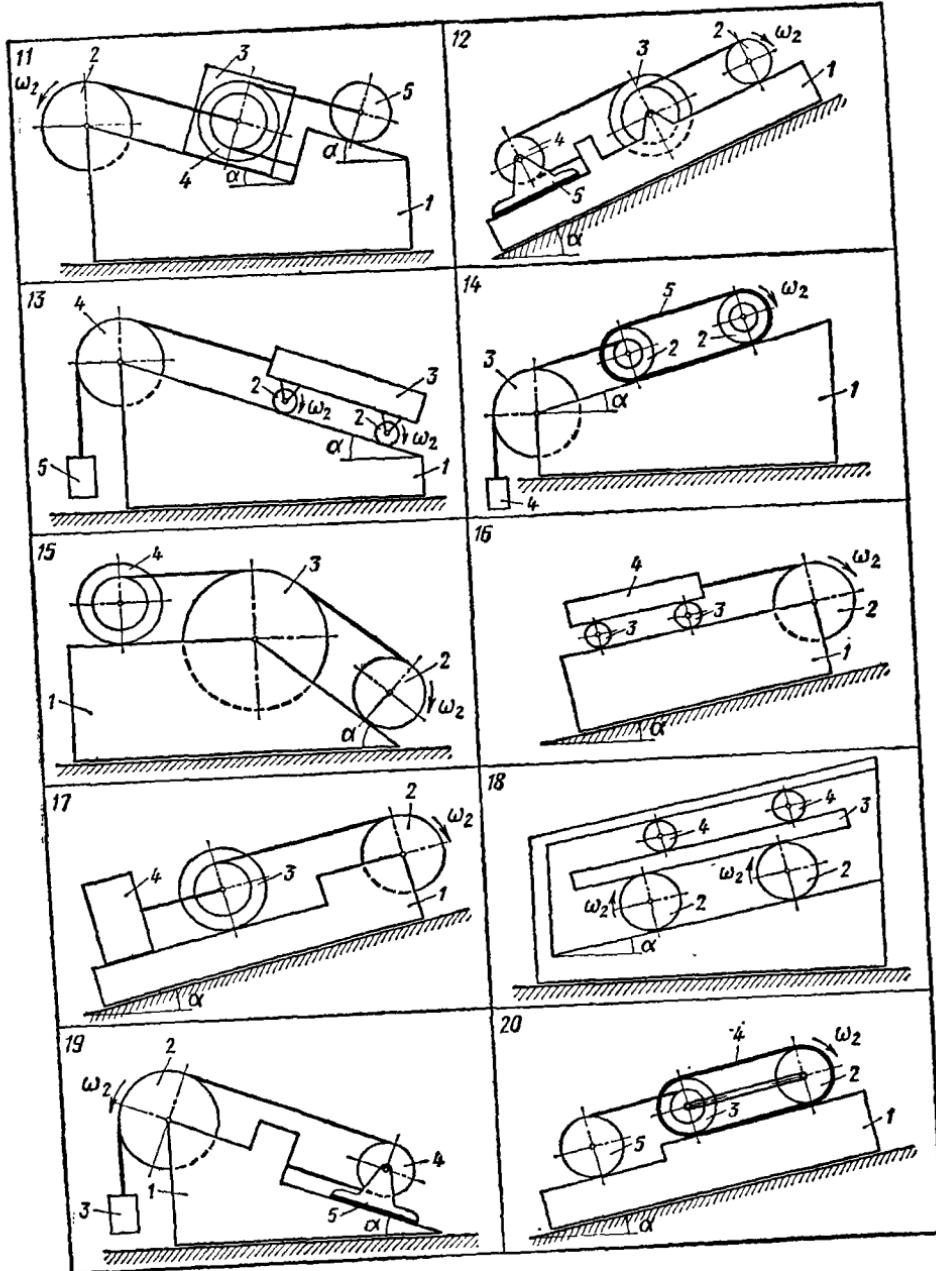


FIG. 159

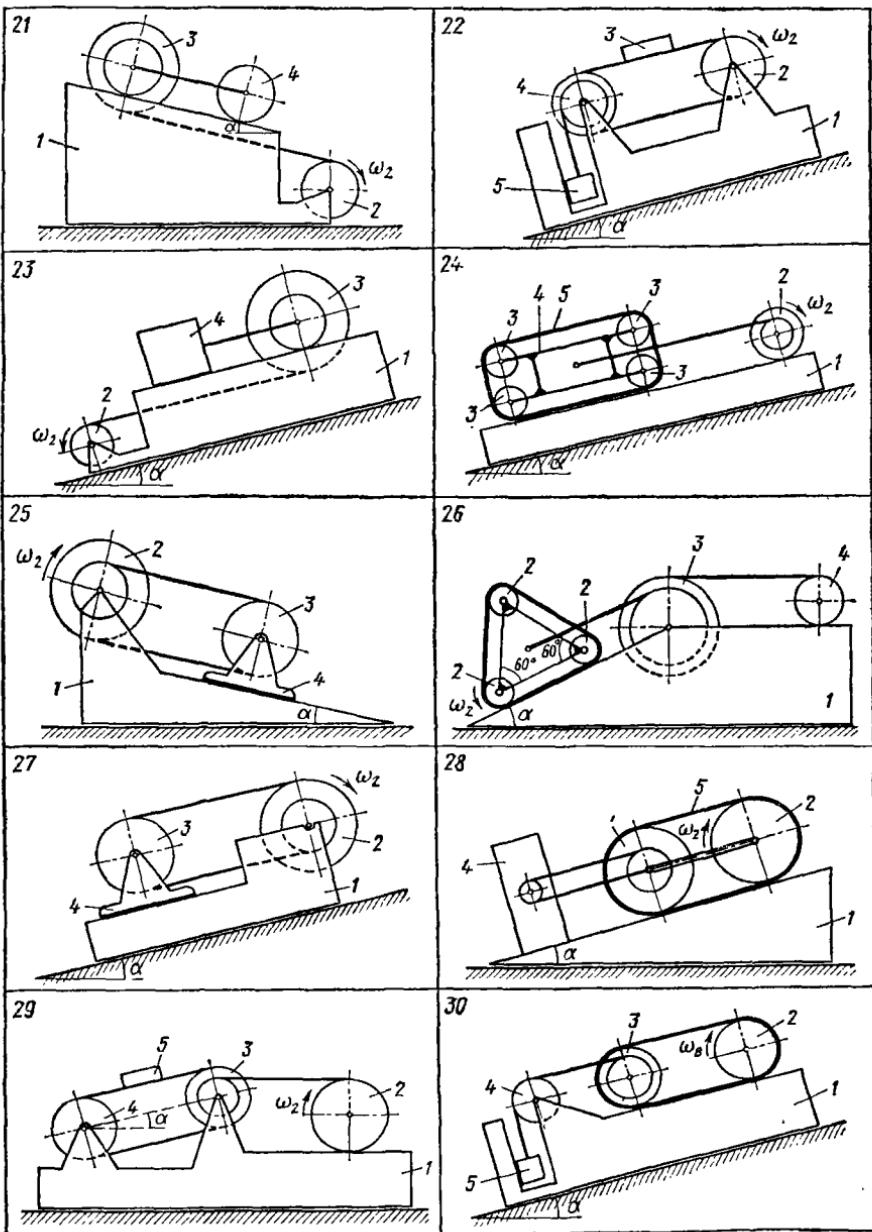


Рис. 160

Количество движения каждого тела равно произведению массы этого тела на абсолютную скорость движения его центра тяжести (рис. 162).

Найдем количества движения тел 1—6.

Количество движения тела 1:

$$\vec{K}_1 = m_1 \vec{v}_1.$$

Тело 2 (колеса) и тело 3 (гусеница) имеют общий центр тяжести в точке C_{2-3} , скорость которого равна скорости точки C_2 , т. е. $\vec{v}_{C_{2-3}} = \vec{v}_{C_2}$. Количество движения этих тел обозначим \vec{K}_{2-3} , тогда

$$\vec{K}_{2-3} = 2\vec{K}_2 + \vec{K}_3 = (2m_2 + m_3) \vec{v}_{C_2}.$$

Количества движения тел 4, 5 и 6 равны:

$$\vec{K}_4 = m_4 \vec{v}_{C_4}; \quad \vec{K}_5 = m_5 \vec{v}_{C_5}; \quad \vec{K}_6 = m_6 \vec{v}_{C_6},$$

где \vec{v}_{C_4} , \vec{v}_{C_5} , \vec{v}_{C_6} , \vec{v}_{C_6} — абсолютные скорости центров тяжести соответствующих тел.

Неподвижную систему отсчета xOy свяжем с плоскостью (неподвижной), по которой движется тело 1, а подвижную систему отсчета

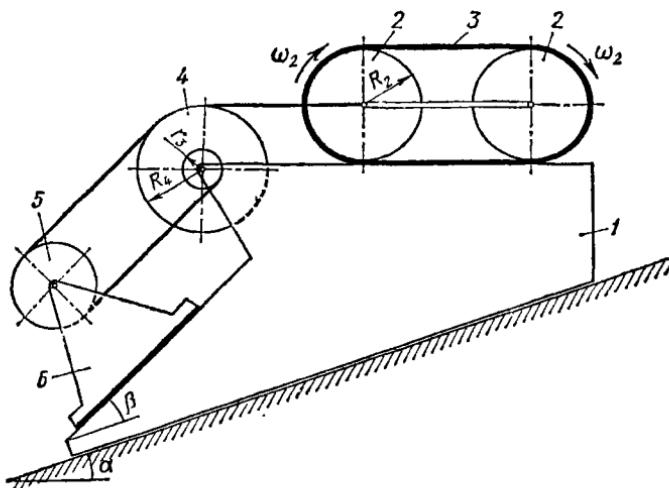


Рис. 161

$x_1O_1y_1$ — с телом 1. Абсолютная скорость центра тяжести каждого тела равна геометрической сумме переносной и относительной скоростей, причем скорость тела 1 явится переносной скоростью для остальных тел, т. е.

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_e.$$

Абсолютная скорость центра тяжести C_{2-3} :

$$\vec{v}_{C_{2-3}} = \vec{v}_e + \vec{v}_{C_{2-3}r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{C_{2-3}r},$$

где \vec{v}_{C_2} — относительная скорость центров колес C_2 при качении этих колес без скольжения; модуль этой скорости

$$v_{C_2r} = \omega_2 R_2.$$

Абсолютная скорость центра тяжести C_4 :

$$\vec{v}_{C_4} = \vec{v}_e = \vec{v}_1.$$

Абсолютная скорость центра тяжести C_5 :

$$\vec{v}_{C_5} = \vec{v}_e + \vec{v}_{C_5r} = \vec{v}_1 + \vec{v}_{C_5r},$$

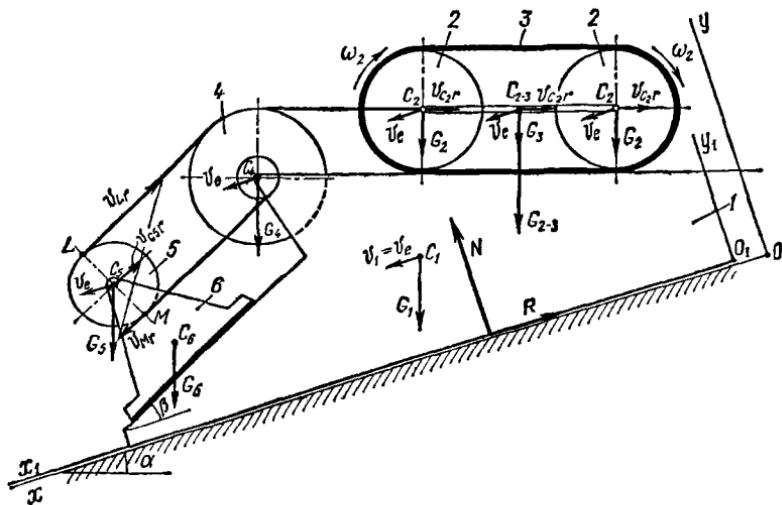


Рис. 162

где \vec{v}_{C_5r} — относительная скорость центра тяжести C_5 , модуль которой

$$v_{C_5r} = (1/2) \cdot (v_{Lr} - v_{Mr}),$$

где v_{Lr} , v_{Mr} — относительные скорости точек L и M тела 5 , равные вращательным скоростям соответствующих точек тела 4 , т. е.

$$v_{Lr} = \omega_4 R_4; \quad v_{Mr} = \omega_4 r_4.$$

Так как

$$\omega_4 = v_{C_2r}/R_4 = \omega_2 R_2/R_4, \text{ то } v_{Lr} = \omega_2 R_2,$$

и следовательно, $v_{Mr} = \omega_2 R_2 \cdot r_4/R_4$.

$$v_{C_5r} = (1/2) \cdot (\omega_2 R_2 - r_4 \omega_2 R_2/R_4) = (1/2) \cdot \omega_2 R_2 (1 - r_4/R_4).$$

Абсолютная скорость центра тяжести C_6 :

$$\vec{v}_{C_6} = \vec{v}_{C_5}.$$

Найдем проекции абсолютных скоростей центров тяжести тел на ось x :

$$v_{1x} = v_e = \dot{x}$$

(где x — координата центра тяжести C_1)

$$\left. \begin{aligned} v_{C_2x} &= v_e - v_{C_2r} \cos \alpha = \dot{x} - \omega_2 R_2 \cos \alpha; \\ v_{C_4x} &= v_e = \dot{x}; \\ v_{C_5x} &= v_e - v_{C_5r} \cos \beta = \dot{x} - (1/2) \cdot \omega_2 R_2 \cdot (1 - r_4/R_4) \cos \beta; \\ v_{C_6x} &= v_{C_5x}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следовательно, проекция количества движения всей системы на ось x :

$$K_x = m_1 \dot{x} + (2m_2 + m_3) (\dot{x} - \omega_2 R_2 \cos \alpha) + m_4 \dot{x} + (m_5 + m_6) [\dot{x} - (1/2) \cdot \omega_2 R_2 (1 - r_4/R_4) \cos \beta]$$

или

$$K_x = m \dot{x} - \omega_2 R_2 [(2m_2 + m_3) \cos \alpha + (1/2) \cdot (m_5 + m_6) \cdot (1 - r_4/R_4) \cos \beta], \quad (5)$$

где

$$m = m_1 + 2m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6.$$

Сумма проекций импульсов всех внешних сил на ось x :

$$\Sigma S_{ix}^E = Gt \sin \alpha - \int_0^t b \dot{x} dt - \int_0^t F_{tp} dt,$$

где G — вес всей системы.

Учитывая, что

$$\int_0^t b \dot{x} dt = b \int_0^t dx = bx \text{ и } F_{tp} = fN,$$

где N — нормальное давление, имеем

$$\Sigma S_{ix}^E = Gt \sin \alpha - bx - f \int_0^t N dt. \quad (6)$$

Приравнивая (5) и (6), получаем

$$\begin{aligned} m \dot{x} - \omega_2 R_2 [(2m_2 + m_3) \cos \alpha + (1/2) \cdot (m_5 + m_6) \cdot (1 - r_4/R_4) \cos \beta] &= \\ &= Gt \sin \alpha - bx - f \int_0^t N dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Проекции абсолютных скоростей центров тяжести тел на ось y :

$$v_{1y} = 0; \quad v_{C_2y} = -v_{C_2r} \sin \alpha = -\omega_2 R_2 \sin \alpha;$$

$$v_{C_4y} = 0; \quad v_{C_5y} = v_{C_5r} \sin \beta = (1/2) \cdot \omega_2 R_2 (1 - r_4/R_4) \sin \beta; \quad (8)$$

$$v_{C_6y} = v_{C_5y}.$$

Следовательно, проекция количества движения всей системы на ось y :

$$K_y = -(2m_2 + m_3) \omega_2 R_2 \sin \alpha + (1/2) (m_5 + m_6) \omega_2 R_2 (1 - r_4/R_4) \cdot \sin \beta$$

или

$$K_y = \omega_2 R_2 [(1/2) \cdot (m_5 + m_6) (1 - r_4/R_4) \sin \beta - (2m_2 + m_3) \sin \alpha]. \quad (9)$$

Сумма проекций импульсов всех внешних сил на ось y :

$$\Sigma S_{iy}^F = -Gt \cos \alpha + \int_0^t N dt. \quad (10)$$

Приравнивая (9) и (10), получаем

$$\begin{aligned} \omega_2 R_2 [0,5 (m_5 + m_6) (1 - r_4/R_4) \sin \beta - (2m_2 + m_3) \sin \alpha] &= \\ &= -Gt \cos \alpha + \int_0^t N dt, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда

$$\int_0^t N dt = Gt \cos \alpha + \omega_2 R_2 [0,5 (m_5 + m_6) (1 - r_4/R_4) \sin \beta - (2m_2 + m_3) \sin \alpha]. \quad (12)$$

После подстановки выражения (12) в уравнение (7) имеем:

$$\begin{aligned} m\dot{x} + bx &= \omega_2 R_2 [(2m_2 + m_3) (\cos \alpha + f \sin \alpha) + \\ &+ 0,5 (m_5 + m_6) (1 - r_4/R_4) (\cos \beta - f \sin \beta)] + Gt (\sin \alpha - f \cos \alpha), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\omega_2 = \omega_0 (1 - e^{-st}).$$

Разделив обе части равенства (13) на m , получаем

$$\dot{x} + \eta x = h (1 - e^{-st}) - qt, \quad (14)$$

где $\eta = b/m$,

$$h = \frac{\omega_0 R_2 [(2m_2 + m_3) (\cos \alpha + f \sin \alpha) + 0,5 (m_5 + m_6) (1 - r_4/R_4) (\cos \beta - f \sin \beta)]}{m},$$

$$q = g (f \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Решение уравнения (14) состоит из общего решения соответствующего однородного уравнения $\dot{x} + \eta x = 0$ и частного решения уравнения (14):

$$x = x_1 + x_2. \quad (15)$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$x_1 = C e^{-\eta t}.$$

Частное решение уравнения (14) найдем в виде:

$$x_2 = Q_1 e^{-st} + Q_2 t + Q_3.$$

Подставив частное решение x_2 в уравнение (14), получим:

$$-Q_1 s e^{-st} + Q_2 + \eta (Q_1 e^{-st} + Q_2 t + Q_3) = h (1 - e^{-st}) - qt.$$

Приравнивая коэффициенты при переменных величинах e^{-st} и t , а также свободные члены, получим следующие равенства:

$$-Q_1 s + \eta Q_1 = -h; \quad \eta Q_2 = -q; \quad Q_2 + \eta Q_3 = h,$$

откуда

$$Q_1 = h/(s - \eta); \quad Q_2 = -q/\eta; \quad Q_3 = h/\eta + q/\eta^2.$$

Следовательно,

$$x = x_1 + x_2 = Ce^{-\eta t} + [h/(s - \eta)] e^{-st} + h/\eta + q/\eta^2 - (q/\eta) t. \quad (16)$$

Постоянную C найдем из условия: при $t = 0$

$$x_0 = 0.$$

Это условие приводит к следующему значению C :

$$C = -h/(s - \eta) - (1/\eta) [(q/\eta) + h].$$

Таким образом, уравнение движения тела 1 можно представить в следующем виде:

$$x = [h/(s - \eta)] (e^{-st} - e^{-\eta t}) + (1/\eta) [(q/\eta) + h] (1 - e^{-\eta t}) - (q/\eta) t. \quad (17)$$

Скорость тела 1:

$$\begin{aligned} v = \dot{x} &= [h/(s - \eta)] (\eta e^{-\eta t} - se^{-st}) + [(q/\eta) + h] e^{-\eta t} - \\ &- q/\eta = [hs/(s - \eta)] (e^{-\eta t} - e^{-st}) - (q/\eta) (1 - e^{-\eta t}). \end{aligned} \quad (18)$$

Из выражения (18) следует, что скорость тела 1 через некоторый промежуток времени может оказаться равной нулю и тело остановится. В таком случае уравнение движения (17) справедливо лишь для этого промежутка времени.

2. К исследованию движения рассматриваемой механической системы применим теорему о движении центра масс:

$$m \vec{\omega}_C = \sum \vec{P}_i^E, \quad (20)$$

где $\sum \vec{P}_i^E$ — главный вектор всех внешних сил системы.

Дифференциальные уравнения движения центра масс:

$$m \ddot{x}_C = \sum X_i^E = X^E; \quad m \ddot{y}_C = \sum Y_i^E = Y^E. \quad (21)$$

Координаты центра масс данной системы:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{m_1 x_{C_1} + (2m_2 + m_3) x_{C_2} + \dots + m_4 x_{C_4} + m_5 x_{C_5} + m_6 x_{C_6}}{m}; \\ y_C &= \frac{m_1 y_{C_1} + (2m_2 + m_3) y_{C_2} + \dots + m_4 y_{C_4} + m_5 y_{C_5} + m_6 y_{C_6}}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Дифференцируя выражение (22) дважды по времени и учитывая, что

$$\ddot{x}_{C_1} = \ddot{x}, \quad \ddot{x}_{C_{2-6}} = \ddot{x}_{C_i}, \quad \ddot{x}_{C_6} = \ddot{x}_{C_6}$$

и

$$\ddot{y}_{C_1} = \ddot{y}_1 = 0, \quad \ddot{y}_{C_{2-6}} = \ddot{y}_{C_i}, \quad \ddot{y}_{C_6} = \ddot{y}_{C_6},$$

получаем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_C &= \frac{m_1 \ddot{x} + (2m_2 + m_3) \ddot{x}_{C_2} + m_4 \ddot{x}_{C_4} + (m_5 + m_6) \ddot{x}_{C_6}}{m}; \\ \ddot{y}_C &= \frac{(2m_2 + m_3) \ddot{y}_{C_2} + m_4 \ddot{y}_{C_4} + (m_5 + m_6) \ddot{y}_{C_6}}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Найдем проекции ускорений центров тяжести тел рассматриваемой системы на неподвижные оси координат x , y . Проекции скоростей центров тяжести приведены в (4) и (8).

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{C_2} &= \frac{dv_{C_2x}}{dt} = \ddot{x} - \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \cos \alpha; \quad \ddot{x}_{C_4} = \frac{dv_{C_4x}}{dt} = \ddot{x}; \\ \ddot{x}_{C_6} &= \frac{dv_{C_6x}}{dt} = \ddot{x} - 0,5 \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \cos \beta; \\ v_{C_2} &= \frac{dv_{C_2y}}{dt} = - \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \sin \alpha; \quad \ddot{y}_{C_4} = 0; \\ y_{C_6} &= \frac{dv_{C_6y}}{dt} = 0,5 R_2 \frac{d\omega_2}{dt} \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \sin \beta. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подставляем (24) в (23):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_C &= \frac{m_1 \ddot{x} + (2m_2 + m_3) \left(\ddot{x} - \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \sin \alpha \right) + m_4 \ddot{x} + (m_5 + m_6) \times \\ &\quad \times \left[\ddot{x} - 0,5 \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \cos \beta \right]}{m}; \\ \ddot{y}_C &= \frac{-(2m_2 + m_3) \frac{d\omega_2}{dt} R_2 \sin \alpha + (m_5 + m_6) \cdot 0,5 R_2 \frac{d\omega_2}{dt} \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \sin \beta}{m} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_C &= \frac{m \ddot{x} - R_2 \frac{d\omega_2}{dt} \left[(2m_2 + m_3) \cos \alpha + 0,5 (m_5 + m_6) \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \cos \beta \right]}{m}; \\ \ddot{y}_C &= \frac{R_2 \frac{d\omega_2}{dt} \left[0,5 (m_5 + m_6) \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \sin \beta - (2m_2 + m_3) \sin \alpha \right]}{m}. \end{aligned} \right\}$$

Найдем проекции главного вектора всех внешних сил системы на оси x и y .

$$\left. \begin{aligned} X^E &= \sum X_i^E = G \sin \alpha - b \dot{x} - F_{tp}; \\ Y^E &= \sum Y_i^E = -G \cos \alpha + N. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Подставляем (25) и (26) в дифференциальные уравнения (21) движения центра масс системы:

$$m \ddot{x} - R_2 \frac{d\omega_2}{dt} \left[(2m_2 + m_3) \cos \alpha + 0,5 (m_5 + m_6) \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \cos \beta \right] = G \sin \alpha - b \dot{x} - fN$$

или

$$m\ddot{x} + b\dot{x} = R_2 \frac{d\omega_2}{dt} [(2m_2 + m_3) \cos \alpha + 0,5 \times \\ \times (m_5 + m_6) \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \cos \beta] + G \sin \alpha - fN \quad (27a)$$

$$\frac{d\omega_2}{dt} R_2 \left[(0,5 (m_5 + m_6) \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \sin \beta - (2m_2 + m_3) \sin \alpha \right] = \\ = -G \cos \alpha + N. \quad (27b)$$

Из уравнения (27b) найдем нормальную реакцию N , учитывая, что угловое ускорение колес 2 равно: $\epsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \omega_0 s e^{-st}$:

$$N = \omega_0 s e^{-st} R_2 \left[0,5 (m_5 + m_6) \left(1 - \frac{r_4}{R_4}\right) \sin \beta - \right. \\ \left. - (2m_2 + m_3) \sin \alpha \right] + G \cos \alpha. \quad (28)$$

Подставляя выражение (28) в (27a), получаем дифференциальное уравнение движения тела 1 следующего вида:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} = h s e^{-st} - q, \quad (29)$$

где $\eta = b/m$,

$$h = \frac{\omega_0 R_2 [(2m_2 + m_3) (\cos \alpha + f \sin \alpha) + 0,5 (m_5 + m_6) (1 - r_4/R_4) (\cos \beta - f \sin \beta)]}{m}, \\ q = g (f \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Общее решение дифференциального уравнения (29) имеет вид:

$$x = x_1 + x_2,$$

где $x_1 = C_1 + C_2 e^{-\eta t}$ — общее решение однородного уравнения:

$$\ddot{x} + \eta \dot{x} = 0.$$

Частное решение x_2 находим в виде:

$$x_2 = Q_1 e^{-st} + Q_2 t.$$

Для определения Q_1 и Q_2 подставим частное решение в уравнение (29):

$$Q_1 s^2 e^{-st} - \eta s Q_1 e^{-st} + \eta Q_2 = h s e^{-st} - q.$$

Приравняв коэффициенты при e^{-st} и свободные члены

$$Q_1 (s - \eta) = h, \quad \eta Q_2 = -q,$$

получим:

$$Q_1 = \frac{h}{s - \eta}; \quad Q_2 = -q/\eta.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (29) имеет вид:

$$x = x_1 + x_2 = C_1 + C_2 e^{-\eta t} + [h/(s - \eta)] e^{-st} - (q/\eta) t. \quad (30)$$

Проекция скорости тела 1:

$$\dot{x} = dx/dt = -\eta C_2 e^{-\eta t} - [hs/(s - \eta)] e^{-st} - q/\eta. \quad (31)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий:

при $t=0$

$$x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0.$$

При $t=0$ уравнения (30) и (31) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2 + h/(s - \eta); \\ 0 &= -\eta C_2 - [hs/(s - \eta)] - q/\eta, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} C_2 &= -\frac{hs}{\eta(s - \eta)} - \frac{q}{\eta^2}, \\ C_1 &= -C_2 - \frac{h}{s - \eta} = \frac{hs}{\eta(s - \eta)} + \frac{q}{\eta^2} - \frac{h}{s - \eta} = \frac{h}{\eta} + \frac{q}{\eta^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение движения тела I имеет вид:

$$x = \frac{h}{\eta(s - \eta)} (e^{-st} - e^{-\eta t}) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{q}{\eta} + h \right) \cdot (1 - e^{-\eta t}) - \frac{q}{\eta} t. \quad (32)$$

Это же уравнение получено при исследовании движения механической системы с помощью теоремы об изменении количества движения системы [см. (17)].

Задание Д-8. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела

Тело H массой m_1 вращается вокруг вертикальной оси z с постоянной угловой скоростью ω_0 ; при этом в точке O желоба AB тела H на расстоянии AO от точки A , отсчитываемом вдоль желоба, находится материальная точка K массой m_2 . В некоторый момент времени ($t=0$) на систему начинает действовать пара сил с моментом $M_2 = f_1(t)$. При $t=\tau$ действие пары сил прекращается; одновременно точка K начинает относительное движение из точки O вдоль желоба AB (в направлении к B) по закону $OK = s = f_2(t - \tau)$ для $t > \tau$.

Определить угловую скорость тела H при $t=\tau$ и при $t=T$, пренебрегая сопротивлением вращению тела H . Тело H рассматривать как пластинку, имеющую форму, показанную на рис. 163 – 165. Необходимые для решения данные приведены в табл. 49 – 50.

В тех вариантах, в которых пластинка H расположена в вертикальной плоскости, относительное движение точки K вызывается силой действующей в той же плоскости; в остальных вариантах под точкой K подразумевается самоходная тележка.

Пример выполнения задания (рис. 166). Дано: $m_1 = 200$ кг; $m_2 = 80$ кг; $M_2 = 592t$ Нм; $\omega_0 = 2$ с⁻¹; $AO = 0,8$ м; $R = 2,4$ м; $a = 1,2$ м; $\tau = 4$ с; $T = 6$ с; $OK = 0,5(t - \tau)^2$ м.

Определить ω_τ и ω_T , считая тело H однородной круглой пластинкой.

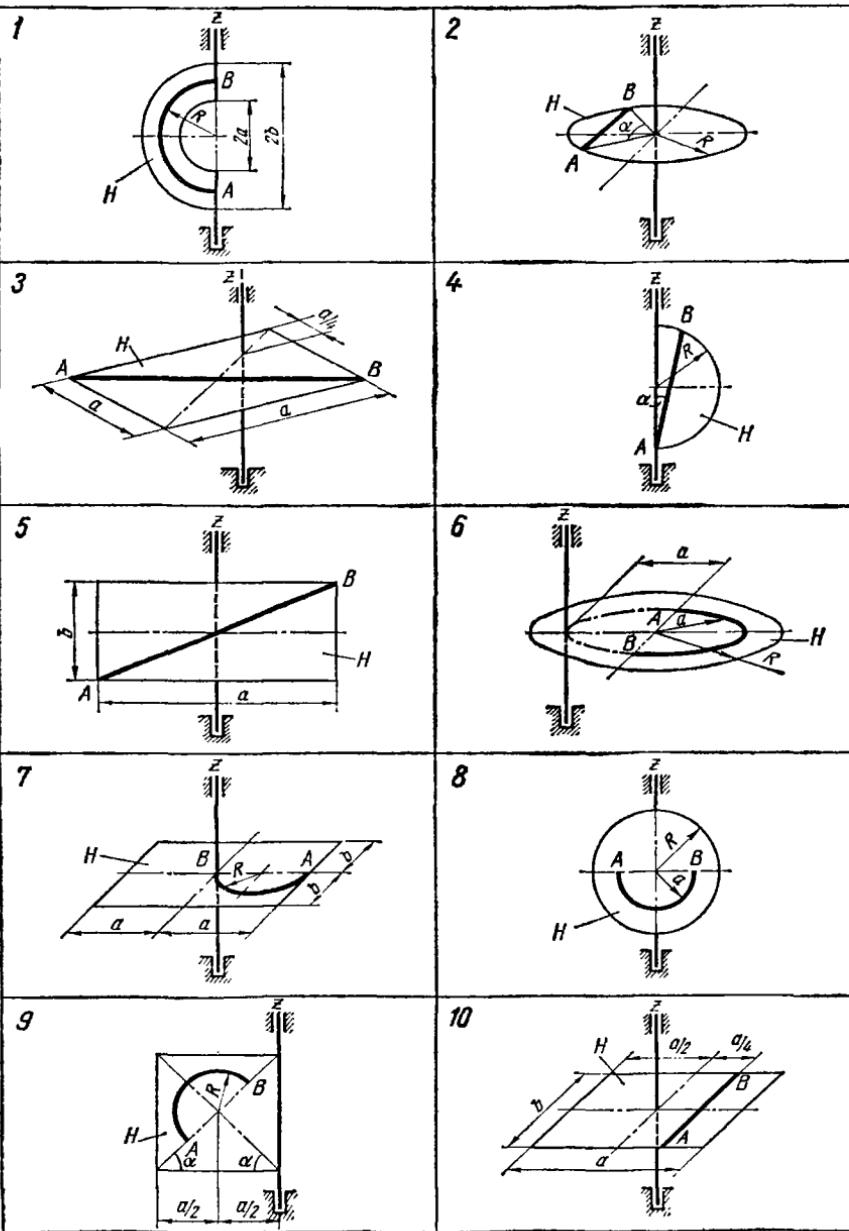


Рис. 163

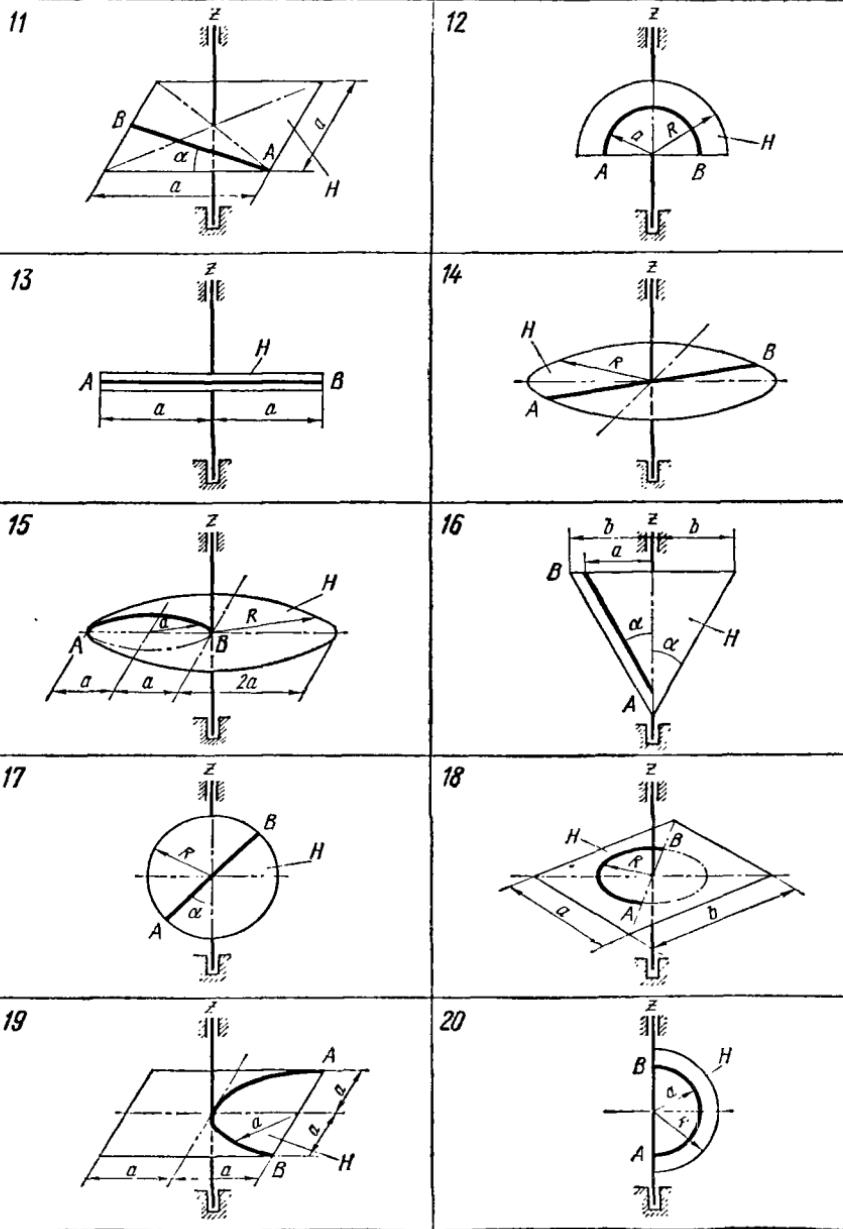
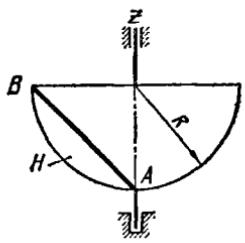
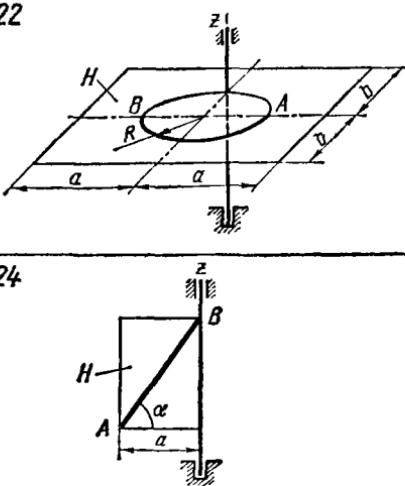


Рис. 164

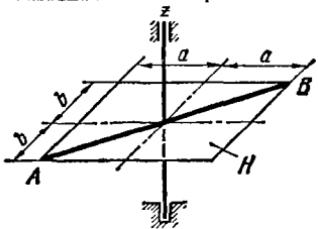
21



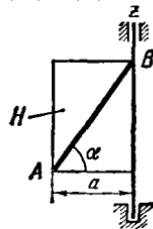
22



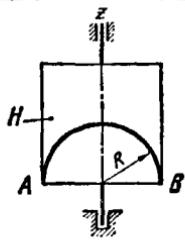
23



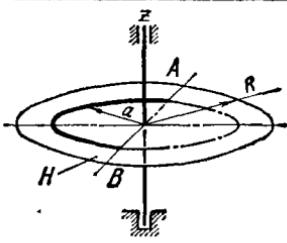
24



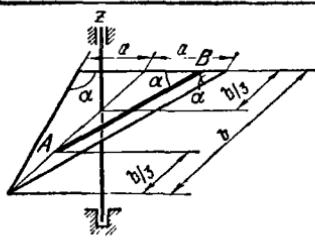
25



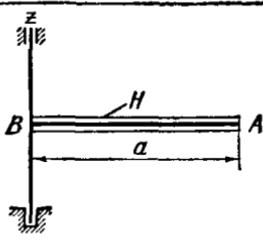
26



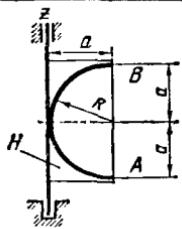
27



28



29



30

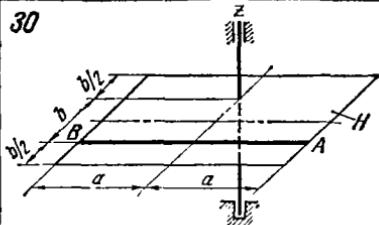


FIG. 165

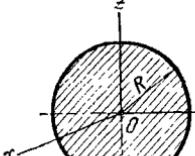
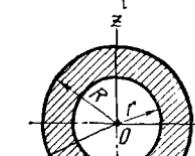
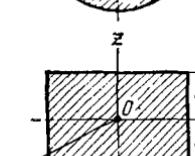
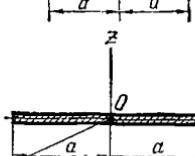
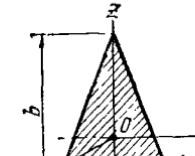
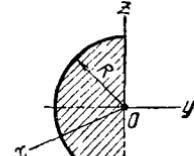
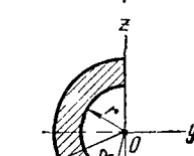
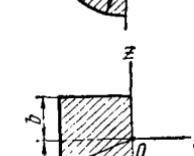
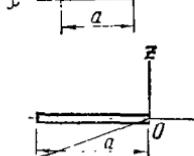
Таблица 49

Номер варианта (рис. 163—165)	m_1	m_2	a_0^*	c^{-1}	$a, м$	$b, м$	$R, м$	σ_a град	$AO, м$	$M_z = f_1(t)^*, Нм$	$\tau, с$	$T, с$	$OK = s = f_2(t - \tau), м$
	кг	кг	кг	кг	м	м	м	град	м	м	с	с	м
1	32	10	-1	1	1,5	1,2	2	-	$\pi R/6$	-29,6 t^2	3	4	$(5\pi R/12)(t - \tau)$
2	200	60	-2	-	-	-	120	$V\sqrt{3}/2$	101	5	6	6	$V\sqrt{3}(t - \tau)^2$
3	120	40	0	2	-	-	-	0	-120 t	4	6	6	$(V\sqrt{2}/4)(t - \tau)^3$
4	16	5	-3	-	-	1	30	0,4	21 t	2	6	6	$0,6 V(t - \tau)$
5	66	10	1,5	2	1,5	-	-	0	$15 V\sqrt{t}$	4	6,5	6,5	$0,5(t - \tau)$
6	160	80	-1,25	1,5	-	0,8	-	$\pi a/6$	-700 t	$\sqrt{3}$	2	$2\sqrt{3}$	$(5\pi a/18)(t - \tau)^3$
7	300	50	-2	1,6	1	2,5	-	0	968	1	2	2	$(\pi a/2)(t - \tau)^2$
8	80	20	0	1,2	-	2	-	$\pi a/2$	240 $V\sqrt{t}$	4	8	8	$(\pi a/4)V(t - \tau)$
9	20	5	5	1,2	-	0,4	-	$\pi R/4$	-29,2 t	3	4	4	$(3\pi R/4)(t - \tau)^2$
10	100	40	2	2	$V\sqrt{2}$	-	-	$V\sqrt{2}/2$	-90 $V\sqrt{t}$	4	5	5	$(V\sqrt{2}/4)(t - \tau)$
11	60	20	-1	2	-	-	15	0	40 t	2	4	4	$0,4(t - \tau)^2$
12	40	10	-3	1	-	2	-	0	50 t^2	3	5	5	$(\pi a/3)(t - \tau)$
13	24	4	4	1	-	-	-	-	-27 $V\sqrt{t}$	1	3	3	$0,3(t - \tau)$
14	40	10	2	-	-	1	-	0,5	-120 t	1	4	4	$0,5(t - \tau)$
15	120	50	-4	1	-	2	-	0	330 t^2	2	3	3	$(\pi a/2)(t - \tau)^2$
16	60	10	-5	1	1,2	-	-	$\pi a/6$	74	2	6	6	$0,3 V(t - \tau)$
17	50	10	-2	-	3	1,6	-	$\pi R/2$	60 t	4	6	6	$0,6(t - \tau)^2$
18	120	50	-3	2	1,5	-	-	0	324	3	5	5	$(\pi R/8)(t - \tau)^2$
19	90	30	1	1	-	1,2	-	$\pi a/6$	-135 t	2	3	3	$(\pi a/4)(t - \tau)$
20	50	12	3	-	-	-	-	-	-14 t^2	3	5	5	$(\pi a/12)(t - \tau)^2$
21	40	10	-6	-	-	-	-	$V\sqrt{2}/2$	75 $V\sqrt{t}$	1	3	3	$(V\sqrt{2}/16)(t - \tau)^2$
22	150	50	-1	1,6	1,2	0,6	-	$\pi R/2$	163	4	5	5	$(\pi R/2)V(t - \tau)$
23	90	20	2	$V\sqrt{2}$	1	-	-	$V\sqrt{3}/2$	-210	2	3	3	$(V\sqrt{3}/2)(t - \tau)$
24	50	12	-3	0,6	-	-	60	0,2	97 t^2	2	6	6	$0,4 V(t - \tau)$
25	36	8	-5	-	-	0,5	-	0	20 t	2	4	4	$(\pi R/6)(t - \tau)^2$
26	150	40	-4	1,5	-	2	-	$\pi a/6$	1170 $V\sqrt{t}$	1	2	2	$(\pi a/2)(t - \tau)^2$
27	120	30	0	1	-	-	60	0	-25 t	2	3	3	$(t - \tau)^2$
28	15	4	-2	0,6	-	-	-	0,1	56 t	3	4	4	$0,4 V(t - \tau)$
29	20	5	5	0,6	-	-	-	-	-63 $V\sqrt{t}$	4	5	5	$(5\pi R/6)(t - \tau)$
30	150	50	0	1,6	1,2	-	-	-	63 t^2	2	4	4	$0,2(t - \tau)^2$

Знак минус перед M_z в соответствует направлению вращения часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Z.

Таблица 50

Оевые моменты инерции однородных пластинок

	J_x	J_y	J_z
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$
			
			
			
			
			

Решение. К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы, выраженную уравнением:

$$dL_z/dt := \sum M_{iz}^E,$$

где L_z — кинетический момент системы, состоящей в данном случае из тела H и точки K , относительно оси z ; $\sum M_{iz}^E = M_z^E$ — главный момент внешних сил, приложенных к системе, относительно оси z .

На систему за время от $t=0$ до $t=\tau$ действуют силы: вес \vec{G}_1 тела H , вес \vec{G}_2 точки K , пары сил с моментом M_z и реакции под пятника и подшипника (рис. 166, а).

Предполагая вращение тела H происходящим против вращения часовой стрелки, найдем текущее значение кинетического момента системы, который складывается из кинетического момента тела

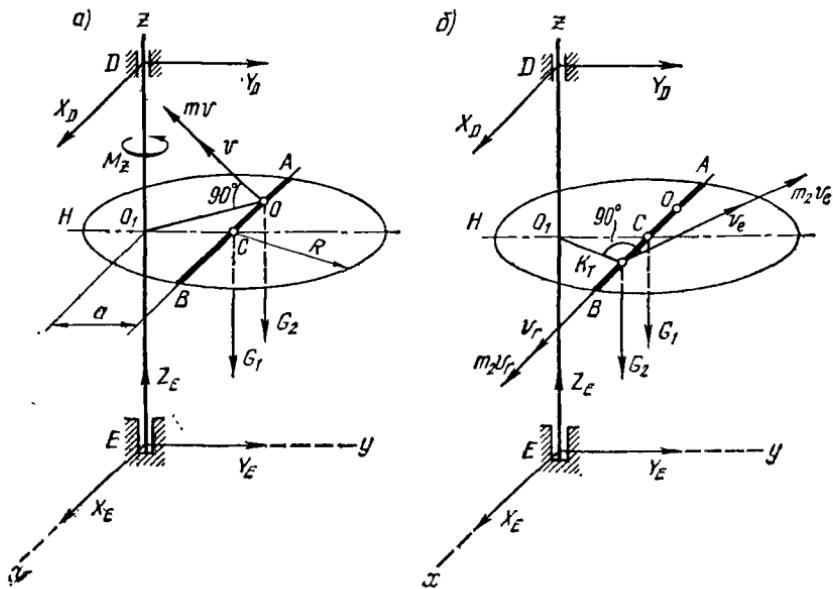


Рис. 166

$I_z\omega$ и момента количества движения точки K , находящейся в точке O тела H и имеющей скорость $v = \omega \cdot O_1 O$:

$$m_2 v \cdot O_1 O = m_2 \omega \cdot O_1 O^2$$

Таким образом,

$$L_z = J_z \omega + m_2 \omega \cdot O_1 O^2 = (J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \omega.$$

Главный момент внешних сил равен вращающему моменту M_z , так как другие силы момента относительно оси z не создают.

Уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента, примет вид

$$\frac{d [(J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \omega]}{dt} = M_z, \quad (1)$$

где $M_z = ct$ ($c = 592$ Нм/с).

Разделим в уравнении (1) переменные и проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$(J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \int_{\omega_0}^{\omega_\tau} d\omega = \int_0^\tau ct dt.$$

Тогда

$$(J_z + m_2 \cdot O_1 O^2) (\omega_\tau - \omega_0) = c\tau^2/2. \quad (2)$$

Найдем числовые значения входящих в уравнение (2) величин.

Момент инерции тела H относительно оси z найдем, используя теорему о зависимости между моментами инерции относительно параллельных осей:

$$J_z = J_{zC} + m_1 a^2,$$

где J_{zC} — момент инерции тела H — однородной круглой пластинки относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести C тела параллельно оси z :

$$J_{zC} = m_1 R^2/2.$$

Тогда

$$J_z = m_1 R^2/2 + m_1 a^2,$$

т. е.

$$J_z = 200 \cdot 2,4^2/2 + 200 \cdot 1,2^2 = 864 \text{ кгм}^2.$$

Из чертежа (рис. 166, а)

$$O_1 O^2 = OC^2 + O_1 C^2 = 1,6^2 + 1,2^2 = 4 \text{ м}^2,$$

поэтому

$$J_z + m_2 \cdot O_1 O^2 = 864 + 80 \cdot 4 = 1184 \text{ кгм}^2.$$

Таким образом, из уравнения (2)

$$1184 [\omega_\tau - (-2)] = (592 \cdot 4^2)/2$$

имеем

$$\omega_\tau = 2 \text{ с}^{-1}.$$

В течение промежутка времени от $t = \tau$ до $t = T$ на систему действуют силы G_1 , G_2 , реакции под пятника и подшипника (рис. 166, б).

Поскольку вращающий момент M_z снимается, т. е. $\sum M_{tz}^E = 0$, то

$$dL_z/dt = 0, \quad L_z = \text{const.}$$

Определим значения кинетических моментов $L_{z\tau}$ при $t = \tau$ и L_{zT} при $t = T$ и приравняем эти значения.

Для $t = \tau$

$$L_{z\tau} = (L_z + m_2 \cdot O_1 O^2) \omega_\tau = 1184 \cdot 2 = 2368 \text{ кгм}^2/\text{с}.$$

При $t > \tau$ скорость точки K складывается из относительной скорости \vec{v}_r по отношению к телу H и переносной скорости \vec{v}_e в движении вместе с телом H . Поэтому для $t = T$ покажем (рис. 166, б) два вектора количества движения точки: $m_2 \vec{v}_r$ и $m_2 \vec{v}_e$.

Для $t = T$

$$L_{zT} = J_z \omega_T + m_2 \omega_T \cdot O_1 K_T^2 - m_2 v_r \cdot O_1 C.$$

Найдем

$$O_1 K_T^2 = O_1 C^2 + C K_T^2,$$

где

$$CK_{\tau} = OK_{\tau} - OC,$$

$$OK_T = s_{t-T} = 0,5(T-\tau)^2 = 0,5(6-4)^2 = 2 \text{ м},$$

т. е.

$$CK_T = 2 - 1,6 = 0,4 \text{ м}, O_1K_T^* = 1,2^2 + 0,4^2 = 1,6 \text{ м}^2.$$

Относительная скорость

$$v_r = ds/dt = 2 \cdot 0,5(t-\tau)$$

при $t = T$

$$v_r = 2 \cdot 0,5(6-4) = 2 \text{ м/с.}$$

Поэтому

$$L_{zT} = 864\omega_T + 80\omega_T \cdot 1,6 - 80 \cdot 2 \cdot 1,2 = 992\omega_T - 192.$$

Приравнивая $L_{z\tau}$ и L_{zT}

$$2368 = 992\omega_T - 192,$$

находим

$$\omega_T = 2,59 \text{ с}^{-1}.$$



Задание Д-9. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система под действием сил тяжести приходит в движение из состояния покоя; начальное положение системы показано на рис. 167—169. Учитывая трение скольжения тела 1 (варианты 1—3, 5, 6, 8—12, 17—23, 28—30) и сопротивление качению тела 3, катящегося без скольжения (варианты 2, 4, 6—9, 11, 13—15, 20, 21, 24, 27, 29), пренебрегая другими силами сопротивления и массами нитей, предполагаемых нерастяжимыми, определить скорость тела 1 в тот момент, когда пройденный им путь станет равным s .

В задании приняты следующие обозначения: m_1, m_2, m_3, m_4 — массы тел 1, 2, 3, 4; R_2, r_2, R_3, r_3 — радиусы больших и малых окружностей; i_{2x}, i_{3x} — радиусы инерции тел 2 и 3 относительно горизонтальных осей, проходящих через их центры тяжести; α, β — углы наклона плоскостей к горизонту; f — коэффициент трения скольжения; δ — коэффициент трения качения.

Необходимые для решения данные приведены в табл. 51. Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Наклонные участки нитей параллельны соответствующим наклонным плоскостям.

Пример выполнения задания. Дано: m_1 — масса груза 1, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0,5m_1$, $m_5 = 20m_1$, $R_2 = R_3 = 12 \text{ см}$, $r_2 = 0,5R_2$, $r_3 = 0,75R_3$, $R_5 = 20 \text{ см}$, $AB = l = 4R_4$, $i_{2x} = 8 \text{ см}$; $i_{3x} = 10 \text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0,1$, $\delta = 0,2 \text{ см}$, $s = 0,06\pi \text{ м}$. Сопротивление качению тела 2 не учитывать. Шатун 4 считать тонким однородным стержнем; каток 5 — однородный сплошной цилиндр. Массами звена BC_5

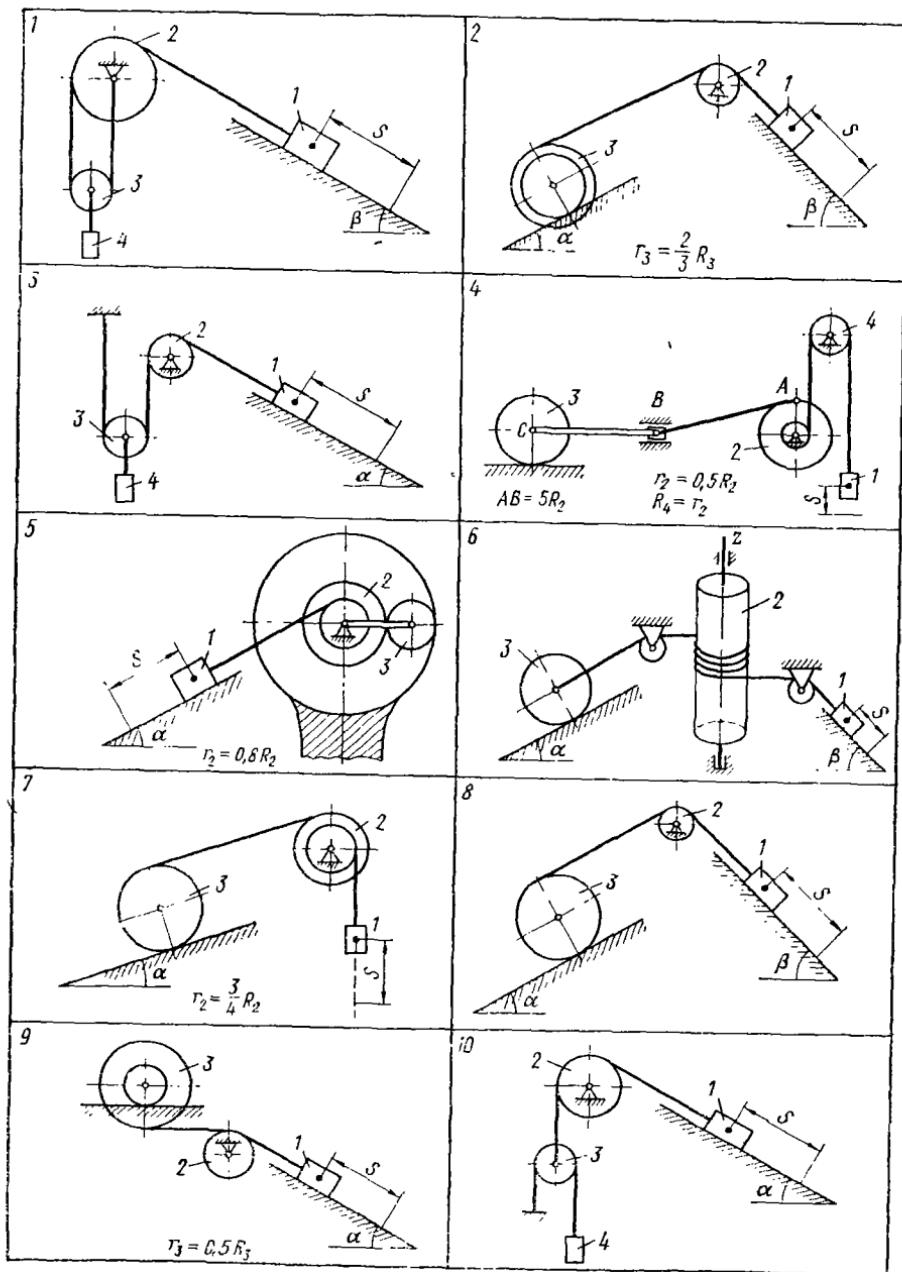


FIG. 167

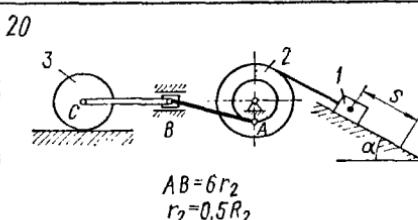
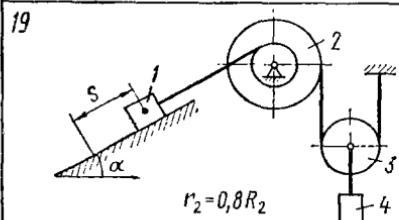
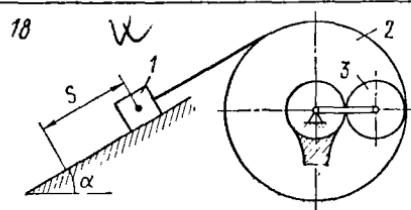
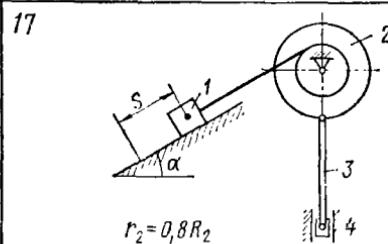
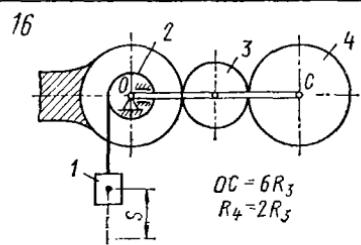
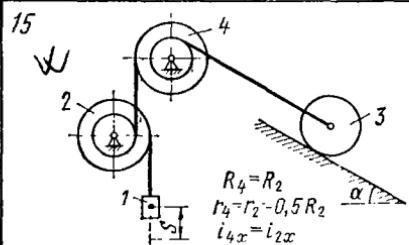
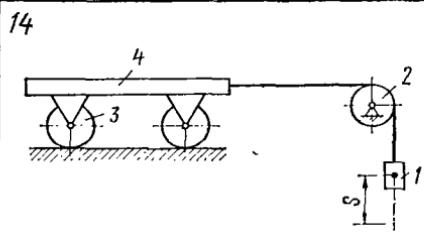
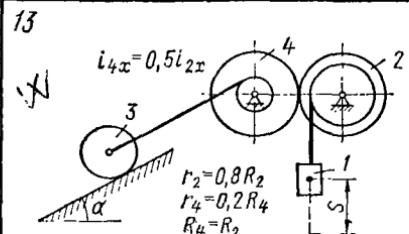
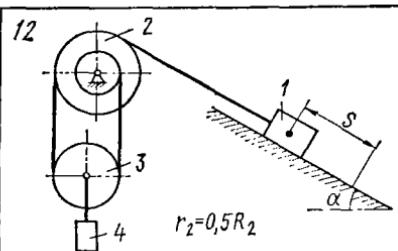
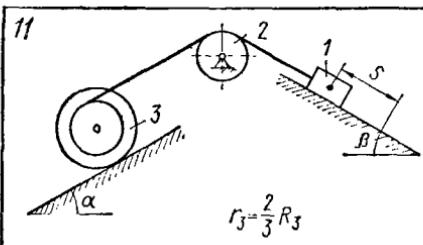


FIG. 168

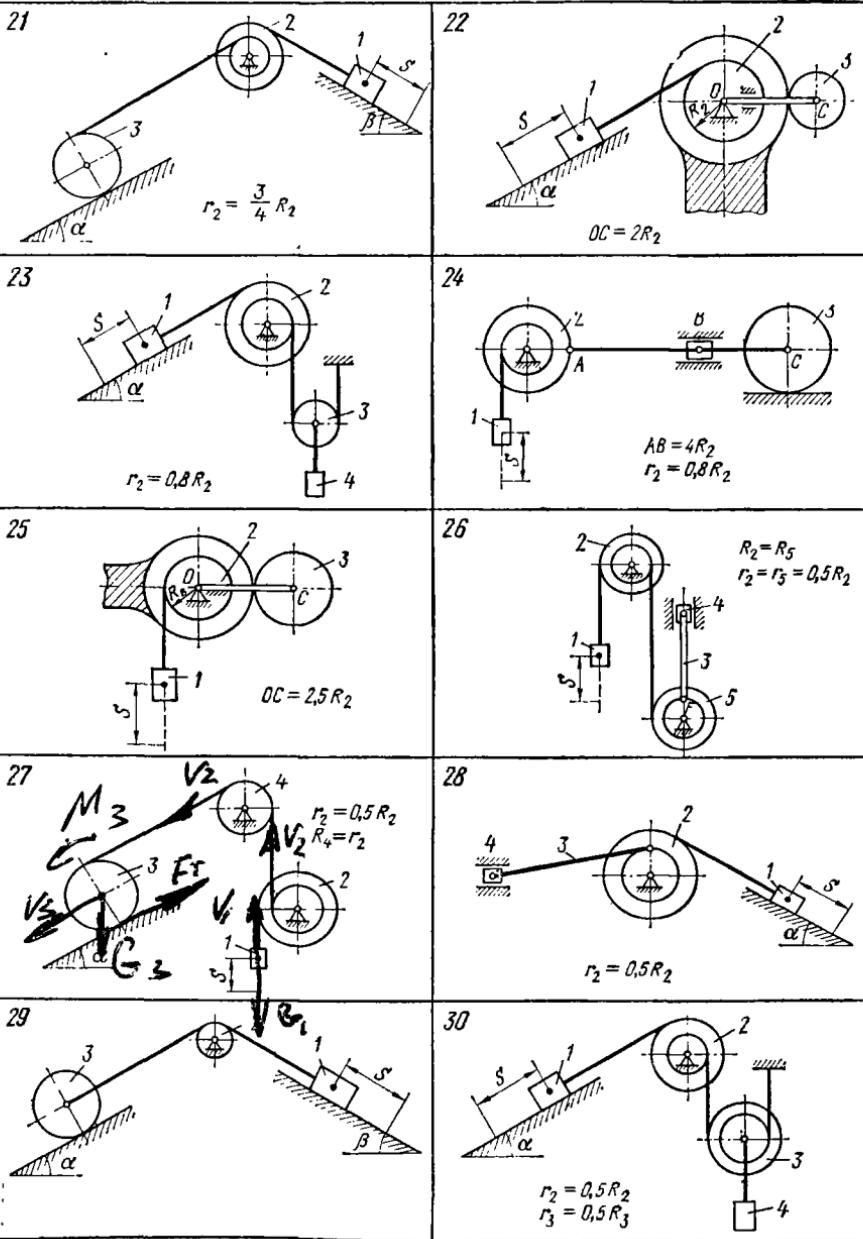


FIG. 169

Таблица 1

	m_1	m_2	m_3	m_4	R_1	R_2	r_{2V}	r_{3S}	α	β	f	δ см	s , м	Примечания	
	КТ				см				грд						
	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	—	—	—	—	60	—	0,10	—	2		
1	m	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	—	—	—	—	30	45	0,22	0,20	2		
2	m	$1/2m$	$1/3m$	—	—	30	—	—	45	—	0,10	—	2		
3	m	m	$1/10m$	m	—	—	—	—	—	—	—	—	0,30	0,15	
4	m	$2m$	$40m$	m	20	40	18	—	—	—	—	—	—	Массами звеньев AB , BC и полузна B пренебречь	
5	m	$2m$	m	—	20	15	18	—	60	—	0,12	—	—	Массой водила пренебречь	
6	m	$3m$	m	—	—	28	—	—	30	45	0,10	0,28	1,5		
7	m	$2m$	$2m$	—	16	25	14	—	30	—	—	—	0,20	2	
8	m	$1/2m$	$1/3m$	—	—	30	—	—	30	—	45	0,15	0,20	1,75	
9	m	$2m$	$9m$	—	—	30	—	—	20	30	—	0,12	0,25	1,5	
10	m	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	—	—	—	—	60	—	0,10	—	3		
11	m	$1/2m$	$1/4m$	—	—	30	—	—	25	30	45	0,17	0,20	2,5	
12	m	$1/2m$	$1/5m$	m	30	—	20	—	—	30	—	0,20	—	2,5	
13	m	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	—	—	30	—	—	0,24	2	
14	m	$1/2m$	$5m$	$4m$	—	25	—	—	—	—	—	—	0,20	2	

Номер страницы
167 — 169)

15	<i>m</i>	$4m$	$1/2m$	20	15	18	—	—	—	—	0,05л	Массой водила преиебречь
16	<i>m</i>	$1/10m$	$1/20m$	10	12	—	—	—	—	—	0,16л	Шатун 3 рассматривать как тонкий однородный стержень
17	<i>m</i>	$1/5m$	$1/10m$	20	—	15	—	60	—	0,10	—	Массой водила преиебречь
18	<i>m</i>	$3m$	m	—	35	15	32	—	60	—	0,15	—
19	<i>m</i>	$1/3m$	$1/10m$	m	24	—	20	—	60	—	0,15	—
20	<i>m</i>	$2m$	$20m$	—	20	15	16	—	30	—	0,10	0,20
21	<i>m</i>	m	$2m$	—	20	20	16	—	30	45	0,20	0,2л
22	<i>m</i>	$1/2m$	$1/4m$	—	20	10	—	—	60	—	0,17	—
23	<i>m</i>	$1/10m$	$4/5m$	20	—	18	—	—	—	0,10	—	Массами звеньев <i>AB</i> , <i>BC</i> и ползуна <i>B</i> преиебречь
24	<i>m</i>	$3m$	$20m$	—	20	30	18	—	—	—	0,60	0,08л
25	<i>m</i>	$1/3m$	$1/4m$	—	16	20	—	—	—	—	0,04л	Массой водила преиебречь
26	<i>m</i>	$1/2m$	m	$1/3m$	30	—	20	—	—	—	0,6л	Массы и моменты инерции блоков 2 и 5 одинаковы
27	<i>m</i>	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	—	30	—	—	0,20
28	<i>m</i>	$2m$	$3m$	—	20	—	14	—	60	—	0,10	—
29	<i>m</i>	$1/4m$	$1/8m$	—	—	—	35	—	—	15	30	0,20
30	<i>m</i>	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	—	0,12	—

и ползуна B пренебречь. На рис. 170, a показана механическая система в начальном положении.

Найти v_1 — скорость груза 1 в конечном положении.

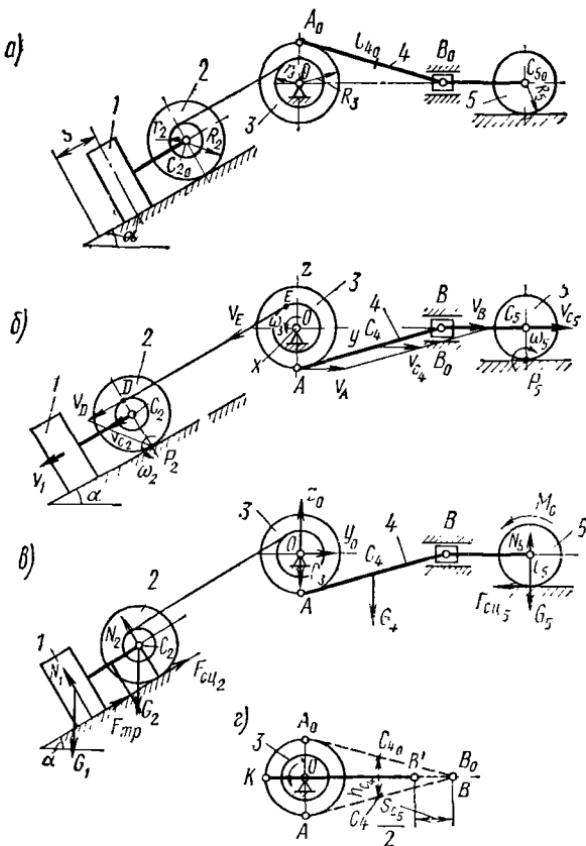


Рис. 170

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии системы:

$$T - T_0 = \sum A_i^E + \sum A_i^I, \quad (1)$$

где T_0 и T — кинетическая энергия системы в начальном и конечном положениях; $\sum A_i^E$ — сумма работ внешних сил, приложенных к системе; $\sum A_i^I$ — сумма работ внутренних сил системы.

Для рассматриваемых систем, состоящих из абсолютно твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями и стержнями,

$$\sum A_i^I = 0.$$

Так как в начальном положении система находится в покое, то $T_0 = 0$.

Следовательно, уравнение (1) принимает вид:

$$T = \sum A_i^E. \quad (2)$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы T в конечном ее положении (рис. 170, б) равна сумме кинетических энергий тел 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \quad (3)$$

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \quad (4)$$

Кинетическая энергия катка 2, совершающего плоское движение,

$$T_2 = m_2 v_{C2}^2 / 2 + J_{2z} \omega_2^2 / 2, \quad (5)$$

где v_{C2} — скорость центра тяжести C_2 катка 2

$$v_{C2} = v_1, \quad (6)$$

J_{2z} — момент инерции катка 2 относительно его продольной центральной оси C_{2z}

$$J_{2z} = m_2 i_{2z}^2, \quad (7)$$

ω_2 — угловая скорость катка 2.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей катка находится в точке P_2 . Поэтому

$$\omega_2 = v_{C2} / C_2 P_2 = v_1 / R_2. \quad (8)$$

Подставляя (6) — (8) в формулу (5), получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2z}^2 v_1^2}{2R_2^2} = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2z}^2}{R_2^2}\right) v_1^2. \quad (9)$$

Кинетическая энергия барабанов 3, вращающихся вокруг неподвижной оси Ox ,

$$T_3 = J_{3x} \omega_3^2 / 2, \quad (10)$$

где J_{3x} — момент инерции барабанов 3 относительно их общей оси Ox :

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2, \quad (11)$$

ω_3 — угловая скорость барабанов 3:

$$\omega_3 = v_F / r_3. \quad (12)$$

Скорость точки E барабана равна скорости точки D катка, которую можно найти из соотношения:

$$v_D / v_{C2} = (r_2 + R_2) / R_2;$$

а так как

$$v_{C2} = v_1, \quad R_2 = 2r_2, \quad \text{то} \quad v_D / v_1 = 3/2.$$

Следовательно, $v_E = v_D = (3/2) v_1$.

Подставляя (13) в (12), получаем

$$\omega_3 = (3/2) \cdot v_1/r_3. \quad (14)$$

После подстановки (11) и (14) в (10) выражение кинетической энергии барабанов 3 принимает вид:

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3x}^2}{2} \left(\frac{3v_1}{2r_3} \right)^2$$

или

$$T_3 = \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2 v_1^2}{r_3^2}. \quad (15)$$

Кинетическая энергия шатуна 4, совершающего плоское движение

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{C4}^2 + \frac{1}{2} J_{4\xi} \omega_4^2,$$

где v_{C4} — скорость центра тяжести C_4 шатуна 4, $J_{4\xi}$ — момент инерции шатуна относительно центральной оси $C_4\xi$, ω_4 — угловая скорость шатуна 4.

Для определения скорости v_{C4} и угловой скорости ω_4 найдем конечное положение шатуна 4.

Когда груз I пройдет путь $s = 0,06\pi$ м, барабан 3 повернется на угол φ_3 . Этот угол φ_3 можно определить на основании формулы (14); заменяя в ней $\omega_3 = d\varphi_3/dt$, $v_1 = ds/dt$, получаем

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{или} \quad d\varphi_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{ds}{r_3};$$

после интегрирования (при нулевых начальных условиях)

$$\varphi_3 = (3/2) \cdot s/r_3.$$

Из полученного видно, что линейные и угловые перемещения находятся в такой же зависимости, как соответствующие линейные и угловые скорости.

Вычислим угол

$$\varphi_3 = 3 \cdot 0,06\pi / (2 \cdot 0,09) = \pi \text{ (радиан).}$$

Это значит, что барабан 3 повернется на 180° , при этом шатун 4 из начального положения A_0B_0 перейдет в конечное положение AB (рис. 170, б).

Так как скорости точек A и B шатуна в этот момент параллельны, то мгновенный центр скоростей шатуна находится в бесконечности.

Следовательно, угловая скорость шатуна в этот момент $\omega_4 = 0$, а скорости всех его точек равны между собой.

Таким образом, кинетическая энергия шатуна

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2 / 2, \quad (16)$$

где

$$v_{C4} = v_A. \quad (17)$$

Вращательная скорость точки A тела 3

$$v_A = \omega_3 R_3$$

или с учетом (14)

$$v_A = (3/2) \cdot R_3 v_1 / r_3.$$

Поскольку $r_3 = (3/4) R_3$, получим

$$v_A = 2v_1.$$

По (17)

$$v_{C4} = v_A.$$

Значит,

$$v_{C4} = 2v_1.$$

После подстановки (19) в (16) выражение кинетического шатуна 4 принимает вид:

$$T_4 = (1/2) m_4 (2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2.$$

Кинетическая энергия катка 5, совершающего плоское движение

$$T_5 = m_5 v_{C5}^2 / 2 + J_{55} \omega_5^2 / 2,$$

где v_{C5} — скорость центра тяжести C_5 катка 5; J_{55} — момент инерции катка 5 (однородного сплошного цилиндра) относительно его центральной продольной оси C_5 , $J_{55} = m_5 R_5^2 / 2$; ω_5 — угловая скорость катка 5.

Так как каток катится без скольжения, то мгновенный центр скоростей находится в точке P_5 . Поэтому

$$\omega_5 = v_{C5} / R_5.$$

Следовательно,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2 \cdot 2R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 v_{C5}^2.$$

Так как звено BC_5 совершает поступательное движение, то $v_{C5} = v_B$, но $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Значит, $v_{C5} = 2v_1$.

Поэтому выражение кинетической энергии катка 5 принимает вид:

$$T_5 = (3/4) m_5 (2v_1)^2 = 3m_5 v_1^2. \quad (21)$$

Кинетическая энергия всей механической системы определяется по формуле (3) с учетом (4), (9), (15), (20), (21):

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{25}^2}{R_2^2} \right) v_1^2 + \frac{9}{8} m_3 \frac{i_{3x}^2}{r_3^2} v_1^2 + 2m_4 v_1^2 + 3m_5 v_1^2.$$

Подставляя сюда заданные значения масс, получаем

$$T = \frac{m_1 v_1^2}{2} \left[1 + 2 \left(1 + \frac{i_{25}^2}{R_2^2} \right) + \frac{9}{4} \frac{i_{3c}^2}{r_3^2} + 2 + 120 \right]$$

или

$$T = 129 \cdot m_1 v_1^2 / 2. \quad (22)$$

мму работ всех внешних сил, приложенных к системе, в перемещении. Покажем внешние силы, приложенные 170, г).

тяжести \vec{G}_1 :

$$A_{G_1} = G_1 h_1 = m_1 g s \sin \alpha. \quad (23)$$

и трения скольжения \vec{F}_{tp} :

$$A_{F_{tp}} = -F_{tp} s.$$

$$F_{tp} = f N_1 = f G_1 \cos \alpha,$$

$$A_{F_{tp}} = -f m_1 g s \cos \alpha. \quad (24)$$

работка силы тяжести \vec{G}_2 :

$$A_{G_2} = G_2 h_{C_2} = m_2 g s \sin \alpha. \quad (25)$$

Работа сил сцепления $\vec{F}_{c_{22}}, \vec{F}_{c_{25}}$ катков 2 и 5 равна нулю, так как эти силы приложены в мгновенных центрах скоростей этих катков.

Работа силы тяжести \vec{G}_4 :

$$A_{G_4} = G_4 h_{C_4},$$

где h_{C_4} — вертикальное перемещение центра тяжести C_4 шатуна 4 из начального положения в его конечное положение (рис. 170, г):

$$\begin{aligned} h_{C_4} &= R_3 \\ A_{G_4} &= m_4 g R_3. \end{aligned} \quad (26)$$

Работа пары сил сопротивления качению катка 5

$$A_{M_C} = -M_C \varphi_5, \quad (27)$$

где $M_C = \delta N_5 = \delta G_5$ — момент пары сил сопротивления качению катка 5; φ_5 — угол поворота катка 5.

Так как каток 5 катится без скольжения, то угол его поворота:

$$\varphi_5 = s_{C_5} / R_5. \quad (28)$$

где s_{C_5} — перемещение центра тяжести C_5 катка 5.

В данном примере работу пары сил сопротивления вычислим как сумму работ этой пары при качении катка 5 влево при повороте тела 3 на угол $\pi/2$ и качении вправо, когда тело 3 повернется еще на угол $\pi/2$.

Перемещение центра тяжести C_5 катка 5 равно перемещению ползуна B влево и вправо:

$$s_{C_5} = 2(B_0 B'). \quad (29)$$

Определим перемещение $B_0 B'$ при повороте тела 3 на угол $\pi/2$. За начало отсчета координаты точки B выберем неподвижную точку K плоскости (рис. 170, г). При этом повороте тела 3 шатун из полож-

жения A_0B_0 перейдет в положение KB' . Тогда

$$B_0B' = KB_0 - KB',$$

где

$$\begin{aligned} KB_0 &= KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{(A_0B_0)^2 - (A_0O)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2}, \\ KB' &= l = 4R_3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{(4R_3)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0,88R_3. \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29), а затем в (28), находим полный угол поворота катка 5:

$$\varphi_5 = 1,76R_3/R_5. \quad (31)$$

Работа пары сил сопротивления качению по (27):

$$A_{M_C} = -\delta m_5 g \cdot 1,76R_3/R_5. \quad (32)$$

Сумма работ внешних сил определяется сложением работ, вычисляемых по формулам (23) – (26) и (32):

$$\sum A_t^E = m_1 gs \cdot \sin \alpha - f m_1 gs \cos \alpha + m_2 gs \sin \alpha + m_4 g R_3 - \delta m_5 g \times 1,76R_3/R_5.$$

Подставляя заданные значения масс, получаем

$$\sum A_t^E = m_1 gs \left(\sin \alpha - f \cos \alpha + 2 \sin \alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta \cdot 20 \cdot 1,76R_3}{R_5 s} \right)$$

или

$$\sum A_t^E = 1,51m_1 gs. \quad (33)$$

Согласно теореме (2) приравняем значения T и $\sum A_t^E$, определяемые по формулам (22) и (33):

$$129 \cdot m_1 v_l^o / 2 = 1,51m_1 gs,$$

откуда

$$v_l = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,51 gs}{129}} = \sqrt{\frac{3,02}{129} \cdot 9,81 \cdot 0,06\pi} = 0,2 \text{ м/с.}$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Задание Д-10. Исследование вращательного движения твердого тела

На звено 1 механизма, угловая скорость которого равна ω_{1_0} , с некоторого момента времени ($t = 0$) начинает действовать пара сил с моментом M (движущий момент) или движущая сила P .

Массы звеньев 1 и 2 механизма равны соответственно m_1 и m_2 , а масса поднимаемого груза 3 – m_3 . Момент сил сопротивления вращению ведомого звена 2 равен M_C . Радиусы больших и малых окружностей звеньев 1 и 2: R_1 , r_1 , R_2 , r_2 .

Схемы механизмов показаны на рис. 171 – 173, а необходимые для решения данные приведены в табл. 52.

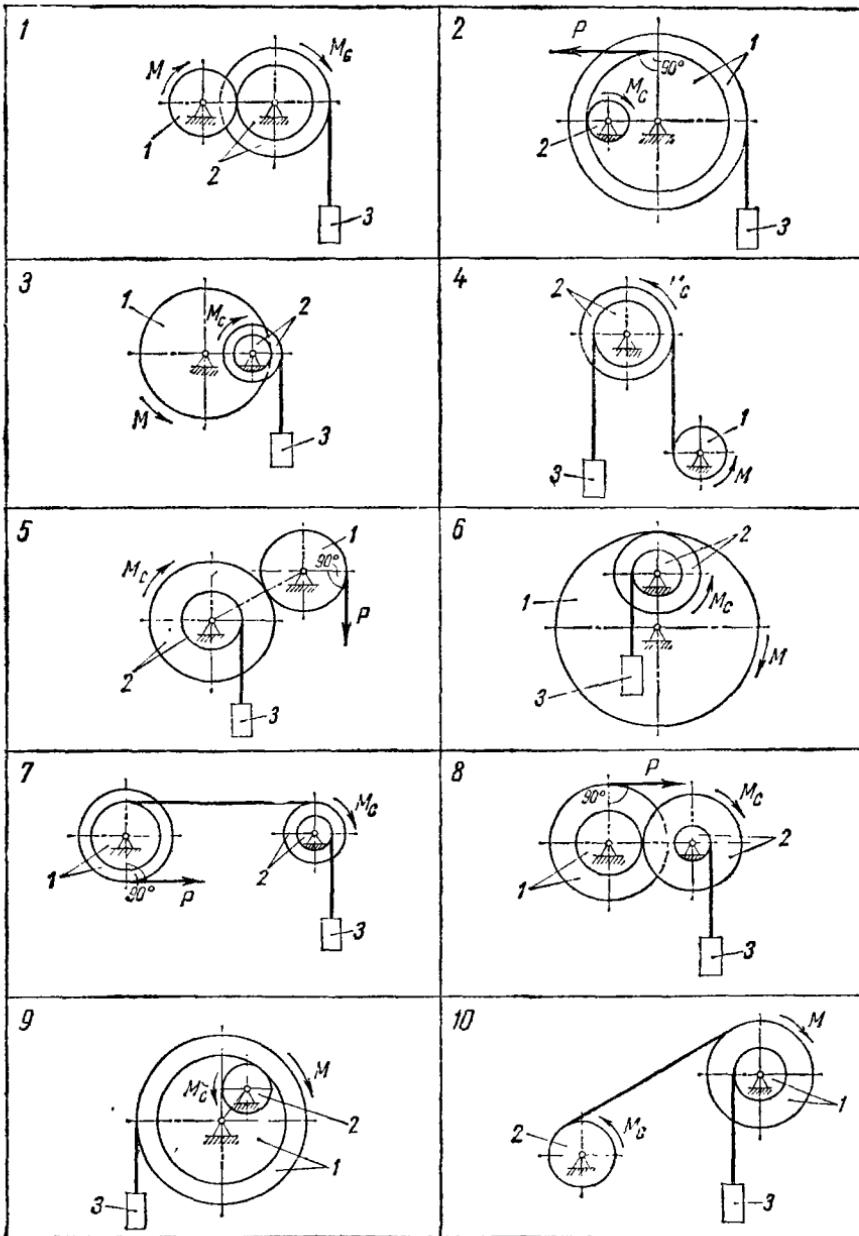
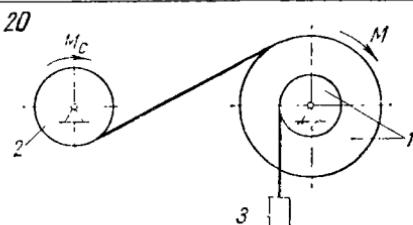
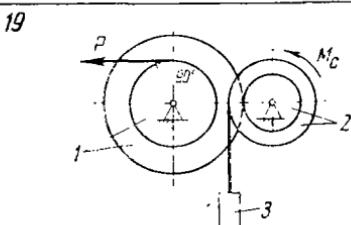
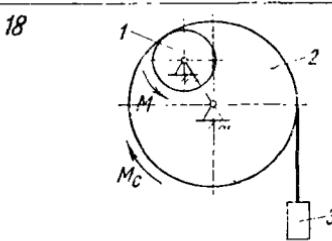
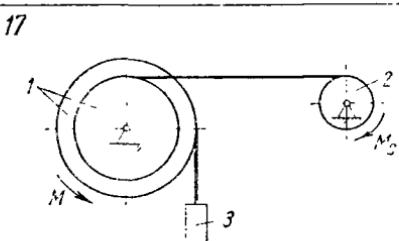
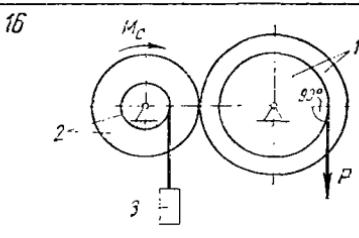
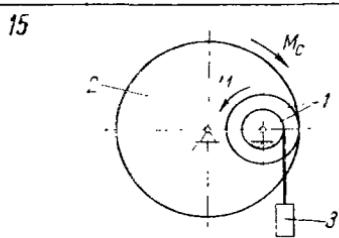
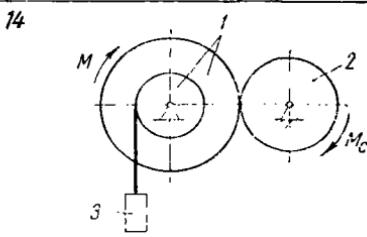
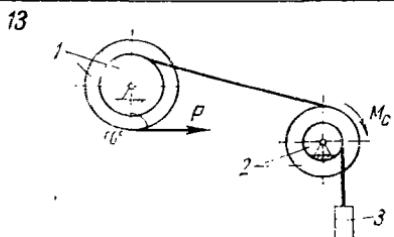
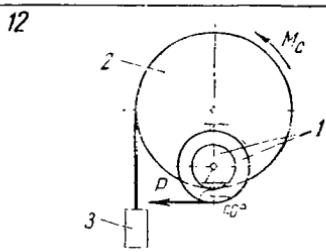
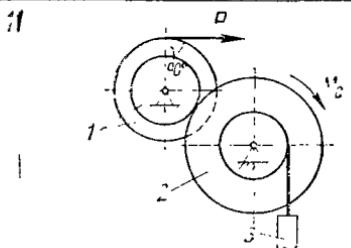
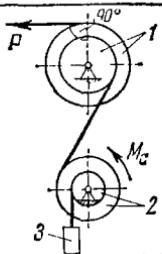


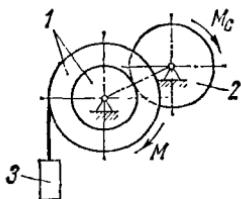
FIG. 171



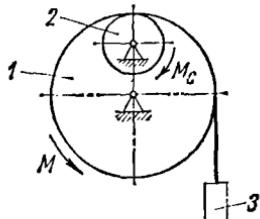
21



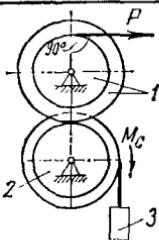
23



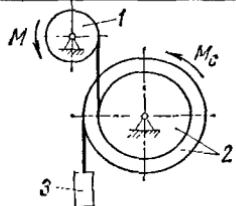
25



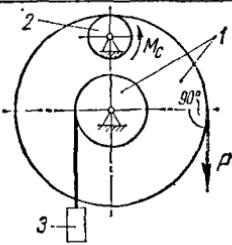
27



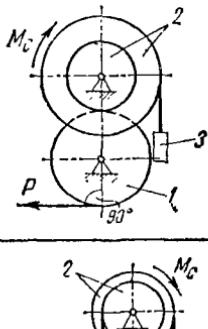
29



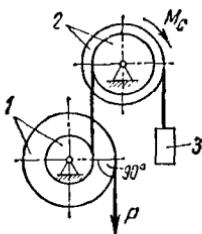
22



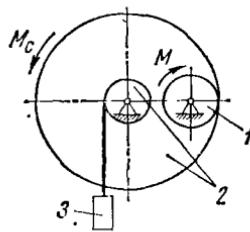
24



26



28



30

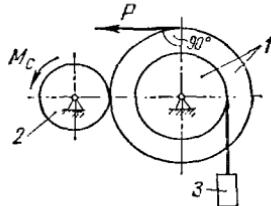


FIG. 173

Найти уравнение вращательного движения звена механизма, указанного в последней графе табл. 52. Определить также натяжение нитей в заданный момент времени, а в вариантах, где имеется соприкосновение звеньев 1 и 2, найти, кроме того, окружное усилие в точке их касания. Звенья 1 и 2, для которых радиусы инерции i_{x_1} и i_{x_2} в табл. 52 не заданы, считать сплошными однородными дисками.

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 100$; $m_2 = 150$; $m_3 = 400$ кг; $M = 4200 + 200t$ Нм; $M_C = 2000$ Нм = const; $R_1 = 60$; $R_2 = 40$ см; $r_2 = 20$ см; $i_{x_1} = 20\sqrt{2}$; $i_{x_2} = 30$ см; $\omega_{1_0} = 2 \text{ c}^{-1}$.

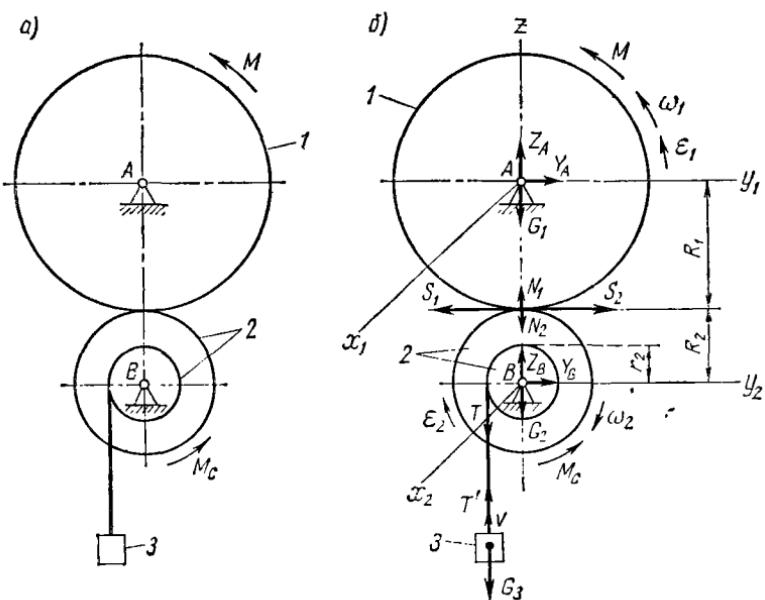


Рис. 174

Найти уравнение $\varphi_2 = f(t)$ вращательного движения звена 2 механизма, а также окружное усилие S в точке касания звеньев 1 и 2 и натяжение нити T в момент времени $t_1 = 1$ с (рис. 174, а).

Решение. К звену 1 механизма приложены (рис. 174, б) сила тяжести \vec{G}_1 , движущий момент M , составляющие реакции подшипника \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , окружное усилие \vec{S}_1 и нормальная реакция \vec{N}_1 звена 2.

К звену 2 механизма приложены сила тяжести \vec{G}_2 , момент сил сопротивления M_C , составляющие реакции подшипника \vec{Y}_B , \vec{Z}_B , натяжения \vec{T} нити, к которой подвешен груз 3, окружное усилие \vec{S}_2 и нормальная реакция \vec{N}_2 звена 1.

К грузу 3 приложены сила тяжести \vec{G}_3 и натяжение нити \vec{T}' .

Очевидно:

$$\vec{S}_2 = -\vec{S}_1, \vec{N}_1 = -\vec{N}_2 \text{ и } \vec{T}' = -\vec{T}.$$

Таблица 52

Номер варианта (рис. 171— —173)	m_1	m_2	m_3	R_1	r_1	R_2	r_2	i_{x_1}	i_{x_2}	M , Нм	P , Н	M_C , Нм	ω_{10} с ⁻¹	t , с	Звено, для которого нужно опре- делить урав- нение врача- тельного дви- жения
	кг	кг	см	см	см	см	см	см	см	см	см	см	см	см	
1	100	300	500	20	—	60	40	—	50	2100 + 20t	—	1000	2	2	1
2	300	80	500	70	50	20	—	60	—	10200 + 100t	600	1	0,5	2	
3	200	100	400	60	—	30	20	60	20 $\sqrt{2}$	6100 + 20t	—	800	0,5	2,5	1
4	100	250	300	20	—	50	30	—	40	1000 + 40t	—	1400	1,5	2	1
5	150	300	600	30	—	50	20	—	30	—	5500 + 200t	1500	2	1	2
6	400	250	600	70	—	30	20	70	20 $\sqrt{2}$	4800 + 10t	—	800	3	4	1
7	300	200	400	60	40	30	20	50	20	—	3000 + 100t	500	0	3	2
8	300	250	700	50	30	40	20	40	30	—	9700 + 50t	500	1	2	1
9	200	100	500	80	60	20	—	50 $\sqrt{2}$	—	5900 + 30t	—	600	2	3	2
10	250	100	400	40	20	30	—	30	—	2500 + 50t	—	1200	0	1,5	2
11	150	300	700	40	30	60	30	40	—	3900 + 50t	1000	1	2	1	
12	100	200	600	30	20	60	—	20 $\sqrt{2}$	60	—	5700 + 50t	1500	2	2	1
13	180	100	300	50	40	30	20	30 $\sqrt{2}$	20	—	2700 + 200t	400	0,5	1	2
14	150	80	400	40	20	30	—	30	—	1800 + 20t	—	700	1,5	2,5	1

15	300	180	500	20	10	50	—	$10\sqrt{2}$	50	700 + 40t	—	300	0	1,5	1
16	300	250	400	60	40	50	30	50	40	—	$7300 + 100t$	1200	1	2	1
17	250	100	800	50	30	20	—	40	—	$5400 + .50t$	—	900	2	2	1
18	200	100	600	20	—	50	—	—	50	$1900 + 20t$	—	1300	0,5	1	2
19	250	150	400	50	30	30	20	40	—	$14200 + 200t$	500	0,5	2	1	1
20	400	100	800	50	20	30	—	40	—	$3700 + .50t$	—	1200	2	1	2
21	200	150	300	50	40	30	20	$30\sqrt{2}$	20	—	$3800 + 100t$	800	1	1,5	2
22	250	100	800	60	20	10	—	50	—	—	$9700 + 200t$	700	2	0,5	1
23	200	80	400	40	20	30	—	30	—	$2300 + 20t$	—	900	0,5	1	2
24	100	200	500	30	—	40	20	—	30	—	$12600 + 100t$	500	1,5	1	1
25	150	80	400	60	—	20	—	60	—	$4900 + 40t$	—	800	0	1,5	2
26	250	200	500	50	20	40	30	$30\sqrt{2}$	30	—	$3500 + 1,50t$	600	2	2	1
27	250	150	500	50	30	40	30	$30\sqrt{2}$	30	—	$15200 + 100t$	700	1,5	1	1
28	60	200	900	20	—	60	10	—	50	$900 + 10t$	—	1500	0	2	2
29	50	200	500	20	—	40	30	—	—	$2100 \pm 20t$	—	1000	2	0,5	1
30	300	60	600	50	30	20	—	40	—	—	$7200 + 50t$	700	1,5	1	2

* Радиусы инерции звеньев 1 и 2, t_{x_1} и t_{x_3} , заданы относительно неподвижных осей вращения этих звеньев.

Составим дифференциальное уравнение вращения звена 1 вокруг неподвижной оси x_1 :

$$J_{x_1}\ddot{\varphi}_1 = M_{x_1}^E.$$

Главный момент $M_{x_1}^E$ внешних сил, приложенных к звену 1 (рис. 174, б), относительно оси x_1

$$M_{x_1}^E = M - S_1 R_1.$$

Момент M приводит в движение систему и поэтому принят положительным, а момент, создаваемый усилием \vec{S}_1 , препятствует вращению звена 1 и, следовательно, отрицателен.

Дифференциальное уравнение вращательного движения звена 1 примет вид

$$J_{x_1}\ddot{\varphi}_1 = M - S_1 R_1. \quad (1)$$

Выразим угловое ускорение $\ddot{\varphi}_1$ звена 1 через угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$ звена 2.

Так как

$$\dot{\varphi}_1/\dot{\varphi}_2 = R_2/R_1, \text{ то } \ddot{\varphi}_1 = \ddot{\varphi}_2 \cdot (R_2/R_1).$$

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$J_{x_1}\ddot{\varphi}_2 \cdot (R_2/R_1) = M - S_1 R_1. \quad (2)$$

Для составления дифференциального уравнения вращения вокруг оси x_2 звена 2, к которому подвешен груз 3, применим теорему об изменении кинетического момента:

$$dL_{x_2}/dt = M_{x_2}^E. \quad (3)$$

Кинетический момент системы 2 – 3 относительно оси x_2

$$L_{x_2} = J_{x_2}\omega_2 + m_3 v r_2,$$

здесь $J_{x_2}\omega_2$ — кинетический момент звена 2, вращающегося с угловой скоростью ω_2 вокруг неподвижной оси x_2 ; $m_3 v r_2$ — момент количества движения груза 3, движущегося поступательно со скоростью v .

Так как $v = \omega_2 r_2$,

$$L_{x_2} = (J_{x_2} + m_3 r_2^2) \omega_2 = J_{\text{пр}x_2} \dot{\varphi}_2,$$

где $J_{\text{пр}x_2} = J_{x_2} + m_3 r_2^2$ — приведенный к оси x_2 момент инерции системы 2 – 3.

Главный момент $M_{x_2}^E$ внешних сил, приложенных к системе 2 – 3 (рис. 174, б), относительно оси x_2

$$M_{x_2}^E = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C.$$

Момент, создаваемый усилием \vec{S}_2 , приводит в движение систему 2 – 3 и поэтому принят положительным, а момент силы тяжести груза G_3 и момент сил сопротивления \vec{M}_C препятствуют движению системы и, следовательно, отрицательны.

Таким образом, из уравнения (3)

$$\frac{d}{dt} (J_{\text{пpx}_2} \dot{\varphi}_2) = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C$$

получаем следующее дифференциальное уравнение вращения звена 2:

$$J_{\text{пpx}_2} \ddot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C. \quad (4)$$

В полученной системе уравнений (2) и (4)

$$J_{x_1} \dot{\varphi}_2 (R_2/R_1) = M - S_1 R_1, \quad J_{\text{пpx}_2} \dot{\varphi}_2 = S_2 R_2 - G_3 r_2 - M_C$$

неизвестны усилия $S_1 = S_2 = S$ и угловое ускорение $\ddot{\varphi}_2$. Исключим S , для чего первое из уравнений этой системы умножим на R_2 , второе — на R_1 и сложим соответствующие части уравнений:

$$[J_{x_1} (R_2/R_1) + J_{\text{пpx}_2} R_1] \dot{\varphi}_2 = M R_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1,$$

отсюда

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{M R_1 R_2 - (G_3 r_2 + M_C) R_1^2}{J_{x_1} R_2^2 + J_{\text{пpx}_2} R_1^2}. \quad (5)$$

Выражение (5) определяет в общем виде угловое ускорение звена 2 механизма.

Учитывая исходные данные, найдем:

$$J_{x_1} = m_1 i_{x_1}^2 = 100 (0,2/2)^2 = 8 \text{ кгм}^2;$$

$$J_{\text{пpx}_2} = J_{x_2} + m_3 r_2^2 = m_2 i_{x_2}^2 + m_3 r_2^2 = 150 \cdot 0,3^2 + 400 \cdot 0,2^2 = 29,5 \text{ кгм}^2.$$

Из выражения (5)

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{(4200 + 200t) 0,6 \cdot 0,4 - (400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000) 0,6^2}{8 \cdot 0,4^2 + 29,5 \cdot 0,6^2} = 4,034t + 0,4597 (\text{с}^{-2}).$$

Интегрируем это уравнение дважды:

$$\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + C_1,$$

$$\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + C_1 t + C_2.$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия задачи: при $t = 0$, $\varphi_{20} = 0$,

$$\dot{\varphi}_{20} = \omega_{20} = \omega_{10} R_1 / R_2 = 2 \cdot 60 / 40 = 3 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно,

$$\dot{\varphi}_{20} = C_1, \quad \varphi_{20} = C_2,$$

т. е.

$$C_1 = 3 \text{ с}^{-1}, \quad C_2 = 0.$$

Уравнение угловой скорости звена 2 имеет вид

$$\dot{\varphi}_2 = 2,017t^2 + 0,4597t + 3 (\text{с}^{-1}).$$

Искомое уравнение вращательного движения звена 2 имеет вид

$$\varphi_2 = 0,672t^3 + 0,230t^2 + 3t \text{ (рад).}$$

Окружное усилие S можно определить из уравнения (4):

$$S = S_2 = (J_{\text{пpx}_2} \dot{\phi}_2 + G_3 r_2 + M_C) / R_2;$$

при $t_1 = 1$ с

$$S = \frac{29,5 (4,034 \cdot 1 + 0,4597) + 400 \cdot 9,81 \cdot 0,2 + 2000}{0,4} = 7295 \text{ Н.}$$

Для определения натяжения нити T составим дифференциальное уравнение вращения звена 2 (рис. 175) в следующем виде:

$$J_{x_2} \ddot{\phi}_2 = S_2 R_2 - Tr_2 - M_C,$$

из которого

$$T = (S_2 R_2 - M_C - J_{x_2} \ddot{\phi}_2) / r_2;$$

при $t_1 = 1$ с

$$T = \frac{7295 \cdot 0,4 - 2000 - 13,5 (4,0334 \cdot 1 + 0,4597)}{0,2} = 4285 \text{ Н.}$$

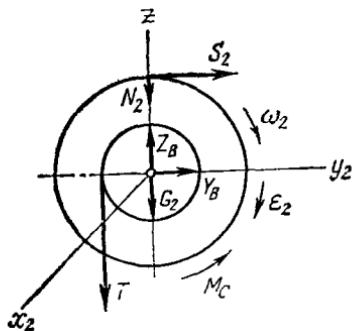


Рис. 175

Задание Д-11. Исследование плоского движения твердого тела

Определить максимальную величину постоянной силы P , под действием которой колесо массой m катится без скольжения.

Найти также для этого случая уравнение движения центра тяжести колеса C , если в начальный момент времени его координата $x_{C_0} = 0$ и скорость $v_{C_0} = 0$.

Варианты задания показаны на рис. 176 – 178, а необходимые для решения данные приведены в табл. 53.

В задании приняты следующие обозначения: i_C – радиус инерции колеса относительно центральной оси, перпендикулярной к его плоскости; R и r – радиусы большой и малой окружностей; $f_{\text{сц}}$ – коэффициент сцепления (коэффициент трения покоя); δ – коэффициент трения качения.

Примечание. Колеса, для которых радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками.

Пример выполнения задания. Дано: $m = 200 \text{ кг}$; $R = 60 \text{ см}$; $r = 10 \text{ см}$; $i_C = 50 \text{ см}$; $\alpha = 15^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $f_{\text{сц}} = 0,10$; $\delta = 0$ (рис. 179, а).

Решение. На колесо действуют силы: вес колеса \vec{G} , нормальная реакция \vec{N} , сила \vec{P} и сила сцепления $\vec{F}_{\text{сц}}$ (рис. 179, б) (в случае, если $\delta \neq 0$, необходимо показать момент пары сил сопротивления качению).

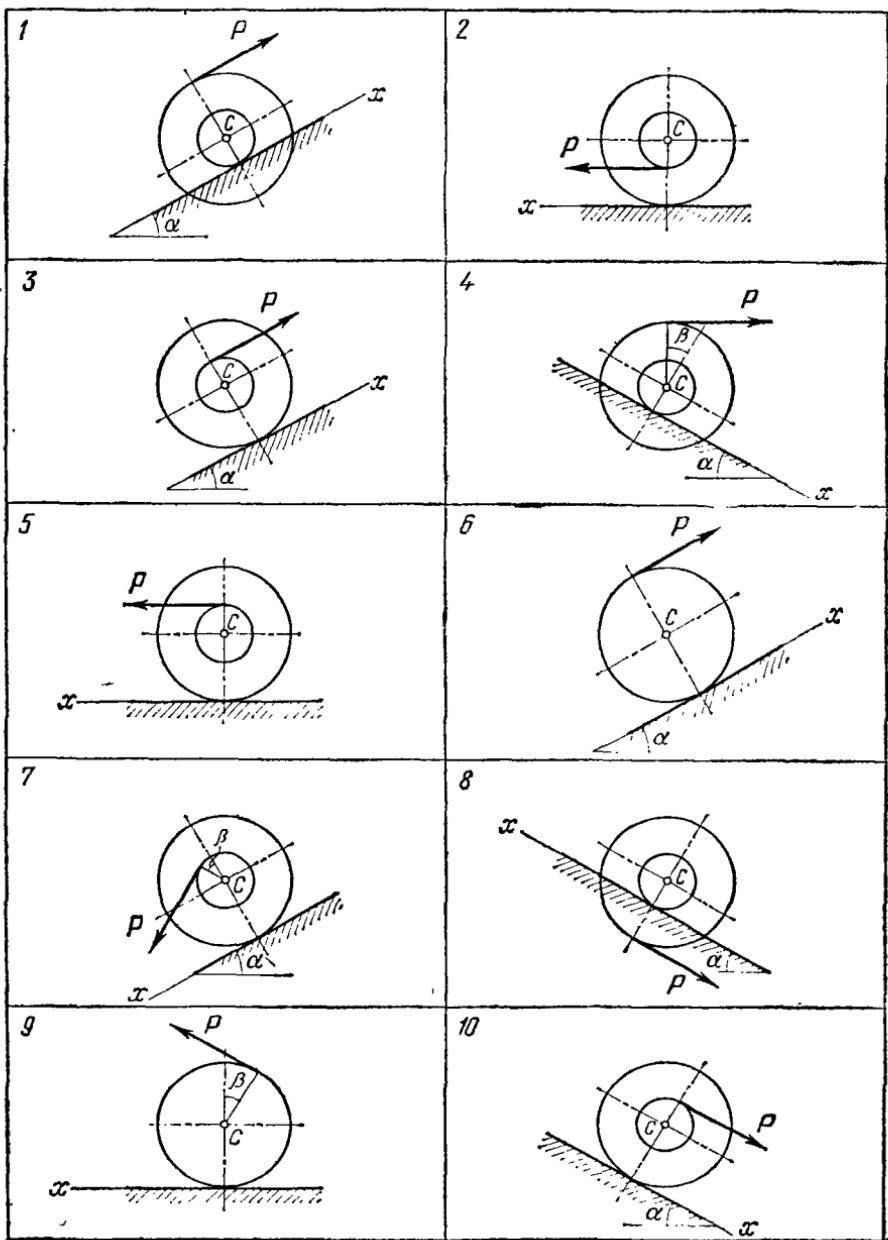
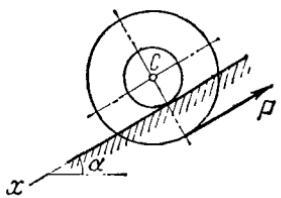
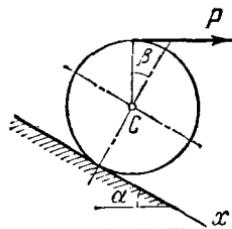


FIG. 176

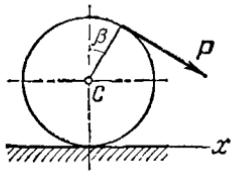
11



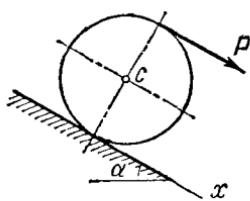
12



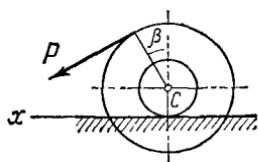
13



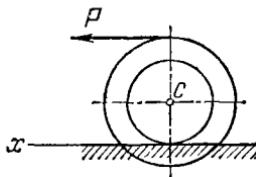
14



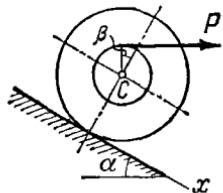
15



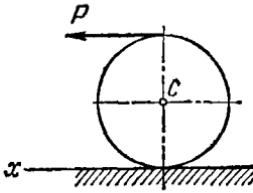
16



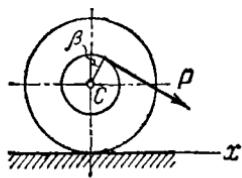
17



18



19



20

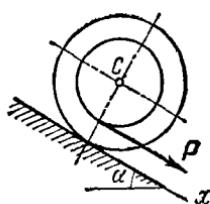
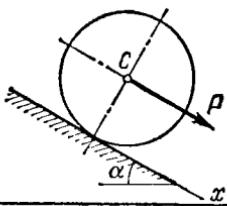
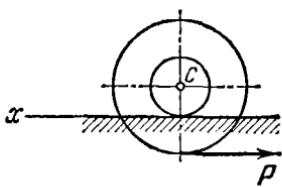


Рис. 177

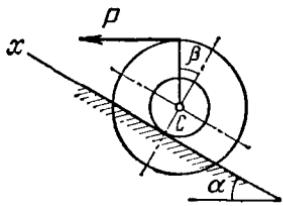
21



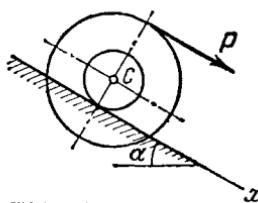
22



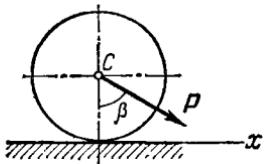
23



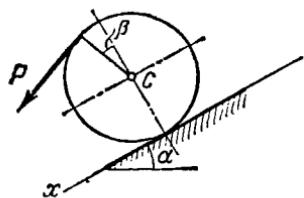
24



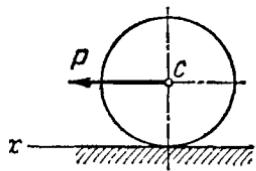
25



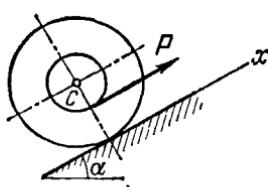
26



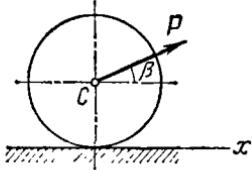
27



28



29



30

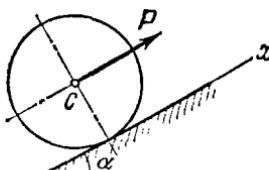


Таблица 53

Номер варианта (рис. 176— 178)	m , кг	ι_C , см	R , см	r , см	α , град	β , град	$F_{\text{сц}}$	δ , см
1	300	50	80	40	20	—	0,35	1,0
2	200	40	60	30	—	—	0,20	0,8
3	180	50	60	20	30	—	0,10	0
4	220	30	70	25	30	30	0,20	0
5	240	40	60	15	—	—	0,10	1,0
6	200	—	50	—	15	—	0,20	0,5
7	200	45	60	25	30	15	0,25	0
8	150	40	70	25	15	—	0,50	0
9	250	—	—	—	—	30	0,15	0
10	150	40	50	15	20	—	0,30	0,7
11	200	30	50	20	30	—	0,20	0,6
12	220	—	—	—	30	30	0,25	0
13	140	—	—	—	—	30	0,10	0
14	300	—	—	—	30	—	0,15	0
15	180	20	50	20	—	15	0,15	0
16	180	30	50	35	—	—	0,15	0,9
17	160	50	60	20	15	20	0,30	0
18	260	—	50	—	—	—	0,10	1,0
19	200	50	60	20	—	20	0,10	0
20	230	40	50	30	20	—	0,25	0
21	200	—	40	—	30	—	0,25	1,2
22	150	30	50	20	—	—	0,25	1,2
23	200	30	60	30	30	15	0,40	0
24	240	30	70	30	15	—	0,15	0
25	100	—	—	—	—	60	0,10	0
26	150	—	—	—	30	15	0,15	0
27	120	—	30	—	—	—	0,40	1,5
28	150	30	60	20	15	—	0,30	0,8
29	200	—	—	—	—	20	0,30	0
30	160	—	40	—	20	—	0,20	0,7

В соответствии с направлением силы \vec{P} вращение колеса происходит по движению часовой стрелки, т. е. колесо катится вверх по наклонной плоскости. Силу $\vec{F}_{\text{сц}}$ направляем предположительно, как показано на рисунке. Действительное направление этой силы устанавливается в процессе решения задачи. Оси координат выбираем так, чтобы ось x была направлена в сторону движения колеса (рис. 179).

Дифференциальные уравнения плоского движения колеса:

$$m\ddot{x}_C = \sum X_i^E; \quad m\ddot{y}_C = \sum Y_i^E; \quad J_{C\varphi} = \sum M_{Ci}^E$$

или в данном случае

$$m\ddot{x}_C = P \cos \beta - G \sin \alpha - F_{\text{сц}}; \quad (1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - G \cos \alpha - P \sin \beta, \quad (2)$$

$$J_{C\varphi} = Pr + F_{\text{сц}}R. \quad (3)$$

Знак у момента силы в уравнении (3) принимаем положительным, если момент способствует вращению колеса, и отрицательным — в обратном случае.

Из уравнения (2) следует, что, поскольку $y = R = \text{const}$, $\ddot{y}_C = 0$,
 $N = G \cos \alpha + P \sin \beta$.

При качении колеса без скольжения угловая скорость
 $\omega = v_C/R$ или $\dot{\phi} = \dot{x}_C/R$, откуда $\dot{\varphi} = \ddot{x}_C/R$.

Таким образом, уравнение (3) принимает следующий вид:

$$m\ddot{i}_C^2 \cdot \ddot{x}_C/R = Pr + F_{\text{сц}}R. \quad (3')$$

Для исключения \ddot{x}_C разделим уравнение (1) на (3'):

$$\frac{R}{\ddot{i}_C^2} = \frac{P \cos \beta - G \sin \alpha - F_{\text{сц}}}{Pr + F_{\text{сц}}R},$$

откуда

$$P = \frac{F_{\text{сц}}(R^2 + \ddot{i}_C^2) + G\ddot{i}_C^2 \sin \alpha}{\ddot{i}_C^2 \cos \beta - Rr}. \quad (4)$$

Заметим, что выражение (4) дает возможность судить о правильности выбранного направления силы сцепления. Приближение силы

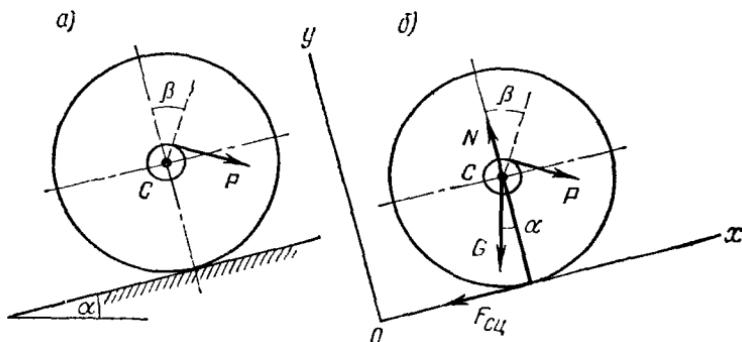


Рис. 179

P к своему предельному значению (искомой величине) сопровождается, естественно, возрастанием силы сцепления. Поэтому в выражении (4), приведенном к виду

$$P = aF_{\text{сц}} + b,$$

коэффициент a должен быть положительным. В противном случае следует изменить направление $\vec{F}_{\text{сц}}$ на обратное и внести соответствующие изменения в дифференциальные уравнения (1) – (3).

Максимальное значение силы сцепления:

$$F_{\text{сц}}^{\max} = f_{\text{сц}}N = f_{\text{сц}}(G \cos \alpha + P \sin \beta).$$

Подставляя максимальное значение $F_{\text{сц}}$ в уравнение (4) и решая его относительно P , найдем максимальное значение этой силы, при

действии которой колесо катится без скольжения:

$$P = \frac{G [(R^2 + i_C^2) f_{\text{сн}} \cos \alpha - i_C^2 \sin \alpha]}{i_C^2 \cos \beta - Rr - (R^2 + i_C^2) f_{\text{сн}} \sin \beta}$$

или

$$P = \frac{200 [(0,6^2 + 0,5^2) \cdot 0,1 \cdot 0,966 + 0,5^2 \cdot 0,259] \cdot 9,81}{0,5^2 \cdot 0,866 - 0,6 \cdot 0,1 - (0,6^2 + 0,5^2) \cdot 0,1 \cdot 0,5} = 196 \cdot 9,81 = 1920 \text{ Н.}$$

Сила сцепления

$$F_{\text{сн}}^{\max} = f_{\text{сн}} (G \cos \alpha + P \sin \beta) = 0,1 (200 \cdot 0,966 + 196 \cdot 0,5) 9,81 = \\ = 29 \cdot 9,81 = 284 \text{ Н.}$$

Дифференциальное уравнение движения центра колеса

$$m \ddot{x}_C = P \cos \beta - G \sin \alpha - F_{\text{сн}}^{\max}$$

или

$$200 \ddot{x}_C = 1920 \cdot 0,866 - 200 \cdot 9,81 \cdot 0,259 - 284,$$

откуда

$$\ddot{x}_C = 4,4 \text{ м/с}^2.$$

Дважды интегрируя это дифференциальное уравнение, находим:

$$\dot{x}_C = 4,4t + C_1; \quad x_C = 2,2t^2 + C_1 t + C_2.$$

Имея в виду, что при $t = 0$ $x_{C_0} = 0$ и $\dot{x}_{C_0} = 0$, определяем:

$$C_1 = 0 \text{ и } C_2 = 0.$$

Следовательно, уравнение движения центра колеса

$$x_C = 2,2t^2 \text{ (м).}$$

УДАР

Задание Д-12. Исследование соударений твердых тел

Варианты 1—10 (рис. 180). Вариант 1. Тележка 1 общей массой $m_1 = 6000$ кг, движущаяся со скоростью $v_1 = 2,5$ м/с по горизонтальному прямолинейному пути, наталкивается на неподвижную тележку 2, имеющую вместе с контейнером массу $m_2 = 4000$ кг. В конце соударения тележка 2 приобретает скорость $u_2 = 2$ м/с, а контейнер — угловую скорость вращения вокруг ребра A , закрепленного упорной планкой. Считать контейнер массой $m_0 = 500$ кг однородным прямоугольным параллелепипедом ($a = 0,8$ м, $h = 1,5$ м). Вертикальные плоскости соударения тележек полагать гладкими.

Определить скорость тележки 1 в конце соударения с тележкой 2, а также ударный импульс, воспринимаемый упорной планкой.

Вариант 2. Груз массой $m_0 = 500$ кг падает с высоты $h = 1$ м в точку D абсолютно жесткой балки, имеющей шарнирно-неподвижную опору A и упругую опору B , коэффициент жесткости которой

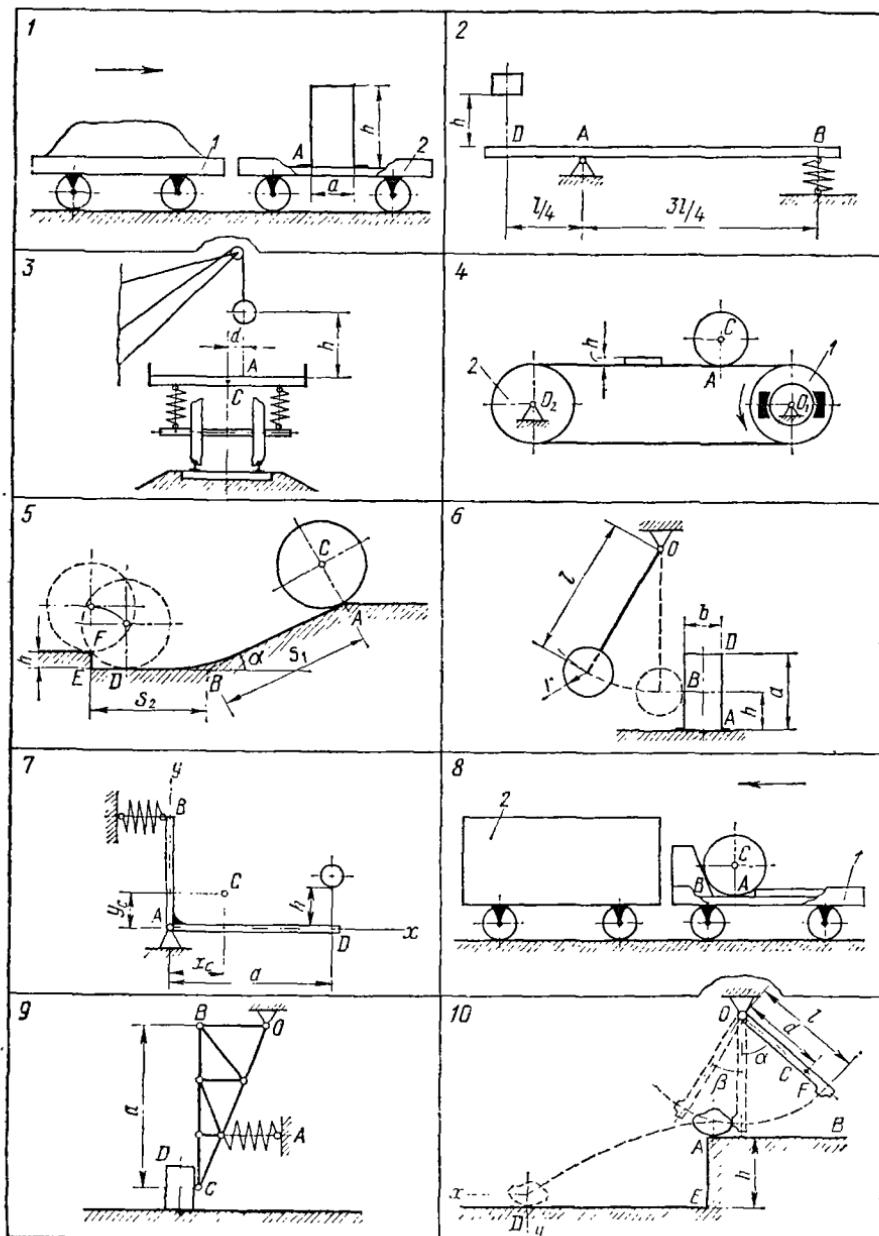


Рис. 180

$c = 20\,000$ Н/см; удар груза о балку неупругий. Масса балки $m = 6000$ кг, ее длина $l = 4$ м. Горизонтальное положение балки, показанное на чертеже, соответствует статической деформации упругой опоры под воздействием веса балки. Принять балку за тонкий однородный стержень, а груз — за материальную точку.

Определить ударный импульс, воспринимаемый балкой в точке D , а также наибольшую деформацию упругой опоры, считая, что движение точки B происходит по прямой.

Вариант 3. Вследствие разрыва удерживающего троса груз массой $m_0 = 500$ кг падает с высоты $h = 1$ м на платформу, покоящуюся на одинаковых и симметрично расположенных рессорах. Точка A , в которую падает груз, находится в вертикальной поперечной плоскости симметрии платформы и отстоит от центра тяжести C платформы на расстоянии $d = 0,6$ м.

Удар груза о платформу неупругий. Масса платформы $m = 5000$ кг, радиус ее инерции относительно горизонтальной продольной оси симметрии $i_C = 0,5$ м.

Принимая платформу за абсолютно твердое тело и считая груз материальной точкой, определить скорость центра тяжести и угловую скорость платформы в конце удара. Определить также ударный импульс в точке A .

Вариант 4. Груз — однородный сплошной цилиндр массой $m = 200$ кг и радиусом $r = 0,2$ м перемещается транспортером. Лента транспортера горизонтальна, ее постоянная скорость $v = 0,6$ м/с; скольжение ленты по шкивам 1 и 2 отсутствует. В некоторый момент времени движение транспортера внезапно прекращается.

Поскольку поверхность ленты транспортера абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения тела при ударном воздействии, цилиндр вследствие внезапной остановки транспортера покатится по ленте. Сопротивление качению пренебрежимо мало.

Определить ударный импульс, воспринимаемый абсолютно шероховатой поверхностью ленты при внезапной остановке транспортера.

Проверить найденную для этого скорость центра тяжести (или угловую скорость) цилиндра по теореме Карно.

Определить ударный импульс, воспринимаемый упорный ступенькой высотой $h = 0,03$ м, о которую ударяется колесо, пройдя некоторое расстояние, если не происходит отрыв цилиндра при ударе о ступеньку и его проскальзывание.

Вариант 5. Транспортируемые грузы катятся из положения A без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом, проходя вдоль нее расстояние $s_f = 3$ м, и продолжают катиться по горизонтальной плоскости. Скольжение отсутствует; коэффициент трения качения $\delta = 0,8$ см.

Определить, на каком расстоянии s_2 должна быть поставлена упорная ступенька высотой $h = 0,2$ м, чтобы грузы, ударившись о ребро F ступеньки, лишь поднимались на нее, не перемещаясь дальше ребра F .

Расчет произвести для груза — однородного сплошного цилиндра массой $m = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м.

Считать, что отрыва цилиндра от ступеньки не происходит, а поверхность ступеньки абсолютно шероховата, т. е. препятствует скольжению цилиндра при ударном воздействии.

Определить также горизонтальную и вертикальную составляющие ударного импульса, воспринимаемого цилиндром со стороны ступеньки, при указанных условиях.

Вариант 6. Маятник состоит из стержня длиной $l = 1,2$ м и однородного круглого диска радиусом $r = 0,1$ м. Масса стержня пренебрежимо мала; масса диска $m_0 = 5$ кг.

Маятник, отклоненный от положения устойчивого равновесия, падает под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O ; в вертикальном положении, имея угловую скорость $\omega = 3$ с¹, маятник ударяется о точку B боковой грани тела D — однородного прямоугольного параллелепипеда массой $m = 6m_0$ ($a = 0,8$ м, $b = 0,4$ м, $h = 0,2$ м).

Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,5$. Поверхности маятника и тела D в точке соударения гладкие. Плоскость, на которой поконится тело D , абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения тела при ударном воздействии.

Определить угловую скорость вращения тела D вокруг ребра A в конце удара, а также ударный импульс, воспринимаемый шероховатой поверхностью в точке A .

Вариант 7. Рычаг состоит из двух абсолютно жестких стержней AB и AD , соединенных под прямым углом. Рычаг имеет неподвижную горизонтальную ось вращения A и удерживается в точке B пружиной; $AD = a = 1,5$ м.

В точку D горизонтального стержня рычага, находящегося в покое, с высоты $h = 0,5$ м падает груз массой $m_0 = 100$ кг. Масса рычага $m = 1000$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $l_A = 0,5$ м. Положение центра тяжести C рычага определяется координатами $x_C = 0,4$ м и $y_C = 0,3$ м. Считать груз материальной точкой, а удар груза о рычаг принять неупругим.

Определить ударный импульс, испытываемый грузом, а также горизонтальную и вертикальную составляющие ударного импульса, воспринимаемого опорой A .

Вариант 8. На тележке 1 лежит груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 500$ кг и радиусом $r = 0,4$ м, который удерживается от возможного перемещения по тележке ступенькой и наклонной плоскостью, составляющей угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом.

Тележка 1 , имеющая вместе с грузом массу $m_1 = 3000$ кг, движаясь по горизонтальному прямолинейному пути, наталкивается со скоростью $v_1 = 3$ м/с на неподвижную вагонетку 2 общей массой $m_2 = 6000$ кг. В конце соударения тележка 1 останавливается, а цилиндр, ударясь о наклонную плоскость, начинает катиться по ней.

Отрыва цилиндра при ударе о наклонную плоскость не происходит, абсолютная шероховатость наклонной плоскости исключает скольжение цилиндра при ударном воздействии. Считать вертикальные плоскости соударения тележки и вагонетки гладкими.

Определить угловую скорость цилиндра в конце удара о наклонную плоскость; проверить найденное выражение угловой скорости цилиндра по теореме Карно.

Определить скорость вагонетки 2 в конце соударения с тележкой 1.

Вариант 9. Тело D массой m_0 , поступательно движущееся по горизонтальной плоскости, ударяется со скоростью $v_0 = 3 \text{ м/с}$ об узел C вертикального пояса покоящейся фермы. Поверхности тела D и узла C в точке соударения гладкие; коэффициент восстановления при ударе $k = 0,5$. Абсолютно жесткая ферма имеет шарнирно-неподвижную опору O и упругую опору A ; $BC = a = 2 \text{ м}$. Масса фермы $m = 20m_0$, радиус ее инерции относительно горизонтальной оси вращения $O i_0 = 1 \text{ м}$.

Определить угловую скорость фермы в конце удара и проверить ее по теореме Карно.

Определить, на какое расстояние s переместится, двигаясь поступательно, тело D после удара, если коэффициент трения скольжения $f = 0,1$.

Вариант 10. Отклоненный на угол $\alpha = 60^\circ$ от положения устойчивого равновесия маятник падает без начальной скорости под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O . В вертикальном положении маятник ударяется точкой F о покоящееся тело, находящееся в положении A .

Расстояния от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии маятника до его центра тяжести C и до точки F , находящейся в той же плоскости: $OC = d = 0,9 \text{ м}$ и $OF = l = 1,1 \text{ м}$.

Масса маятника $m = 18 \text{ кг}$, радиус его инерции относительно оси вращения $i_0 = 1 \text{ м}$. Тело имеет массу $m_0 = 6 \text{ кг}$ и может быть принято за материальную точку. Коэффициент восстановления при ударе маятника о тело $k = 0,2$.

Вследствие удара тело падает из точки A плоскости AB в точку D гладкой горизонтальной плоскости DE . Плоскость DE расположена ниже плоскости AB на $h = 1 \text{ м}$. Удар тела в точке D можно считать неупругим ($k_1 = 0$).

Определить ударный импульс в точке D и уравнение движения тела после этого удара, отнеся движение к координатной системе xDy .

Определить также угол β отклонения маятника после удара о тело в точке A .

Вариант 11—20 (рис. 181). Вариант 11. При испытании на ударную нагрузку маятник копра массой $m_0 = 500 \text{ кг}$, отклоненный из положения устойчивого равновесия на угол $\alpha = 60^\circ$, падает без начальной скорости под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O .

В вертикальном положении маятник ударяется точкой A о середину D покояющейся вертикальной балки BF массой $m = 2000 \text{ кг}$, имеющей шарнирно-неподвижную опору B и упругую опору F ($BF = 2a = 3,2 \text{ м}$); балку можно считать однородным тонким стержнем; коэффициент восстановления при ударе $k = 0,4$.

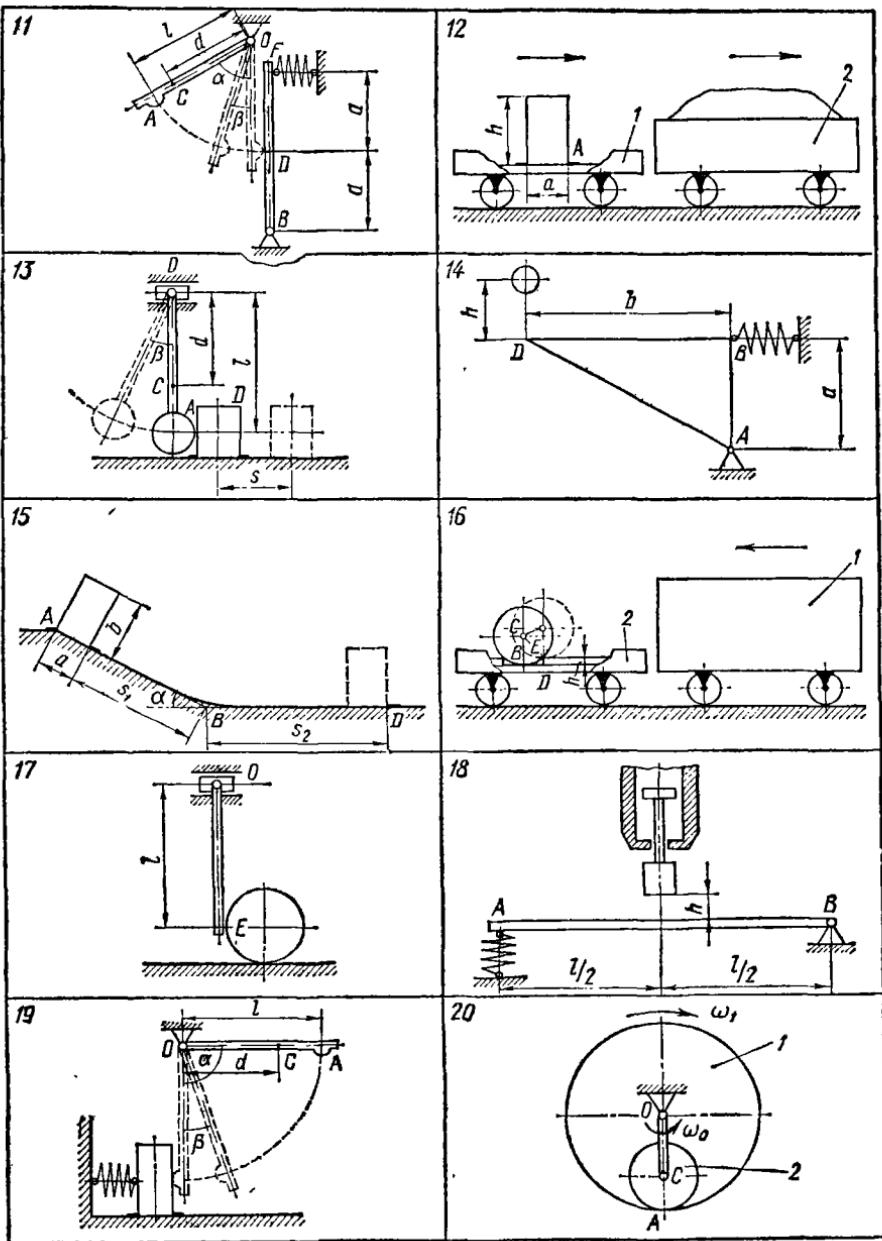


FIG. 181

Расстояние от точки O пересечения оси вращения маятника вертикальной плоскостью его симметрии до центра тяжести C маятника $OC = d = 1,5$ м, а расстояние от точки O до точки A , лежащей в той же плоскости симметрии, $OA = l = 2$ м; радиус инерции маятника относительно оси вращения $i_0 = 1,8$ м. Отклонившийся после удара на угол β маятник задерживается в этом положении специальным захватом.

Определить ударный импульс в точке D и расстояние от точки B до точки, в которую следует наносить удар, чтобы опора B не испытывала ударного импульса.

Вариант 12. Тележка 1, имеющая вместе с контейнером массу $m_1 = 2000$ кг и движущаяся по горизонтальному прямолинейному пути со скоростью $v_1 = 2,5$ м/с, наталкивается на тележку 2 общей массой $m_2 = 8000$ кг, движущуюся со скоростью $v_2 = 0,5$ м/с по тому же пути и в том же направлении.

В конце соударения тележка 1 останавливается, а контейнер приобретает угловую скорость вращения вокруг ребра A , закрепленного упорной планкой. Считать контейнер массой $m_0 = 500$ кг однородным прямоугольным параллелепипедом ($a = 0,9$ м, $h = 1,2$ м), а вертикальные плоскости соударения тележек гладкими.

Определить угловую скорость контейнера в конце соударения тележек и проверить найденное выражение по теореме Карно. Определить также коэффициент восстановления при соударении тележек.

Вариант 13. Ось O подвеса маятника движется поступательно в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью, при этом маятник занимает вертикальное положение устойчивого равновесия. Радиус инерции маятника относительно оси O $i_0 = 0,8$ м.

При внезапной остановке оси подвеса маятник, находясь в том же положении и приобретя угловую скорость, ударяется точкой A о покоящееся тело D , имеющее массу $m_0 = 2,5m$, где m — масса маятника. Поверхности маятника и тела D в точке соударения гладкие. Коэффициент восстановления при соударении маятника и тела $k = 0,6$.

Расстояния от точки O до точки A и до центра тяжести C маятника, отсчитываемые вдоль его вертикальной оси симметрии, $l = 1$ м и $d = 0,7$ м соответственно. После удара тело D , двигаясь поступательно, перемещается по горизонтальной плоскости на расстояние $s = 0,1$ м; коэффициент трения скольжения тела по плоскости $f = 0,1$.

Определить скорость оси O подвеса маятника перед внезапной остановкой, а также угол β отклонения маятника после удара о тело D .

Вариант 14. Абсолютно жесткая конструкция, имеющая форму прямоугольного треугольника со сторонами $AB = a = 1$ м и $BD = b = 2$ м, опирается на шарнирно-неподвижную опору A и удерживается в точке B пружиной.

В точку D конструкции, находящейся в состоянии покоя, при котором сторона BD горизонтальна, с высоты $h = 0,5$ м падает груз массой $m_0 = 200$ кг; удар груза неупругий. Считать конструкцию, масса которой $m = 2000$ кг, однородным треугольником, а груз — материальной точкой.

Определить угловую скорость системы в конце удара и проверить найденное выражение угловой скорости по теореме Карно. Определить также ударный импульс, испытываемый опорой A .

Вариант 15. При транспортировке грузы из положения A скользят без начальной скорости по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом, проходя вдоль нее расстояние $s_1 = 3$ м, и продолжают движение по горизонтальной плоскости.

Определить, на каком наименьшем расстоянии BD должен быть поставлен упор D для остановки грузов, чтобы они при этом не опрокидывались. Расчет произвести для груза — однородного прямоугольного параллелепипеда массой $m = 500$ кг ($b = 2a = 1$ м). Принять коэффициент трения скольжения $f = 0,2$.

Определить также ударный импульс, воспринимаемый упором при указанных условиях.

Вариант 16. Вагонетка 1 общей массой $m_1 = 6500$ кг, движущаяся по горизонтальному прямолинейному пути, наталкивается на неподвижную тележку 2, имеющую вместе с грузом массу $m_2 = 4000$ кг. Груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м удерживается от возможного перемещения по тележке двумя упорами — ступеньками.

В конце соударения вагонетка 1 и тележка 2 приобретают одинаковую скорость движения по горизонтальному прямолинейному пути, а цилиндр — угловую скорость вращения вокруг ребра E ступеньки DE . Поверхность ступеньки абсолютно шероховата, т. е. препятствует проскальзыванию цилиндра при ударном воздействии; отрыва цилиндра при ударе о ребро E не происходит. После удара цилиндр поднимается на ступеньку DE высотой $h = 0,1$ м. Считать, что за время подъема цилиндра на ступеньку скорость тележки 2, приобретенная ею в конце удара, остается постоянной, а вертикальные плоскости соударения вагонетки и тележки гладкие.

Определить ударный импульс, испытываемый цилиндром со стороны ступеньки DE , а также скорость вагонетки 1 до столкновения ее с тележкой 2.

Вариант 17. Ось O подвеса маятника движется поступательно в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 2$ м/с, при этом маятник занимает вертикальное положение устойчивого равновесия. Маятник — однородный тонкий стержень длиной $l = 1$ м и массой $m_0 = 20$ кг.

При внезапной остановке оси подвеса маятник, находясь в том же положении и приобретя угловую скорость, ударяется точкой E о неподвижный однородный полый тонкостенный цилиндр радиусом $r = 0,2$ м и массой $m = 2m_0$. Коэффициент восстановления при соударении тел $k = 1/3$. Поверхности маятника и цилиндра в точке соударения гладкие. Плоскость, на которой покоятся цилиндр, абсолютно шероховата, т. е. не допускает скольжения тела при ударном воздействии.

Определить ударный импульс, испытываемый осью O подвеса маятника при ее внезапной остановке, а также угловую скорость цилиндра в конце соударения с маятником.

Вариант 18. Абсолютно жесткая балка массой $m = 8000$ кг и длиной $l = 4$ м имеет упругую опору A и шарнирно-неподвижную опору B . Балка занимает в состоянии покоя, соответствующем статической деформации пружины A , горизонтальное положение; коэффициент жесткости пружины $c = 10\,000$ Н/см. Радиус инерции балки относительно горизонтальной оси вращения B $i_B = 2,2$ м.

Балка испытывается на воздействие ударной нагрузки с помощью парового молота, в котором масса молота, штока и поршня $m_0 = 800$ кг. Молот и связанные с ним части падают под давлением пара на середину балки с высоты $h = 0,8$ м, имея в момент соприкосновения с балкой скорость, в два раза превышающую скорость при свободном падении. Коэффициент восстановления при ударе молота о балку $k = 0,2$.

Принять молот и связанные с ним элементы за материальную точку; считать, что движение точек балки происходит по прямым.

Определить наибольшую деформацию упругой опоры A , считая, что молот, отскочив от балки, не падает снова, а удерживается обратным давлением пара; определить также ударный импульс, воспринимаемый опорой B .

Вариант 19. При испытании упорных (буферных) брусьев на удар маятник копра массой $m = 500$ кг, радиус инерции которого относительно неподвижной горизонтальной оси вращения O $i_O = 1,2$ м, отклоняют от положения устойчивого равновесия на угол $\alpha = 90^\circ$ и отпускают без начальной угловой скорости. Падая, маятник точкой A ударяется о буферный брус массой $m_0 = 1000$ кг, коэффициент жесткости комплекта пружин которого $c = 10\,000$ Н/см. Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,5$. Отклонившийся после удара на угол β маятник задерживается в этом положении специальным захватом.

Расстояние от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии маятника до его центра тяжести C $OC = d = 0,9$ м; расстояние от точки O до точки A , находящейся в той же плоскости симметрии, $OA = l = 1,5$ м.

Пренебрегая трением скольжения бруса о горизонтальную плоскость, определить величину наибольшего сжатия буферных пружин, ударный импульс в точке A , а также расстояние от точки O до центра удара.

Вариант 20. В гипоциклическом механизме кривошип OC массой $m = 2$ кг и зубчатое колесо 1 радиусом $r = 30$ см вращаются с угловыми скоростями $\omega_0 = 1,5 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_1 = 1 \text{ с}^{-1}$ соответственно. Зубчатое колесо 2 имеет массу $m_2 = 8$ кг и радиус $r_2 = 10$ см. В некоторый момент времени колесо 1 внезапно останавливают.

Считая кривошип однородным тонким стержнем, а колесо 2 — однородным сплошным диском, определить угловую скорость кривошипа в конце удара, а также ударные импульсы в точках A и C .

Варианты 21 — 30 (рис. 182). **Вариант 21.** Лента транспортера составляет угол $\alpha = 15^\circ$ с горизонтом. Радиусы шкивов $r = 0,2$ м. На ленте транспортера, скольжение которой по шкивам 1 и 2 отсутствует, находится груз — однородный куб массой $m_0 = 200$ кг

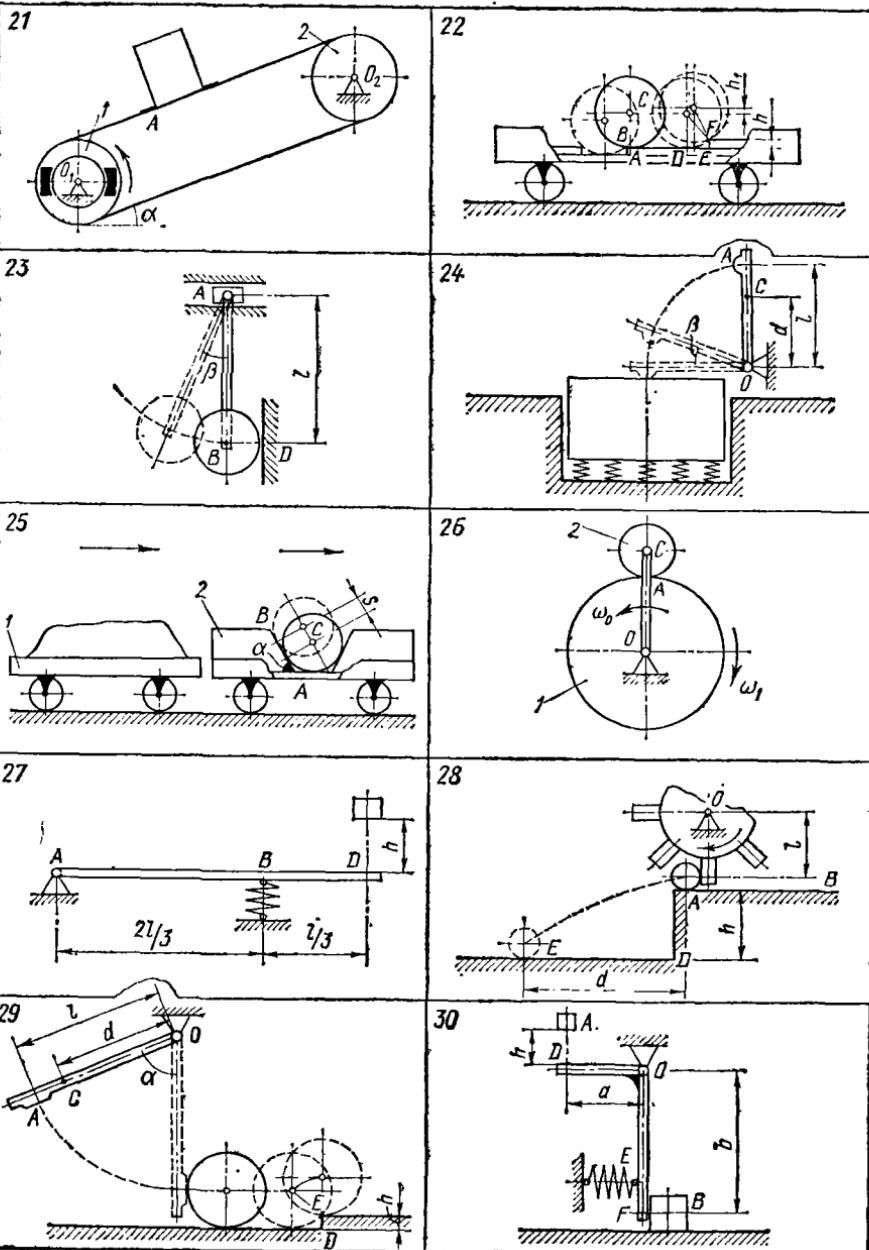


Рис. 182

с ребрами длиной $a = 0,5$ м. В некоторый момент времени движение транспортера внезапно прекращается, при этом груз приобретает угловую скорость вращения вокруг ребра A , закрепленного упорной планкой.

Определить наименьшую угловую скорость шкивов в момент остановки, если груз опрокидывается; определить также ударный импульс, воспринимаемый упорной планкой при внезапной остановке шкивов, врачающихся с этой угловой скоростью.

Вариант 22. Груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m = 800$ кг и радиусом $r = 0,4$ м — покоятся на движущейся платформе между упорами — ступеньками. При внезапной остановке платформы ступенька AB не удерживает груз: цилиндр, поднимаясь на ступеньку, прокатывается по участку $BD = s = 1$ м горизонтальной площадки BE и, ударившись о ребро F другого упора — ступеньки EF высотой $h = 0,1$ м, поворачивается вокруг ребра F , вследствие чего центр тяжести цилиндра поднимается по вертикали на высоту $h_1 = 0,07$ м. Качение цилиндра от B до F происходит без скольжения; коэффициент сопротивления качению цилиндра $\delta = 0,1$ см. Отрыва цилиндра при ударе о ступеньку не происходит, абсолютно шероховатая поверхность ступеньки не допускает скольжения цилиндра при ударном воздействии.

Определить, какую скорость имеет центр тяжести цилиндра в начале движения на участке BD , а также ударный импульс, испытываемый ребром F ступеньки EF .

Вариант 23. Маятник состоит из тонкого однородного стержня AB массой $m = 4$ кг, длиной $l = 0,7$ м и однородного сплошного шара массой $m_0 = 2$ кг и радиусом $r = 0,1$ м. Ось A маятника движется поступательно в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью $v = 1,4$ м/с, при этом маятник занимает вертикальное положение устойчивого равновесия.

Вследствие внезапной остановки оси подвеса маятник получает угловую скорость вращения вокруг этой оси и, находясь в том же вертикальном положении, ударяется точкой D о неподвижную вертикальную плоскость. Поверхности маятника и вертикальной плоскости в точке соударения гладкие. Коэффициент восстановления при ударе $k = 0,4$.

Определить угловую скорость маятника при внезапной остановке оси его подвеса и проверить найденное выражение по теореме Карно. Определить также угол отклонения β маятника после удара о вертикальную плоскость и ударные импульсы, испытываемые осью A маятника.

Вариант 24. При испытании фундамента на ударную нагрузку маятник колпа, врачаясь вокруг неподвижной оси, падает из вертикального положения, показанного на чертеже, под действием собственного веса без начальной угловой скорости. В горизонтальном положении маятник точкой A ударяется о середину верхней грани покоящегося фундамента.

Масса маятника $m_0 = 500$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $i_0 = 1,8$ м, масса однородного фундамента $m = 10\,000$ кг.

Коэффициент восстановления при ударе $k=0,2$. Отклоняющийся после удара маятник задерживается в этом положении специальным захватом. Расстояния от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии маятника до его центра тяжести C и до точки A , находящейся в той же плоскости симметрии: $OC = d = 1,5$ м и $OA = l = 2$ м.

Определить: наибольшую упругую осадку основания, имеющего коэффициент жесткости $c = 16 \cdot 10^5$ Н/см, ударный импульс в точке A и расстояние от точки O до центра удара.

Вариант 25. Тележка 1 общей массой $m_1 = 3000$ кг, двигаясь по горизонтальному прямолинейному пути со скоростью $v_1 = 5$ м/с, наталкивается на тележку 2, имеющую вместе с грузом массу $m_2 = 2000$ кг и движущуюся по тому же пути и в том же направлении со скоростью $v_2 = 1$ м/с.

Груз — однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м удерживается от возможного перемещения по тележке двумя упорами — наклонными плоскостями.

В конце соударения скорости движения тележек по тому же горизонтальному прямолинейному пути изменяются, а цилиндр, ударяясь о наклонную плоскость AB , составляющую угол $\alpha = 60^\circ$, начинает качение по ней.

Цилиндр по наклонной плоскости проходит без скольжения расстояние $s = 0,1$ м; сопротивление качению пренебрежимо мало. Отрыва цилиндра при ударе о наклонную плоскость не происходит, абсолютная шероховатость наклонной плоскости исключает скольжение цилиндра при ударном воздействии.

Считать, что за время подъема цилиндра на наклонную плоскость скорость тележки 2, полученная ею в конце удара, остается постоянной, а вертикальные плоскости соударения тележек гладкие.

Определить скорость тележки 1 в конце соударения с тележкой 2, а также ударный импульс, воспринимаемый наклонной плоскостью со стороны цилиндра.

Вариант 26. В эпициклическом механизме кривошип OC массой $m = 3$ кг и длиной $l = 30$ см вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ с⁻¹, а зубчатое колесо 1 — с угловой скоростью $\omega_1 = 3$ с⁻¹. Масса зубчатого колеса 2 $m_2 = 10$ кг, а радиус $r_2 = 10$ см.

В некоторый момент времени колесо 1 внезапно останавливают. Считая колесо 2 однородным сплошным диском, а кривошип — однородным тонким стержнем, определить угловую скорость колеса 2 в конце удара, а также ударные импульсы в точках A и C .

Вариант 27. В точку D абсолютно жесткой балки массой $m = 5000$ кг и длиной $l = 3$ м с высоты $h = 1,2$ м падает груз массой $m = 400$ кг. Балка имеет шарнирно-неподвижную опору A и упругую опору B ; в состоянии покоя балка занимает горизонтальное положение, показанное на чертеже. Удар груза о балку неупругий.

Считать балку однородным тонким стержнем, а груз — материальной точкой.

Определить угловую скорость балки в конце удара и проверить найденное выражение угловой скорости по теореме

Карно. Определить также ударный импульс, воспринимаемый опорой A .

Вариант 28. Механизм состоит из шестерни с кулачками, которая приводится во вращение вокруг неподвижной горизонтальной оси O . Масса механизма $m = 50$ кг, радиус инерции относительно оси вращения $i_0 = 0,2$ м. Механизм сбрасывает металлические болванки массой $m_0 = 2$ кг из точки A горизонтальной плоскости AB на горизонтальную плоскость ED на расстояние $d = 1,5$ м, отсчитываемое по горизонтали от точки A . Плоскость ED расположена ниже плоскости AB на высоту $h = 1$ м.

Неупругий удар между кулачком и болванкой ($k_1 = 0$) происходит на расстоянии $l = 0,4$ м от оси вращения механизма. Коэффициент восстановления при ударе болванки о гладкую горизонтальную плоскость в точке E $k_2 = 0,2$.

Принимая болванку за материальную точку, определить угловую скорость шестерни в начале удара, а также ударные импульсы, испытываемые болванкой в точках A и E .

Вариант 29. Маятник, отклоненный от положения устойчивого равновесия на некоторый угол α , падает без начальной скорости под действием собственного веса, вращаясь вокруг неподвижной оси O , и в вертикальном положении точкой A ударяется о покоящийся однородный полый тонкостенный цилиндр массой $m_0 = 200$ кг и радиусом $r = 0,2$ м. Масса маятника $m = 100$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения $i_0 = 1$ м. Расстояния от точки O пересечения оси вращения вертикальной плоскостью симметрии до центра тяжести C маятника и до точки A , находящейся в той же плоскости симметрии: $OC = d = 0,8$ м и $OA = l = 1,2$ м. Коэффициент восстановления при соударении маятника и цилиндра $k = 0,6$.

После удара цилиндр скользит, не вращаясь, по гладкой горизонтальной плоскости и, натолкнувшись на ступеньку DE высотой $h = 0,05$ м, поднимается на нее, не перемещаясь дальше ребра E . Отрыва цилиндра от ребра E при ударе о ступеньку не происходит, а абсолютно шероховатая поверхность ступеньки исключает проскальзывание цилиндра при ударном воздействии.

Определить угол α первоначального отклонения маятника, а также ударный импульс, испытываемый цилиндром со стороны маятника.

Вариант 30. Рычаг состоит из двух абсолютно жестких стержней OD и OF , соединенных под прямым углом; $OD = a = 1$ м, $OF = b = 1,5$ м. Рычаг имеет шарнирно-неподвижную опору O и удерживается в точке E пружиной. Масса рычага $m = 400$ кг, радиус его инерции относительно оси вращения O $i_0 = 0,4$ м.

Рычаг находится в покое, соответствующем статической деформации пружины, при этом его стержень OD горизонтален. В точку D рычага падает груз A массой $m_A = 20$ кг с высоты $h = 0,5$ м. Удар груза о стержень OD рычага неупругий ($k_1 = 0$). Приобретя угловую скорость, рычаг точкой F ударяется о неподвижное тело B массой $m_B = 120$ кг; коэффициент восстановления при этом ударе $k_2 = 0,2$. Считать груз A и тело B материальными точками.

Определить, какую скорость получает тело B в конце его соударения со стержнем OF , а также ударный импульс, воспринимаемый телом B .

Пример выполнения задания (рис. 183). Груз — однородный сплошной цилиндр массой $m = 500$ кг и радиусом $r = 0,5$ м лежит на движущейся платформе и удерживается от возможного перемещения по платформе упорами — ступеньками.

При внезапной остановке платформы цилиндр ударяется о ребро D ступеньки BD высотой $h = 0,1$ м и поднимается вверх на эту ступеньку. Далее цилиндр катится по участку DE горизонтальной площадки DK и, ударившись о другой упор — наклонную плоскость KN , составляющую угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом, проходит по ней расстояние $FN = s = 0,1$ м. Качение цилиндра не сопровождается скольжением, сопротивление качению пренебрежимо мало.

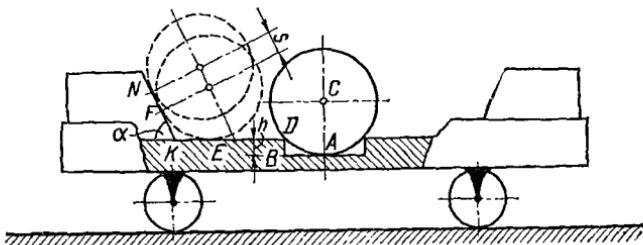


Рис. 183

Отрыва цилиндра при ударах о ступеньку и о наклонную плоскость не происходит; абсолютная шероховатость ступеньки и наклонной плоскости исключает скольжение цилиндра при ударном воздействии.

Определить скорость платформы до ее остановки, а также ударные импульсы, испытываемые цилиндром со стороны ступеньки и наклонной плоскости.

Проверить найденные выражения угловых скоростей цилиндра после ударов о ступеньку и наклонную плоскость с помощью теоремы Карно.

Решение. При внезапной остановке платформы поступательное движение цилиндра мгновенно изменяется на вращательное движение вокруг ребра D ступеньки BD , т. е. цилиндр испытывает удар.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе, взяв за ось моментов неподвижную горизонтальную ось, проходящую вдоль ребра D (положения I и II , соответствующие началу и концу удара о ребро D ступеньки BD , совпадают — рис. 184, a):

$$L_{IID} - L_{ID} = \sum M_D (\vec{S}_t^E).$$

Сумма моментов внешних ударных импульсов, приложенных к цилинду, относительно оси D $\sum M_D (\vec{S}_t^E) = 0$ (ударный импульс \vec{S}_D

пересекает ось D) и потому

$$L_{ID} = L_{ID}.$$

Кинетический момент цилиндра относительно оси D в начале удара

$$L_{ID} = mv_{C1}(r - h),$$

где $v_{C1} = v$ — скорость центра тяжести цилиндра в начале удара, равная скорости платформы до внезапной остановки.

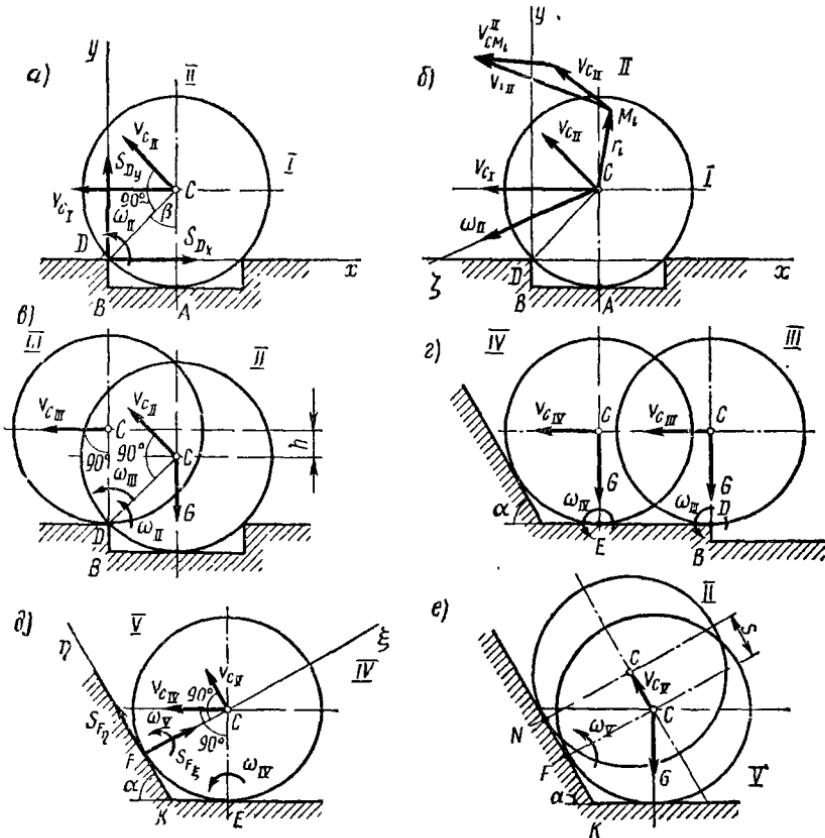


Рис. 184

Кинетический момент цилиндра относительно оси D в конце удара

$$L_{ID} = J_D \omega_{II},$$

где J_D — момент инерции цилиндра относительно оси D ; ω_{II} — угловая скорость цилиндра в конце удара.

$$L_{ID} = (J_C + mr^2) \omega_{II} = (mr^2/2 + mr^2) \omega_{II} = (3/2) \cdot mr^2 \omega_{II}.$$

Но

$$L_{II D} = L_{ID},$$

т. е.

$$(3/2) \cdot m r^2 \omega_{II} = m v (r - h),$$

откуда

$$\omega_{II} = 2 (r - h) v / 3 r^2. \quad (1)$$

Проверим полученное выражение (1) угловой скорости цилиндра по теореме Карно (для случая наложения на механическую систему идеальной неупругой связи):

$$T_1 - T_{II} = T^*,$$

где T_1 — кинетическая энергия системы материальных точек в начале удара; T_{II} — кинетическая энергия системы в конце удара; T^* — кинетическая энергия, соответствующая потерянным скоростям точек системы.

Кинетическая энергия цилиндра в начале удара о ступеньку

$$T_1 = (1/2) m v^2.$$

Кинетическая энергия цилиндра в конце удара о ступеньку

$$T_{II} = (1/2) (m v_C^2 + J_C \omega_{II}^2).$$

Теперь выведем выражение кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям $\Delta \vec{v}_i$ точек M_i твердого тела при плоском движении

$$\Delta \vec{v}_i = \vec{v}_{iI} - \vec{v}_{iII},$$

где

$$\vec{v}_{iI} = \vec{v}_{CI} + \vec{v}_{CM_i}^I, \quad \vec{v}_{iII} = \vec{v}_{CII} + \vec{v}_{CM_i}^{II},$$

причем вращательные скорости вокруг оси C имеют выражения:

$$\vec{v}_{CM_i}^I = \vec{\omega}_I \times \vec{r}_i, \quad \vec{v}_{CM_i}^{II} = \vec{\omega}_{II} \times \vec{r}_i.$$

Кинетическая энергия тела, соответствующая потерянным скоростям его точек,

$$T^* = (1/2) \sum m_i [(\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII}) + (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II})]^2,$$

т. е.

$$T^* = (1/2) [\sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII})^2 + 2 \sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII}) \times \\ \times (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II}) + \sum m_i (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II})^2].$$

Здесь

$$\sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII})^2 = m (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII})^2;$$

$$\sum m_i (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII}) \cdot (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II}) = (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII}) \cdot \sum m_i (\vec{\omega}_I \times \vec{r}_i - \vec{\omega}_{II} \times \vec{r}_i) = \\ = (\vec{v}_{CI} - \vec{v}_{CII}) \cdot [(\vec{\omega}_I - \vec{\omega}_{II}) \times \sum m_i \vec{r}_i] = 0;$$

так как

$$\sum m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_C = 0;$$

$$\sum m_i (\vec{v}_{CM_i}^I - \vec{v}_{CM_i}^{II}) = \sum m_i (\omega_I r_i - \omega_{II} r_i)^2 = J_C (\omega_I - \omega_{II})^2.$$

Таким образом,

$$T^* = (1/2) m (\vec{v}_{C1} - \vec{v}_{CII})^2 + (1/2) J_C (\omega_1 - \omega_{II})^2$$

или

$$T^* = (1/2) m [(v_{C1_x} - v_{CII_x})^2 + (v_{C1_y} - v_{CII_y})^2] + (1/2) J_C (\omega_1 - \omega_{II})^2. \quad (4)$$

Выражение (4) является общей формулой кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям точек твердого тела при плоском движении.

Для цилиндра (рис. 184, б) в рассматриваемой задаче

$$T^* = (1/2) m [(v_{C1} - v_{CII} \cos \beta)^2 + v_{CII}^2 \sin^2 \beta] + (1/2) J_C \omega_{II}^2,$$

т. е.

$$T^* = (1/2) m (v_{C1}^2 - 2v_{C1}v_{CII} \cos \beta + v_{CII}^2) + (1/2) J_C \omega_{II}^2.$$

Поскольку $v_{C1} = v$, $v_{CII} = \omega_{II} r$, $J_C = mr^2/2$, то, приравнивая $T_1 - T_2$ и T^* , получаем

$$\begin{aligned} & (1/2) mv^2 - (1/2) m\omega_{II}^2 r^2 - (1/4) mr^2 \omega_{II}^2 = \\ & = 1/2mv^2 + mv\omega_{II}r \cos \beta + (1/2) m\omega_{II}^2 r^2 + (1/4) mr^2 \omega_{II}^2 \end{aligned}$$

или

$$(3/2) m\omega_{II}^2 r^2 = mv\omega_{II}r \cos \beta,$$

где

$$\cos \beta = (r - h)/r.$$

Отсюда

$$\omega_{II} = 2(r - h)v/3r^2.$$

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы и соответствующее подъему цилиндра на ступеньку BD из положения II в положение III (рис. 184, б):

$$T_{III} - T_{II} = \sum A_i^E.$$

Так как перемещение осуществляется поворотом вокруг оси D , то

$$(1/2) \cdot J_D \omega_{II}^2 - (1/2) \cdot J_D \omega_{III}^2 = -Gh$$

или

$$(3/4) \cdot mr^2 \omega_{III}^2 - (3/4) \cdot mr^2 \omega_{II}^2 = -mgh,$$

откуда

$$\omega_{III} = \sqrt{\omega_{II}^2 - 4gh/3r^2}. \quad (2)$$

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы и соответствующее качению цилиндра на участке DE из положения III в положение IV (рис. 184, б)

$$T_{IV} - T_{III} = \sum A_i^E.$$

Так как на рассматриваемом перемещении $\sum A_i^E = 0$, то

$$T_{IV} = T_{III},$$

т. е.

$$v_{CIV} = v_{CIII} \quad \text{и} \quad \omega_{IV} = \omega_{III}. \quad (3)$$

При соприкасании цилиндра с наклонной плоскостью мгновенная ось вращения цилиндра (мгновенный центр скоростей) мгновенно перемещается из E в F , т. е. цилиндр испытывает удар.

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе, взяв за ось моментов неподвижную горизонтальную ось, совпадающую с образующей F цилиндра (положения цилиндра IV и V , соответствующие началу и концу удара, совпадают — рис. 184, δ):

$$L_{VF} - L_{IVF} = \Sigma M_F(\vec{S}_i^E).$$

Но $\Sigma M_F(\vec{S}_i^E) = 0$, так как ударный импульс \vec{S}_F , приложенный к цилиндуру, пересекает ось F . Поэтому

$$L_{VF} = L_{IVF}.$$

При вычислении кинетических моментов цилиндра L_{IVF} и L_{VF} используем теорему о кинетическом моменте системы в общем случае ее движения.

Кинетический момент цилиндра относительно оси F в начале удара

$$L_{IVF} = mv_{CIV}r \cos \alpha + J_C \omega_{IV},$$

где $v_{CIV} = \omega_{IV} EC$, поскольку мгновенный центр скоростей — в точке E ;

$$L_{IVF} = m\omega_{IV}r^2 \cos \alpha + (mr^2/2) \cdot \omega_{IV} = m\omega_{IV}r^2 (\cos \alpha + 1/2).$$

Кинетический момент цилиндра относительно оси F в конце удара

$$L_{VF} = mv_{CV}r + J_C \omega_V,$$

где $v_{CV} = \omega_V CF$, так как мгновенный центр скоростей — в точке F

$$L_{VF} = m\omega_Vr^2 + (mr^2/2) \cdot \omega_V = (3/2) \cdot m\omega_Vr^2.$$

Но $L_{VF} = L_{IVF}$, т. е.

$$\begin{aligned} (3/2) \cdot m\omega_Vr^2 &= m\omega_{IV}r^2 (\cos \alpha + 1/2), \\ \omega_V &= \omega_{IV} (2 \cos \alpha + 1)/3. \end{aligned} \quad (4)$$

Проверим найденное выражение угловой скорости цилиндра по теореме Карно (для случая наложения на систему материальных точек идеальной неупругой связи):

$$T_{IV} - T_V = T^*.$$

Кинетическая энергия цилиндра в начале удара о наклонную плоскость

$$T_{IV} = (1/2) (mv_{CIV}^2 + J_C \omega_{IV}^2).$$

Кинетическая энергия цилиндра в конце удара о наклонную плоскость

$$T_V = (1/2) (mv_{CV}^2 + J_C \omega_V^2).$$

Кинетическую энергию, соответствующую потерянным скоростям точек цилиндра, найдем, используя формулу (*) (рис. 184, ∂):

$$T^* = (1/2) m [(v_{CIV_x} - v_{CV_x})^2 + (v_{CIV_y} - v_{CV_y})^2 + (1/2) J_C (\omega_{IV} - \omega_V)^2],$$

т. е.

$$T^* = (1/2) m [(v_{CIV} - v_{CV} \cos \alpha)^2 + v_{CV}^2 \sin^2 \alpha] + (1/2) J_C (\omega_{IV} - \omega_V)^2$$

или

$$T^* = (1/2) m (v_{CIV}^2 - 2v_{CIV}v_{CV} \cos \alpha + v_{CV}^2) + (1/2) J_C (\omega_{IV} - \omega_V)^2.$$

Поскольку $v_{CIV} = \omega_{IV}r$, $v_{CV} = \omega_Vr$, то, приравнивая $T_{IV} - T_V$ и T^* , получаем

$$\begin{aligned} & (1/2) m \omega_{IV}^2 r^2 + (1/4) m r^2 \omega_{IV}^2 - (1/2) m \omega_V^2 r^2 - (1/4) m r^2 \omega_V^2 = \\ & = (1/2) m \omega_{IV}^2 r^2 + m \omega_{IV} \omega_V r^2 \cos \alpha + (1/2) m \omega_V^2 r^2 + \\ & + (1/4) m r^2 \omega_{IV}^2 - (1/2) m r^2 \omega_{IV} \omega_V + (1/4) m r^2 \omega_V^2 \end{aligned}$$

или

$$(3/2) \omega_V^2 = \omega_{IV} \omega_V (\cos \alpha + 1/2),$$

откуда

$$\omega_V = \omega_{IV} (2 \cos \alpha + 1)/3.$$

Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии механической системы и соответствующее качению цилиндра по наклонной плоскости из положения V в положение VI на расстояние s (рис. 184, e):

$$T_{VI} - T_V = \sum A_i^E.$$

Поскольку $T_{VI} = 0$,

$$-\left(\frac{mv_{CV}^2}{2} + \frac{J_C \omega_V^2}{2}\right) = -Gs \sin \alpha$$

или

$$-\frac{m \omega_V^2 r^2}{2} - \frac{(mr^2/2) \cdot \omega_V^2}{2} = -mgs \sin \alpha,$$

т. е.

$$(3/4) \cdot \omega_V^2 r^2 = gs \sin \alpha,$$

откуда

$$\omega_V = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gs \sin \alpha}{3}}. \quad (5)$$

Используя выражения (2) — (4), находим:

$$\omega_{II} = \sqrt{\frac{9\omega_V^2}{(2 \cos \alpha + 1)^2} + \frac{4gh}{3r^2}}.$$

Учитывая выражение (5), имеем

$$\omega_{II} = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{3gs \sin \alpha}{(2 \cos \alpha + 1)^2} + \frac{gh}{3}}.$$

Таким образом, скорость платформы по (1)

$$v = \frac{3r^2}{2(r-h)} \cdot \frac{2}{r} \sqrt{\frac{3gs \sin \alpha}{(2 \cos \alpha + 1)^2} + \frac{gh}{3}},$$

т. е.

$$v = \frac{3 \cdot 0,5}{0,5 - 0,1} \sqrt{\frac{3 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \cdot 0,866}{(2 \cdot 0,5 + 1)^2} + \frac{4 \cdot 9,81 \cdot 0,1}{3}} = 3,68 \text{ м/с.}$$

Найдем ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны ступеньки, для чего составим уравнения, выражающие теорему об изменении количества движения механической системы при ударе, в проекциях на оси x и y (см. рис. 184, а):

$$mv_{CIIx} - mv_{CIx} = \sum S_{ix}^E; \quad mv_{CIIy} - mv_{CIy} = \sum S_{iy}^E$$

или

$$-mv_{CII} \cos \beta - (-mv_{CI}) = S_{Dx}; \quad mv_{CII} \sin \beta = S_{Dy},$$

откуда

$$\begin{aligned} S_{Dx} &= mv_{CI} - mv_{CII} \cos \beta = mv - m\omega_{I1} r \frac{r-h}{r} = \\ &= mv \left[1 - \frac{2(r-h)^2}{3r^2} \right] = 500 \cdot 3,68 \left[1 - \frac{2(0,5-0,1)^2}{3 \cdot 0,5^2} \right] = 1055 \text{ Нс;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{Dy} &= mv_{CII} \sin \beta = m\omega_{I1} r \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \\ &= \frac{2(r-h)mv}{3r} \sqrt{1 - \frac{(r-h)^2}{r^2}} = \frac{2(0,5-0,1)500 \cdot 3,68}{3 \cdot 0,5} \cdot 0,6 = 589 \text{ Нс.} \end{aligned}$$

Ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны ступеньки

$$S_D = \sqrt{S_{Dx}^2 + S_{Dy}^2} = \sqrt{1055^2 + 589^2} = 1208 \text{ Нс.}$$

Найдем ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны наклонной плоскости, для чего составим уравнения, выражающие теорему об изменении количества движения системы при ударе, в проекциях на оси ξ и η (см. рис. 184, б):

$$mv_{CV\xi} - mv_{CIV\xi} = \sum S_{i\xi}^E; \quad mv_{CV\eta} - mv_{CIV\eta} = \sum S_{i\eta}^E$$

или

$$-(-mv_{CIV} \sin \alpha) = S_{F\xi}; \quad mv_{CV} - mv_{CIV} \cos \alpha = S_{F\eta},$$

откуда

$$S_{F\xi} = mv_{CIV} \sin \alpha = m\omega_{IV} r \sin \alpha = m \frac{3\omega_V}{2 \cos \alpha + 1} r \sin \alpha;$$

$$\begin{aligned} S_{F\eta} &= mv_{CV} - mv_{CIV} \cos \alpha = m\omega_V r - m\omega_{IV} r \cos \alpha = \\ &= m\omega_V r - m \frac{3\omega_V}{2 \cos \alpha + 1} r \cos \alpha. \end{aligned}$$

Используя выражение (5), найдем:

$$S_{F\xi} = \frac{6m \sqrt{\frac{gs \sin \alpha}{3}}}{2 \cos \alpha + 1} \sin \alpha = \frac{6 \cdot 500 \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,1 \cdot 0,866}{3}}}{2 \cdot 0,5 + 1} \cdot 0,866 = 691 \text{ Нс.}$$

$$\begin{aligned} S_{F\eta} &= 2m \cdot \sqrt{\frac{gs \sin \alpha}{3}} \left(1 - \frac{3 \cos \alpha}{2 \cos \alpha + 1} \right) = \\ &= 2 \cdot 500 \sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,1 \cdot 0,866}{3}} \left(1 - \frac{3 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5 + 1} \right) = 133 \text{ Нс.} \end{aligned}$$

Ударный импульс, воспринимаемый цилиндром со стороны наклонной плоскости,

$$S_F = \sqrt{S_{F\xi}^2 + S_{F\eta}^2} = \sqrt{691^2 + 133^2} = 704 \text{ Нс.}$$

III. Аналитическая механика

ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Задание Д-13. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы

Схемы механизмов, находящихся под действием взаимно уравновешивающихся сил, показаны на рис. 185—187, а необходимые для решения данные приведены в табл. 54.

Применяя принцип возможных перемещений и пренебрегая силами сопротивления, определить величину, указанную в предпоследней графе табл. 54.

Примечание. Механизмы в вариантах 3, 6, 10, 14, 16, 18, 19, 25 и 30 расположены в вертикальной плоскости, а остальные — в горизонтальной.

Пример выполнения задания. Дано: $Q = 100 \text{ Н}$; $c = 5 \text{ Н/см}$; $r_1 = 20$; $r_2 = 40$; $r_3 = 10 \text{ см}$; $OA = l = 50 \text{ см}$; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 90^\circ$ (рис. 188).

Определить деформацию h пружины, пренебрегая весом звеньев OA и AB .

Решение. Рассматриваемый механизм (рис. 188) находится под действием следующей системы взаимно уравновешивающихся сил: силы упругости \bar{F} , сил тяжести \bar{G}_1 — вала 1 с шестерней 2, \bar{G}_3 — шестерни 3, \bar{G}_4 — ползуна B , \bar{Q} — груза и реакций опор.

Связи, наложенные на механизм, допускают следующие возможные перемещения его звеньев: поворот вала 1 с шестерней 2 на угол $\delta\varphi_1$; поворот шестерни 3 на угол $\delta\varphi_3$ и поступательное перемещение груза по вертикали на δs_Q . Ползун B может иметь перемещение δs_B (перемещение по горизонтали), а точка A — перемещение δs_A (отрезок δs_A перпендикулярен к OA). Уравнение работ, выраждающее принцип возможных перемещений, получает вид

$$Q\delta s_Q - F\delta s_B = 0. \quad (1)$$

Найдем зависимость между возможными перемещениями точек системы. Поскольку нить, к которой привязан груз Q , нерастяжима и скольжение между нитью и валом 1 отсутствует, перемещение груза Q равно перемещению точки обода колеса 2. Поэтому угол поворота вала 1 и шестерни 2

$$\delta\varphi_1 = \delta s_Q/r_1.$$

Перемещение точки K обода колеса 2

$$\delta s_1 = r_2 \delta\varphi_1 = (r_2/r_1) \cdot \delta s_Q.$$

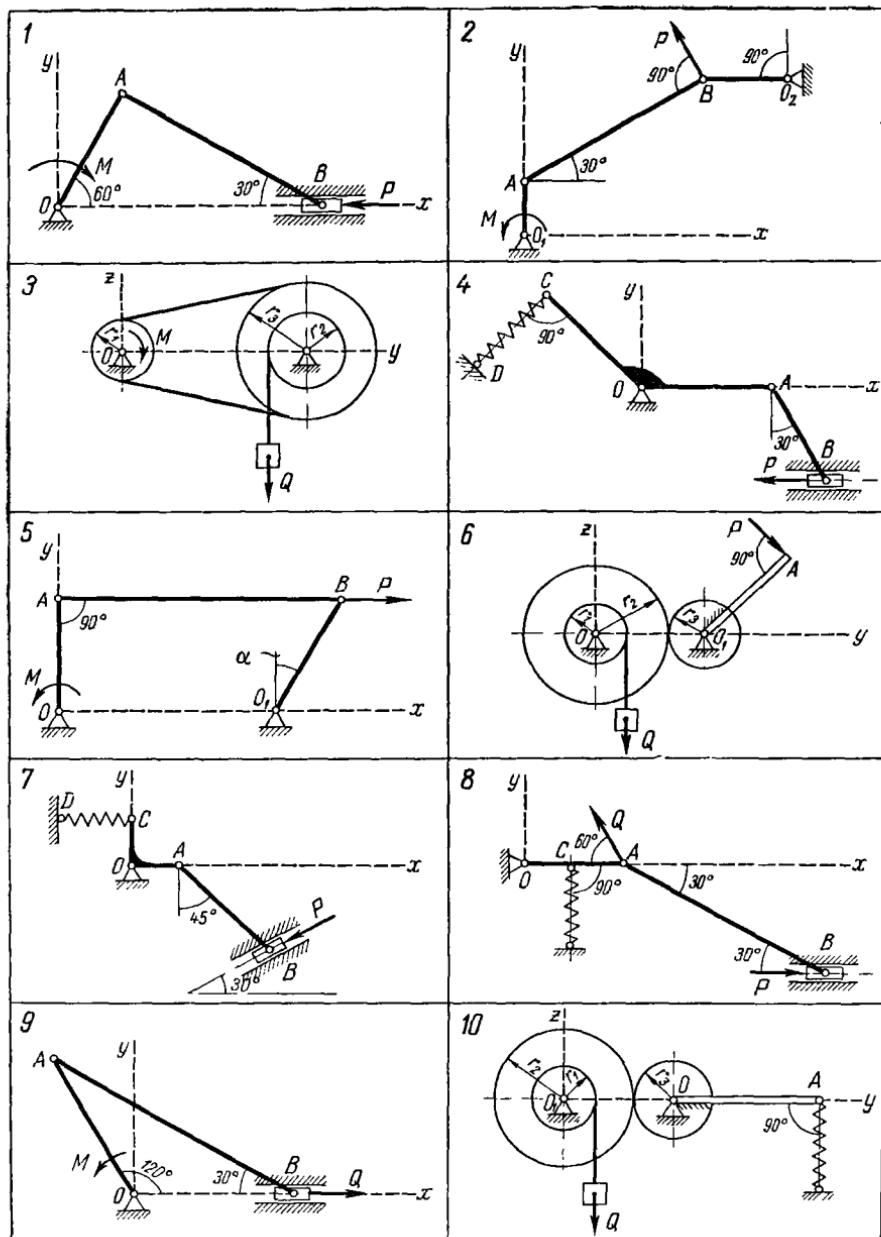


Рис 185

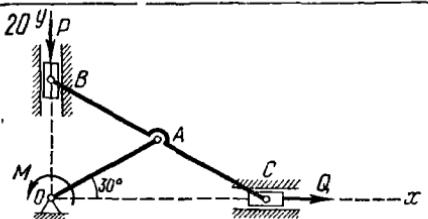
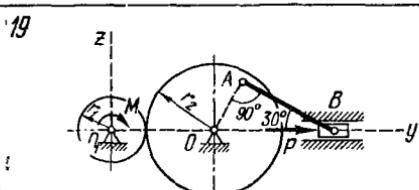
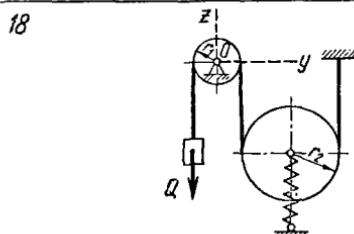
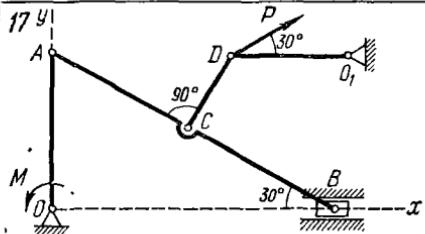
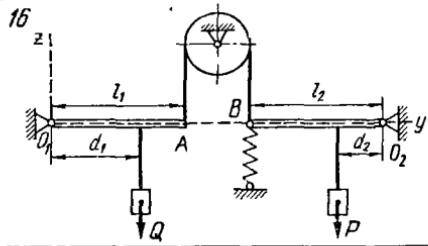
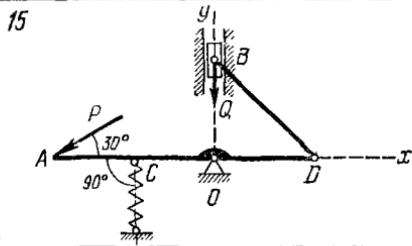
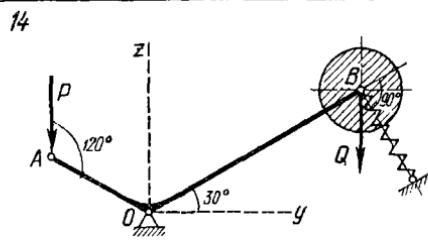
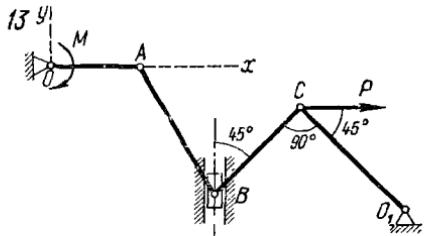
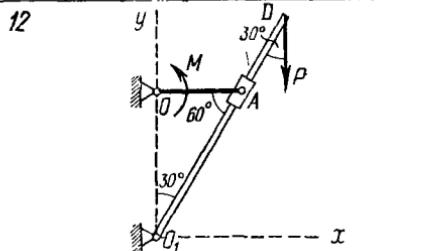
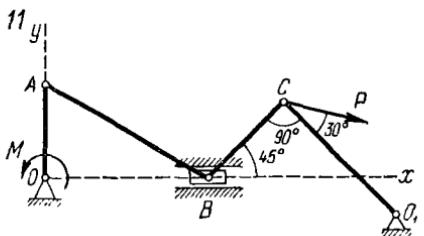


Рис. 186

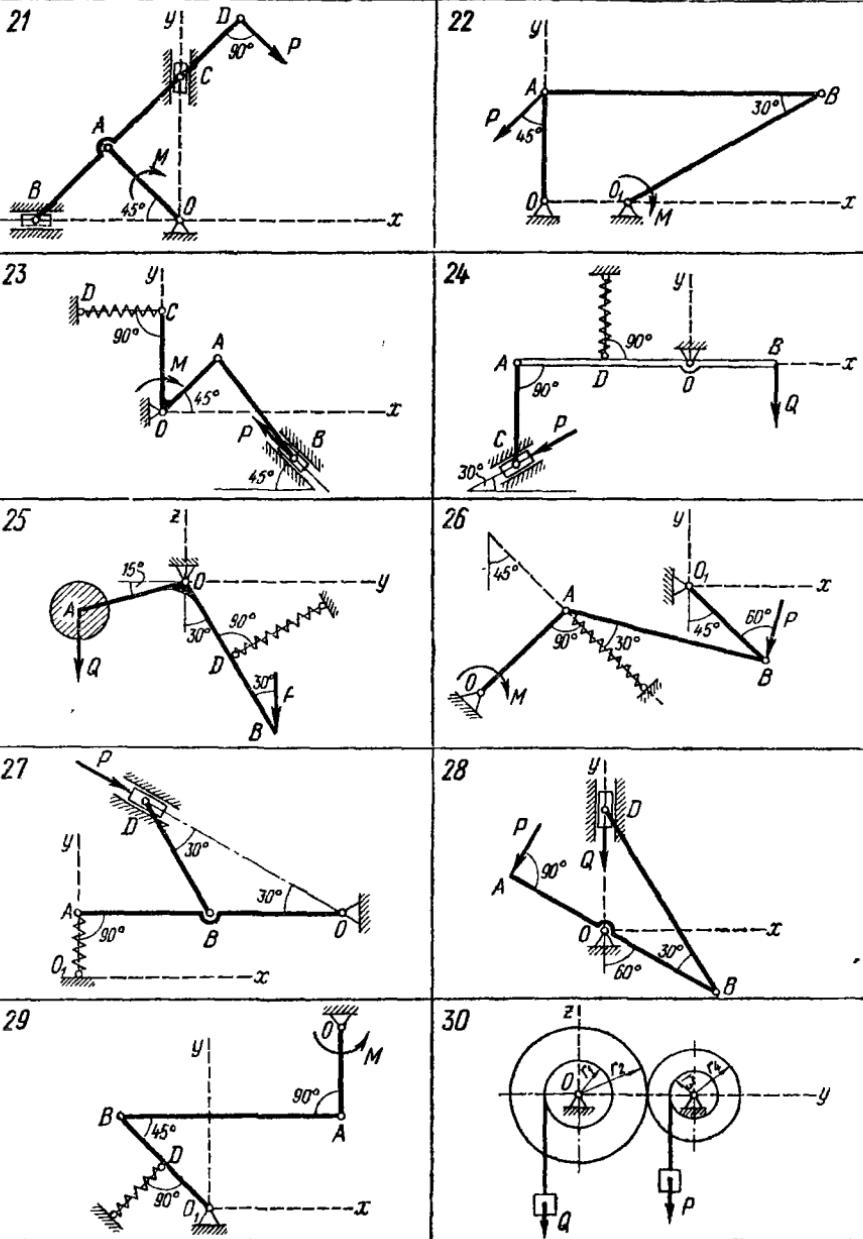


Рис. 187

Таблица 54

Номер пары (рис. 185—187)	Данные размеры	Силы Н,		Момент пары сил M , Нм	Коэффициент жесткости c , Н/см	Деформации пружины h , см	Величины, подлежащие определению	Примечания
		Q	P					
1	$OA = 10 \text{ см}$	—	—	20	—	—	P	
2	$O_1A = 20 \text{ см}$	—	100	—	—	—	M	
3	$r_1 = 20 \text{ см}, r_2 = 30 \text{ см}, r_3 = 40 \text{ см}$	—	—	100	—	—	Q	
4	$OC : OA = 4 : 5$	—	200	—	—	4	c	
5	$OA = 100 \text{ см}$	—	—	10	—	—	P	
6	$r_1 = 15 \text{ см}, r_2 = 50 \text{ см}, r_3 = 20 \text{ см}, O_1A = 80 \text{ см}$	200	—	—	—	—		Вес рукоятки O_1A не учитывать
7	$OC = OA$	—	—	—	—	10	3	P
8	$OC = AC$	—	200	—	—	10	2	Q
9	$OA = 20 \text{ см}$	200	—	—	—	—	M	
10	$r_1 = 15 \text{ см}, r_2 = 40 \text{ см}, r_3 = 20 \text{ см}, O_1A = 100 \text{ см}$	$2 \cdot 10^3$	—	—	—	4	c	Вес рукоятки OA не учитывать
11	$OA = 20 \text{ см}$	—	—	—	—	—	P	
12	$O_1D = 60 \text{ см}, AO = 20 \text{ см}$	—	—	300	—	—	P	
13	$OA = 40 \text{ см}$	—	—	100	—	—	P	
14	$OB = 2 OA$	20	—	200	—	—	P	
				—	—	25	3	
						—		Вес стержней OA и OB не учитывать; пружина растянута

15	$AC = OC = OD$	$3 \cdot 10^3$	—	—	250	3	P	Пружина сжата
16	$d_1 = 80 \text{ см}, d_2 = 25 \text{ см},$ $l_1 = 100 \text{ см}, l_2 = 75 \text{ см}$	$5 \cdot 10^3$	—	—	100	4	P	Вес стержней O_1A и O_2B не учитывать
17	$OA = 20 \text{ см}$	—	—	—	—	—	P	Пружина растянута
18	—	200	200	—	100	—	P	P — вес блока радиусом r_2
19	$r_1 = 20 \text{ см}, OA = 25 \text{ см}$ $r_2 = 30 \text{ см}, OA = 50 \text{ см}$	—	—	100	—	—	P	Вес звена AB не учитывать
20	$OA = AB = AC = 50 \text{ см}$	50	100	—	—	—	M	—
21	$OA = AB = AC =$ $= DC = 25 \text{ см}$	—	200	—	—	—	M	—
22	$OA = 40 \text{ см}$	—	—	400	—	—	P	—
23	$OC = 2OA = 100 \text{ см}$	—	200	50	50	—	h	—
24	$AD = OD = OB$	—	250	—	150	2,5	Q	Пружина сжата
25	$OD = DB = 0,8 AO$	400	—	—	120	3	P	Вес стержней AO и BO не учитывать. Пружина растянута
26	$OA = 25 \text{ см}$	—	500	120	—	2	c	Пружина растянута
27	$OB = AB$	—	—	—	180	2	P	—
28	$OB = (5/4) OA$	—	450	—	—	—	Q	—
29	$AO = 30 \text{ см}, BD = O_1D$	—	—	120	100	—	h	—
30	$r_1 = 15 \text{ см}; r_2 = 36 \text{ см};$ $r_3 = 10 \text{ см}; r_4 = 20 \text{ см}$	—	600	—	—	—	Q	—

Так как скольжение между шестернями 2 и 3 отсутствует, то возможные перемещения точек касания этих шестерен равны и угол поворота шестерни 3

$$\delta\varphi_3 = \delta s_1/r_3 = (r_2/r_1 r_3) \cdot \delta s_Q.$$

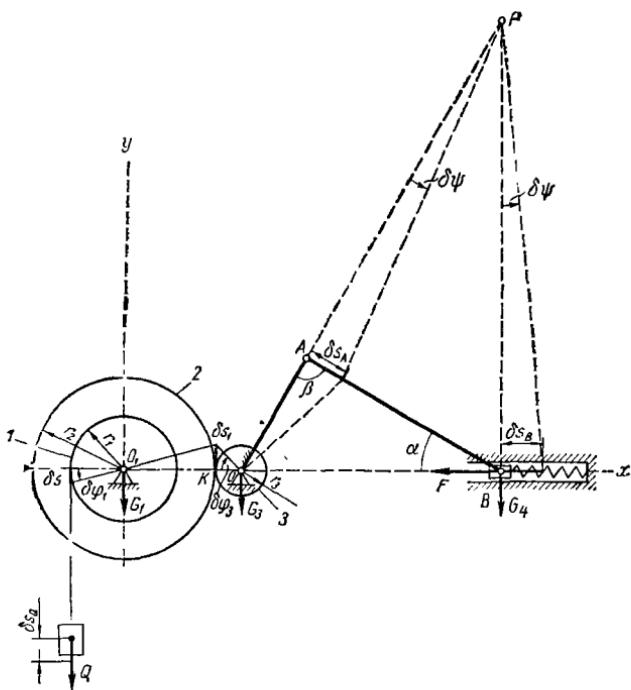


Рис. 188

Перемещение точки A кривошипа, жестко соединенного с колесом 3

$$\delta s_A = OA\delta\varphi_3 = (r_2/l/r_1 r_3) \cdot \delta s_Q.$$

Для определения зависимости между возможными перемещениями δs_A и δs_B найдем положение мгновенного центра вращения звена AB — точки P .

Тогда

$$\delta s_B/\delta s_A = PB/PA,$$

откуда

$$\delta s_B = (PB/PA) \cdot \delta s_A.$$

Из треугольника APB

$$PB/PA = 1/\cos 30^\circ.$$

Теперь

$$\delta s_B = (r_2/l/r_1 r_3 \cos 30^\circ) \cdot \delta s_Q.$$

Сила упругости пружины пропорциональна ее деформации $F = ch$. Подставив в уравнение работ (1) выражения силы упругости и возможных перемещений точек системы, получим

$$Q\delta s_Q - ch \cdot (r_2 l / r_1 r_3 \cos 30^\circ) \cdot \delta s_Q = 0;$$

откуда

$$h = \frac{Q}{c} \frac{r_1 r_3 \cos 30^\circ}{r_2 l} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,87}{5 \cdot 40 \cdot 50} = 1,74 \text{ см.}$$

Следовательно, пружина сжата на 1,74 см.

Задание Д-14. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции

Применяя принцип возможных перемещений, определить реакции опор составной конструкции.

Схемы конструкций показаны на рис. 189—191, а необходимые для решения данные приведены в табл. 55. На рисунках все размеры указаны в метрах.

Таблица 55

Номер варианта (рис. 189—191)	Нагрузка				Номер варианта (рис. 189—191)	Нагрузка			
	P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кНм		P_1 , кН	P_2 , кН	q , кН/м	M , кНм
1	15	14	3	10	16	3	10	2	10
2	13	12	2	6	17	1	8	1	8
3	11	10	1	5	18	3	6	3	6
4	9	8	3	14	19	5	4	2	7
5	7	6	2	12	20	7	2	1	5
6	8	5	1	4	21	10	9	2	4
7	7	4	2	10	22	8	7	1	7
8	6	6	1	7	23	6	5	2	8
9	5	8	3	8	24	4	3	1	3
10	4	10	2	6	25	2	1	2	2
11	12	11	1	12	26	7	1	2	7
12	10	6	2	10	27	6	2	1	5
13	9	5	1	6	28	5	3	2	10
14	7	10	2	13	29	4	4	1	5
15	6	8	1	5	30	3	5	2	10

Пример выполнения задания. Дано: составная рама (рис. 192); $P_1 = 2$; $P_2 = 4$ кН; $M = 5$ кНм; $q = 1,5$ кН/м.

Определить реакции опор рамы.

Решение. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = q \cdot 4 = 1,5 \cdot 4 = 6$ кН, приложенной в середине загруженного участка.

Найдем реакцию подвижной опоры A , для чего мысленно отбросим эту связь, заменив ее действие реакцией (рис. 193).

Возможным перемещением левой части рамы является ее поворот вокруг шарнира C на угол $\delta\varphi$, например, против вращения часовой стрелки; правая часть рамы останется неподвижной.

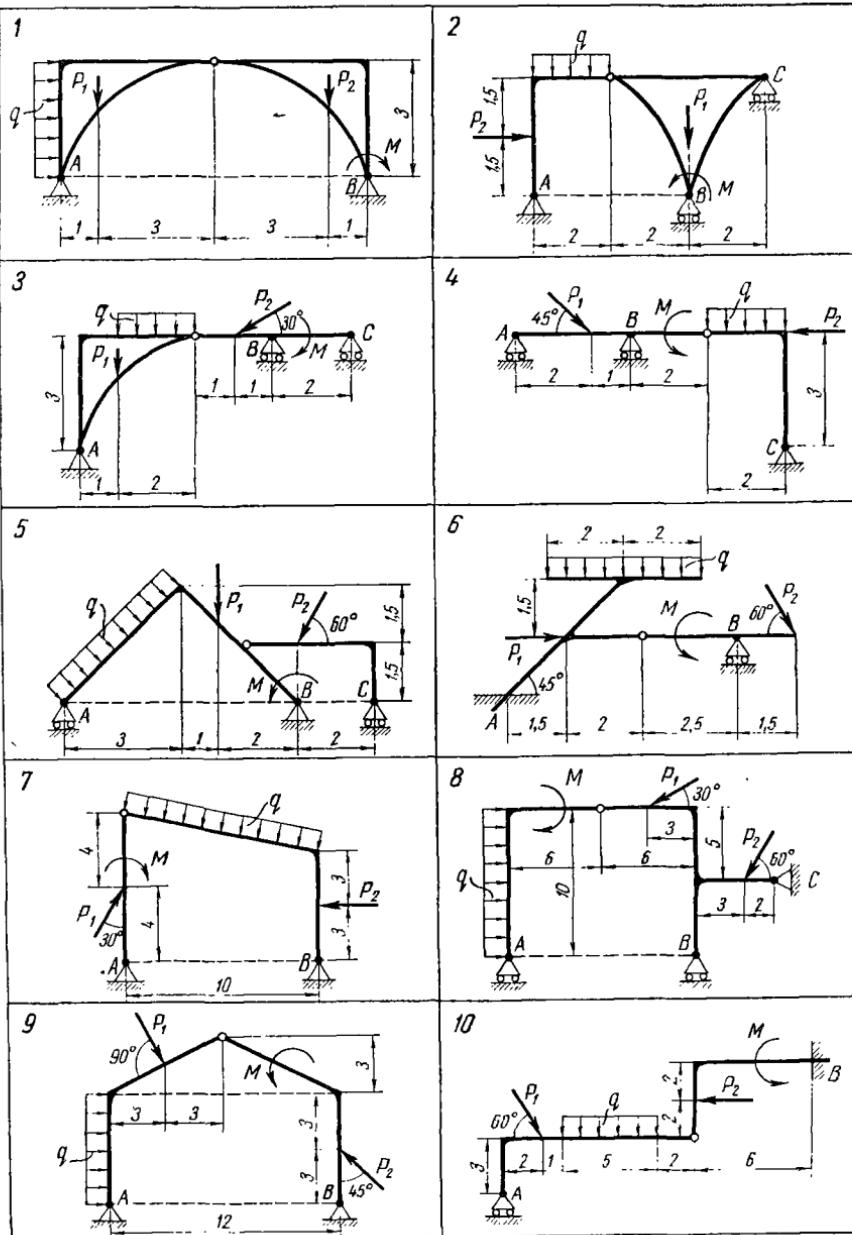


FIG. 189

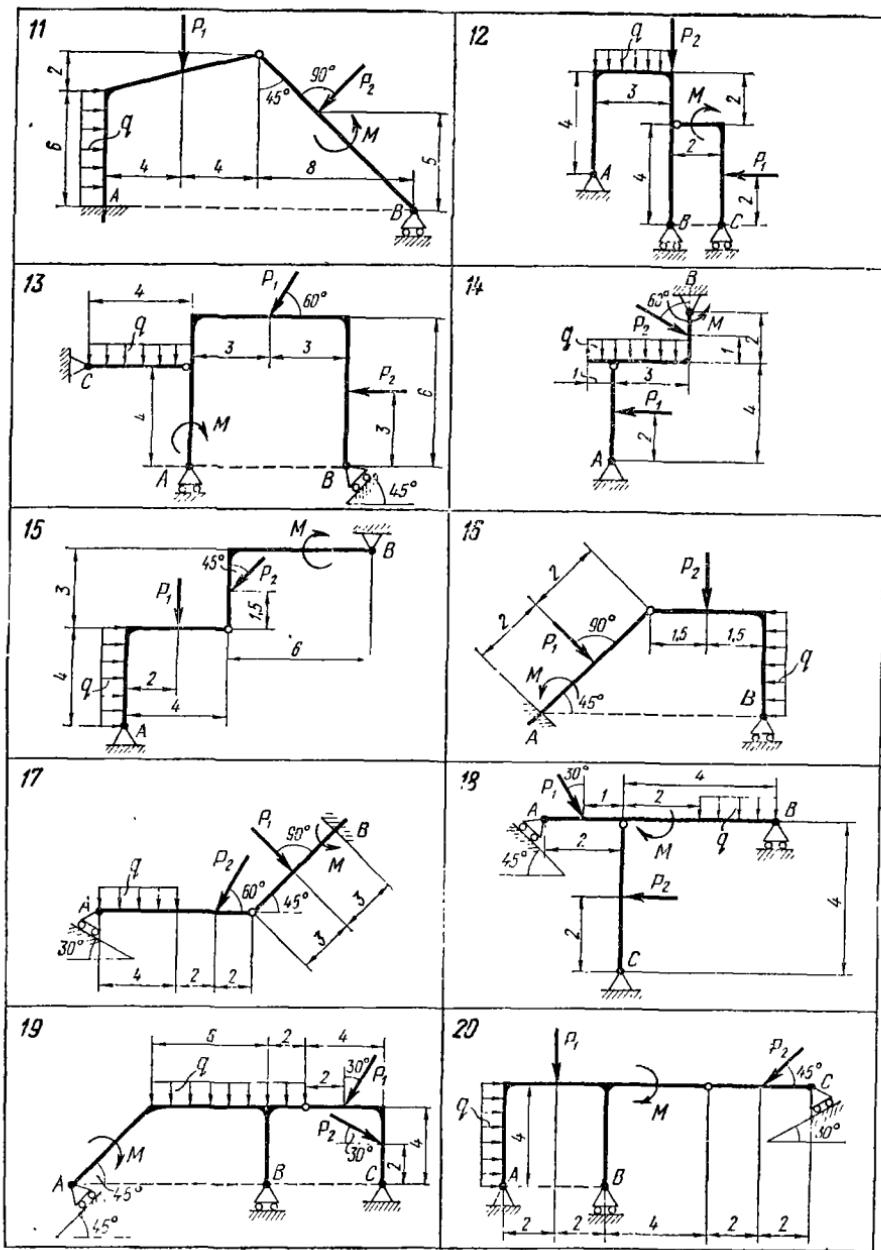
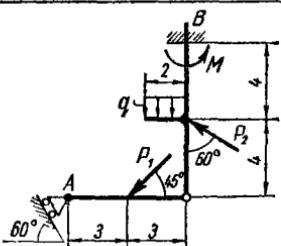
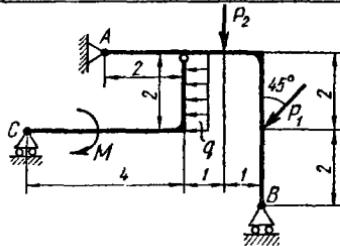


Рис. 190

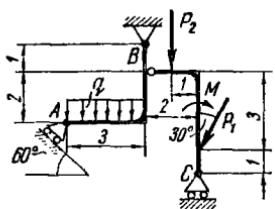
21



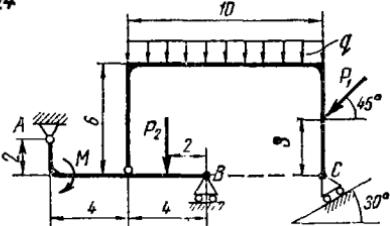
22



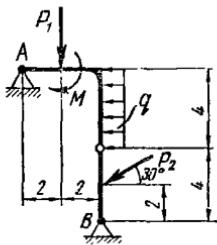
23



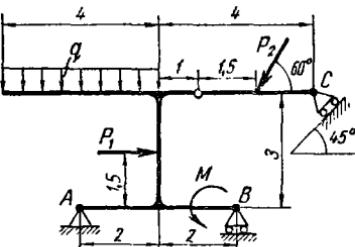
24



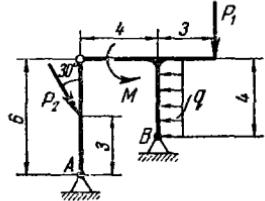
25



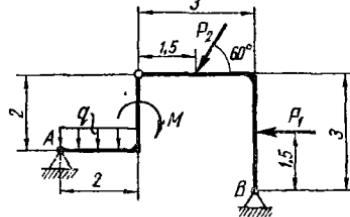
26



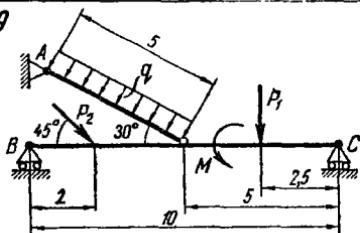
27



28



29



30

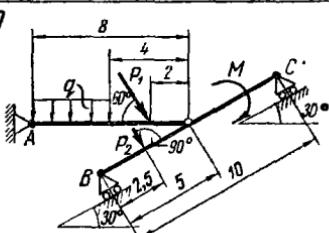


Рис. 191

Составим уравнение работ, выражающих принцип возможных перемещений, при этом учтем, что работа силы при повороте тела равна произведению момента силы относительно центра вращения на угол поворота тела:

$$Q \cdot 2\delta\varphi + M\delta\varphi - R_A \cdot 4\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$R_A = (Q \cdot 2 + M)/4 = (6 \cdot 2 + 5)/4 = 4,25 \text{ кН}.$$

Переходим к определению реакции заделки B . Сначала найдем реактивный момент M_B . Для этого отбросим связь, препятствующую

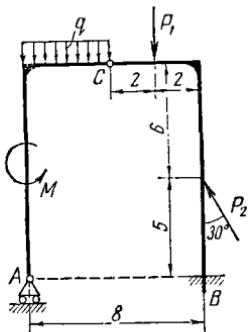


Рис. 192

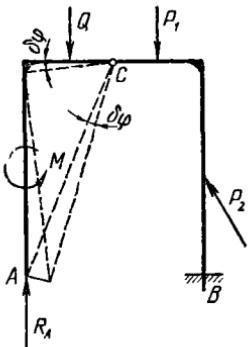


Рис. 193

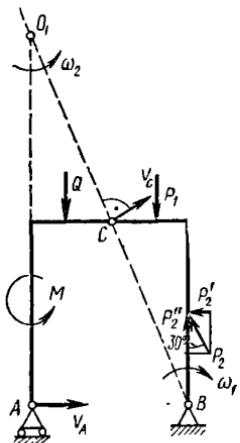


Рис. 194

повороту балки, заменив заделку шарнирной неподвижной опорой и приложив искомый момент M_B (рис. 194).

Воспользуемся принципом возможных скоростей, согласно которому

$$\sum \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i = 0,$$

где v_i — возможные скорости.

Сообщим системе возможные скорости: правая часть рамы может поворачиваться вокруг шарнира B с некоторой угловой скоростью ω_1 , а левая будет совершать плоское движение. Найдем мгновенный центр скоростей левой части рамы как пересечение перпендикуляров к возможным скоростям точек A и C . Угловые скорости обеих частей рамы связаны соотношением:

$$\omega_2 O_1 C = v_C = \omega_1 C B.$$

Так как $O_1 C = C B$, то

$$\omega_2 = \omega_1 = \omega.$$

Составим уравнение возможных мощностей:

$$M\omega - Q2\omega - P_12\omega - P_2'5\omega - M_B\omega = 0,$$

где

$$P'_2 = P_2 \sin 30^\circ,$$

и определим

$$\begin{aligned} M_B &= M - Q \cdot 2 - P_1 \cdot 2 - P_2 \cdot 0,5 \cdot 5 = \\ &= 5 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 5 = -21 \text{ кНм.} \end{aligned}$$

Для определения вертикальной составляющей \bar{Y}_B реакции заделки отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки B , заменив заделку ползуном B в вертикальных направляющих, жестко скрепленным с рамой BC , и приложив реакцию \bar{Y}_B (рис. 195).

Сообщим системе возможные скорости: правая часть рамы переместится поступательно с некоторой скоростью v , направленной,

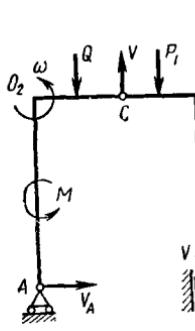


Рис. 195

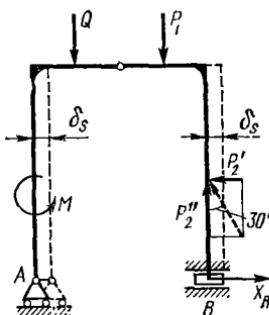


Рис. 196

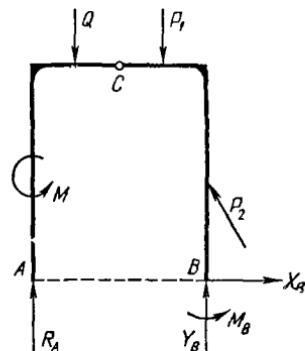


Рис. 197

например, вверх. Поступательное движение правой части является единственным возможным, ибо поворот ползуна B в направляющих невозможен.

Левая часть рамы будет совершать плоское движение. Мгновенный центр скоростей O_2 этой части лежит на пересечении перпендикуляров к возможным скоростям точек C и A .

Составим уравнение мощностей:

$$M\omega - Q2\omega - P_1v + P_2''v + Y_Bv = 0,$$

где $P_2'' = P \cos 30^\circ$.

Зависимость между ω и v устанавливается из соотношения

$$4\omega = v_C = v.$$

Следовательно,

$$M\omega - Q2\omega - P_14\omega + P_2 \cdot 0,87 \cdot 4\omega + Y_B4\omega = 0,$$

откуда

$$Y_B = (-M + Q \cdot 2 + P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 0,87 \cdot 4)/4 = 0,29 \text{ кН.}$$

Для определения горизонтальной составляющей \bar{X}_B реакции заделки представим опору в виде ползуна B в горизонтальных направ-

ляющих, жестко скрепленного с рамой BC , и приложим реакцию \bar{X}_B (рис. 196).

Возможное перемещение в этом случае — поступательное перемещение всей рамы, например, вправо на величину δs (поворот ползуна в направляющих невозможен).

Составим уравнение работ:

$$-P_2 \cos 60^\circ \delta s + X_B \delta s = 0,$$

откуда

$$X_B = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН}.$$

Произведем теперь проверку правильности решения задачи.

Убедимся, что найденные числовые значения величин удовлетворяют уравнениям равновесия сил для всей рамы (рис. 197)

$$\sum Y_i = 0 \text{ и } \sum M_{iB} = 0.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= R_A - Q - P_1 + P_2 \cos 30^\circ + Y_B = \\ &= 4,25 - 6 - 2 + 4 \cdot 0,87 + 0,29 = 8,02 - 8,00 \approx 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_{iB} &= -R_A \cdot 8 + M + Q \cdot 6 + P_1 \cdot 2 + P_2 \cos 60^\circ \cdot 5 - M_R = \\ &= -4,25 \cdot 8 + 5 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 5 - 21 = 55 - 55 = 0. \end{aligned}$$

ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

Задание Д-15. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Определить реакции внешних связей механической системы:

- а) в произвольный момент времени — для вариантов 4, 5, 10, 12 — 18, 21 — 30 (рис. 198 — 200);
- б) в момент времени $t = t_1$ — для вариантов 1, 8, 9, 11, 20;
- в) в тот момент времени, когда угол поворота $\varphi = \varphi_1$ — для вариантов 2, 3, 6, 7;
- г) в положении, показанном на чертеже для вариантов 15 и 19.

На схемах (рис. 198 — 200) плоскость xOy (xAy) горизонтальна, плоскость yOz (yAz) вертикальна. Необходимые для решения данные приведены в табл. 56, в которой ω — угловая скорость, φ_0 и ω_0 — значения угла поворота и угловой скорости в начальный момент времени.

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 3$; $m_2 = 2$; $m_3 = 5$ кг; $l_1 = 30$; $l_2 = 20$ см; $\alpha = 30^\circ$; $\omega = 120 \text{ с}^{-1} = \text{const}$. Схема системы и необходимые размеры приведены на рис. 201, а.

Найти реакции подшипника A , подшипника B , а также пружины DN . Поперечными размерами стержней 1, 2 и 3 и массой пружины пренебречь.

Решение. Для определения реакций связей воспользуемся принципом Даламбера. Так как $\omega = \text{const}$, рассмотрим только центробежные силы инерции частиц каждого стержня. Известно, что главный вектор сил инерции точек врачающегося тела определяется

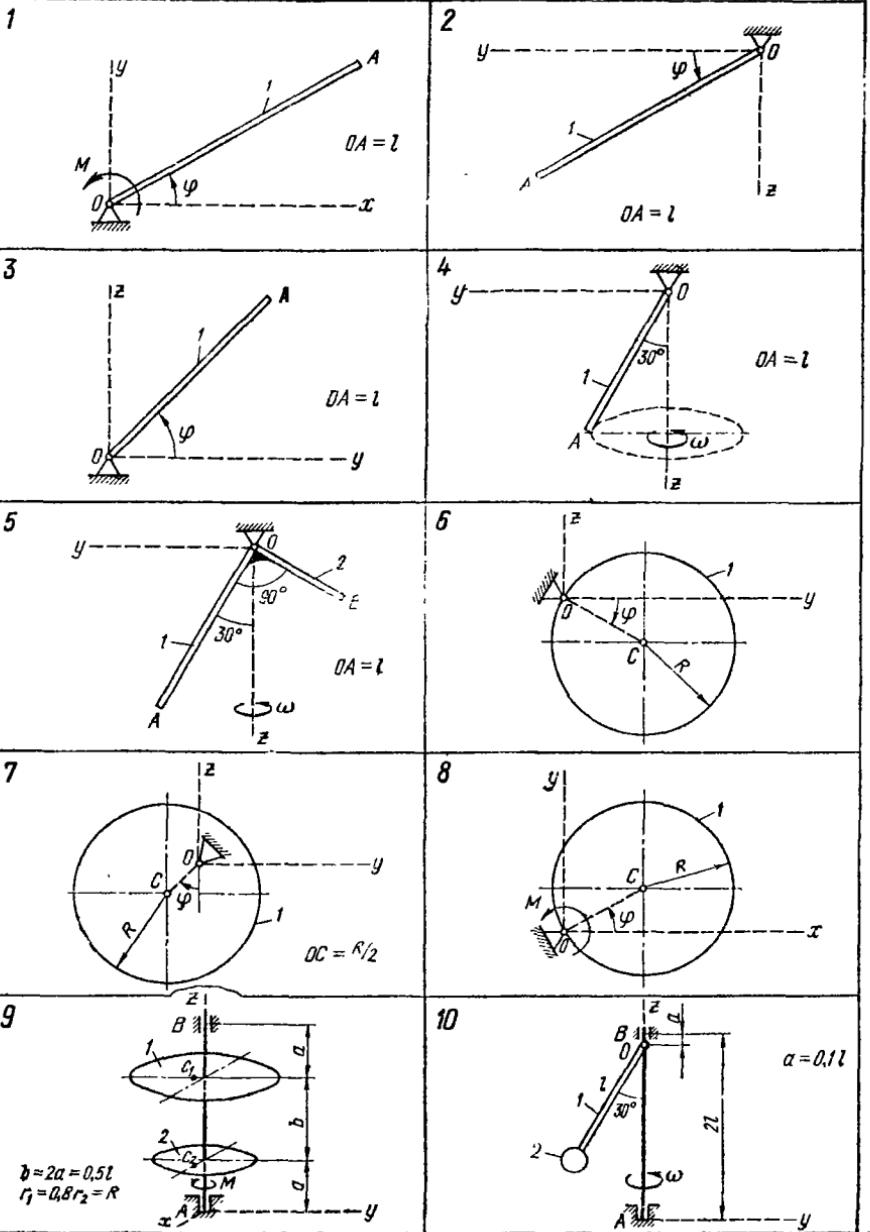


FIG. 198

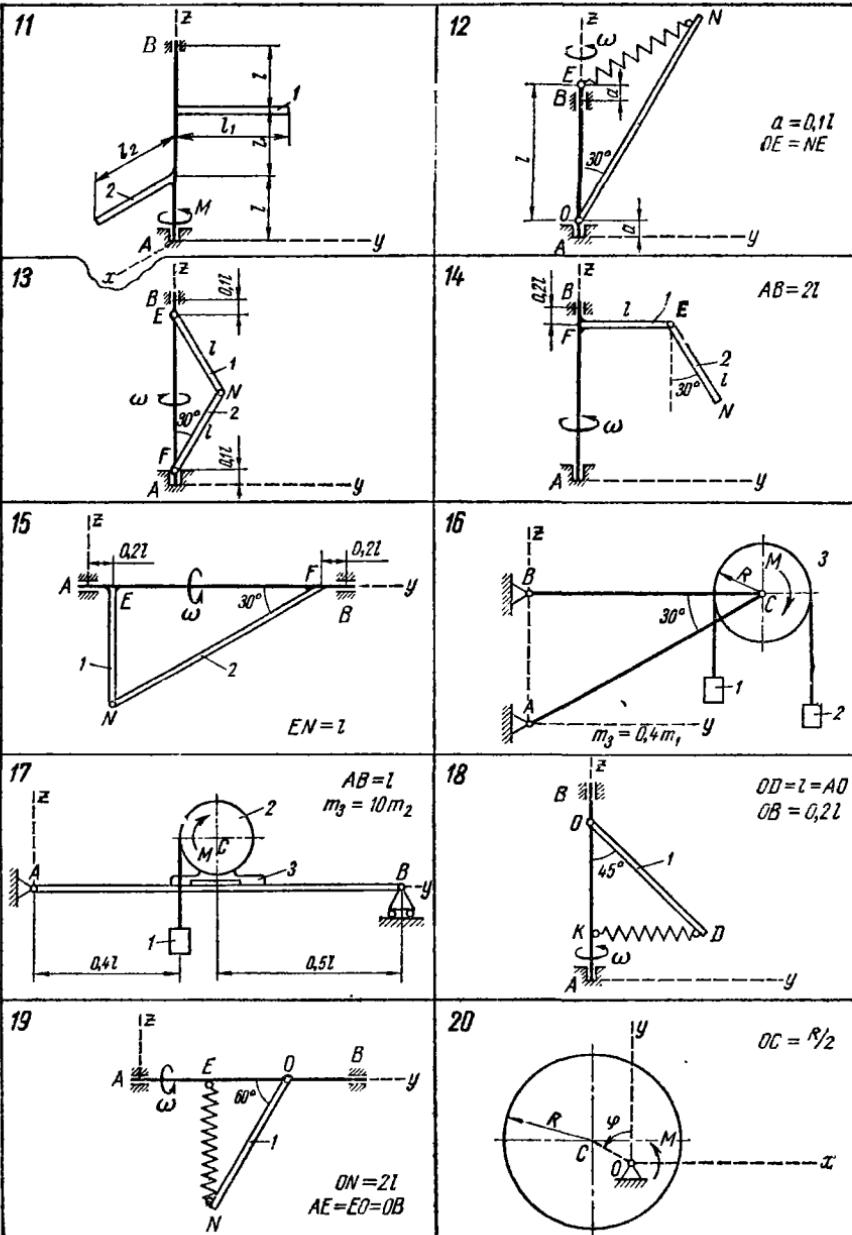


Рис. 199

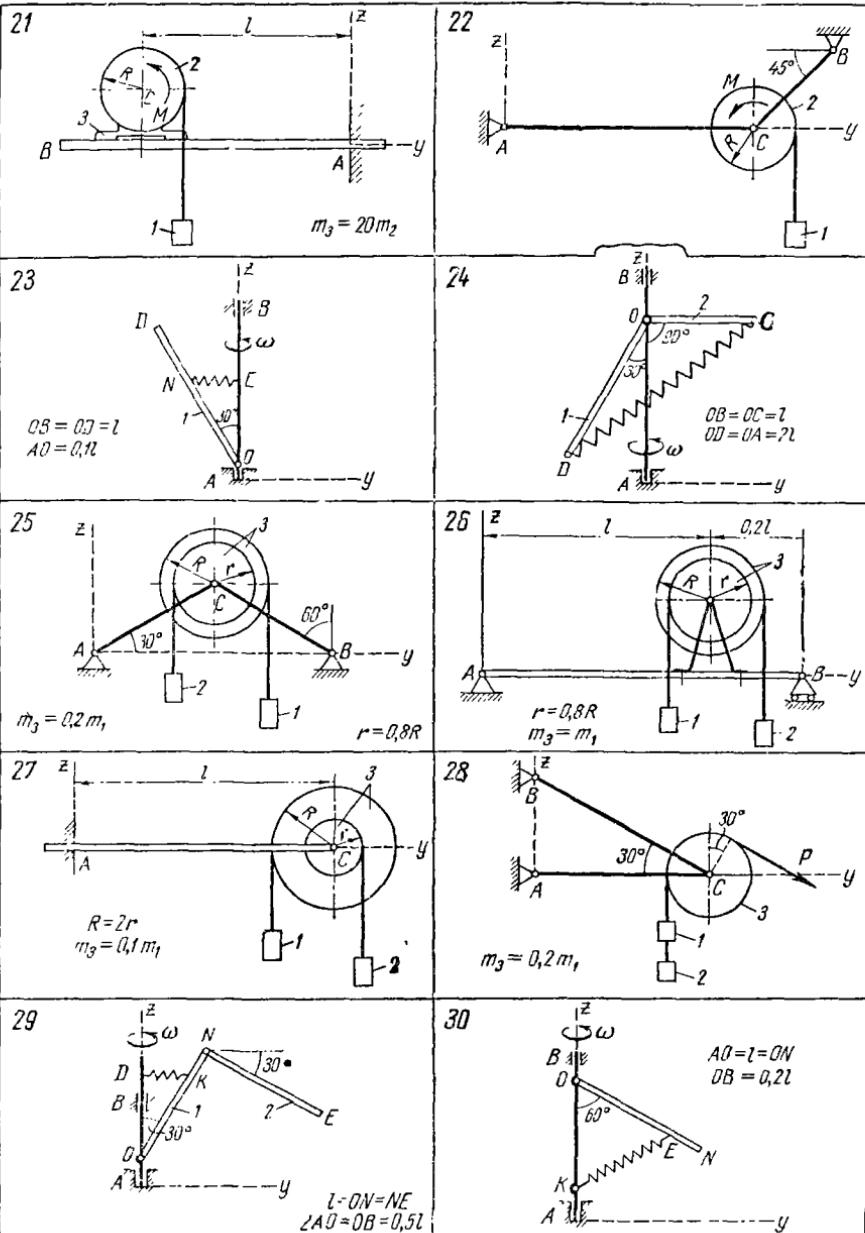


Рис. 200

по формуле

$$\vec{\Phi}^* = -m\vec{w}_C,$$

где m — масса тела, а \vec{w}_C — ускорение центра тяжести тела.

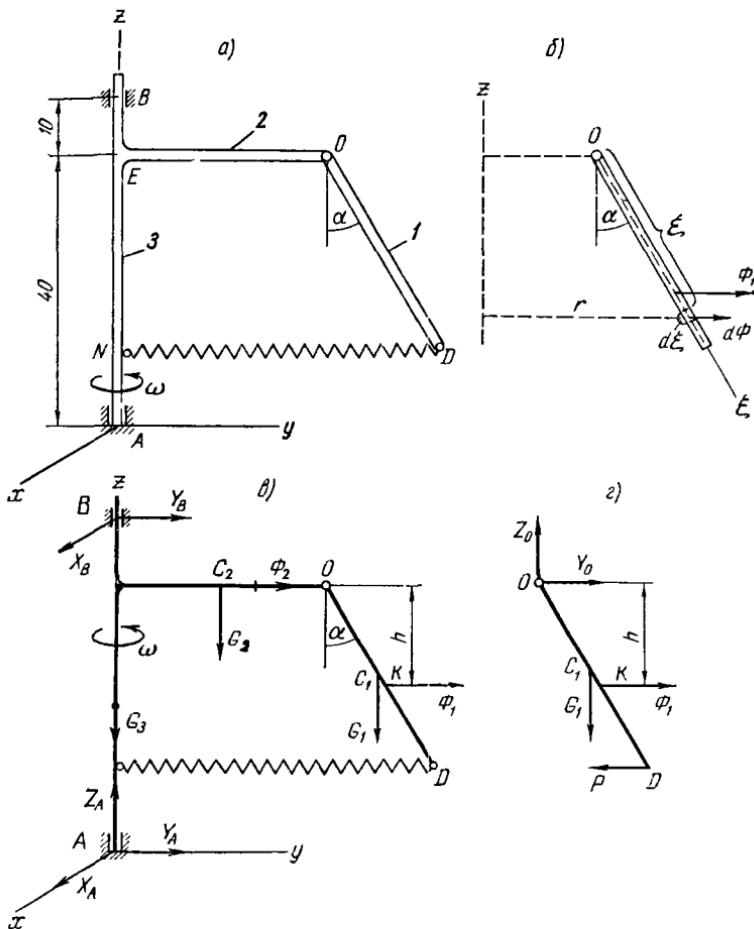


Рис. 201

Равнодействующая сил инерции точек тела равна их главному вектору. Поэтому для стержней *1* и *2*

$$\Phi_1 = m_1 w_{C_1} = m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2);$$

$$\Phi_2 = m_2 w_{C_2} = m_2 \omega^2 \cdot 0,5l_2.$$

Для определения реакций необходимо знать точку приложения силы $\vec{\Phi}_1$ (линия действия силы $\vec{\Phi}_2$ совпадает с осью стержня *2* и поэтому определена). Так как сумма моментов параллельных сил

Таблица 56

Номер варианта (рис. 198—200)	m_1	m_2	l	R см	M , H_u (Φ_{const}) с ⁻¹	t_1 , с	Φ_1 грд	Φ_0 с ⁻¹	Примечания
	кг	кг	см	см	(Φ_{const}) с ⁻¹	с	грд	с ⁻¹	
1	20	60	—	10	—	10	—	0	0
2	25	50	—	—	—	—	60	0	0
3	40	80	—	—	—	—	60	0	6,3
4	20	80	—	—	—	—	—	—	—
5	30	14,4	60	—	6	—	—	—	—
6	40	—	—	30	—	—	—	30	0
7	20	—	—	25	—	—	—	60	0
8	50	—	—	30	4,0	—	5	—	0
9	20	30	50	10	20..0,1t	—	200	—	0
10	20	5	25	—	—	—	—	—	—
11	25	40	30	—	5..0,1t	—	50	—	0
12	30	—	40	—	—	—	10	—	—
13	25	25	40	—	—	—	15	—	—
14	20	20	40	—	—	—	—	—	—

При $t=t_1$ координаты центров тяжести шкинов C_1 и C_2 , $x_{C_1}=0$, $y_{C_1}=0$, $x_{C_2}=a+b$, $y_{C_2}=0$, $t_1=40$ см;

При $t=t_1$ ось стержня 1 параллельна оси y , а ось стержня 2 параллельна оси x , $t_1=25$ см, $t_2=40$ см

15	20	45	20	—	—	8	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	80	20	—	10	65	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	100	10	150	—	—	160	—	—	—	—	—	—	—	—	—
18	30	—	40	—	—	—	12	—	—	—	—	—	—	—	—
19	40	—	60	—	—	—	9	—	—	4	—	—	0	2,0	—
20	40	—	—	—	—	30	3,0	—	—	—	—	—	—	—	—
21	80	10	120	15	124	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
22	100	40	—	—	20	216	—	—	—	—	—	—	—	—	—
23	30	—	60	—	—	—	9	—	—	—	—	—	—	—	—
24	60	20	50	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
25	50	70	—	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
26	80	200	150	25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
27	100	150	120	20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
28	80	40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
29	20	20	42	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
30	50	—	—	60	—	—	—	—	—	12	—	—	—	—	—

Приложения.

1. Тела, входящие в состав механической системы, для которых не указан радиус инерции, рассматривать как тонкие однородные стержни (варианты 1—5, 10, 11—15, 18, 19, 23, 24, 29, 30) или сплошные однородные диски (варианты 6—9, 16, 20, 22, 28); в варианте 10 тело 2 рассматривать как материальную точку.

2. На схемах 1, 8, 9, 11, 16, 17, 20—22 указаны величины моменты M .

инерции точек стержня относительно точки O равна моменту равнодействующей этих сил, то

$$\Phi_1 h = \int_0^{l_1} \xi \cos \alpha d\Phi,$$

где h — плечо силы $\vec{\Phi}_1$ относительно точки O ; $d\Phi$ — сила инерции элемента стержня длиной $d\xi$; ξ — координата элемента стержня (рис. 201 б).

Используя значение силы $\vec{\Phi}_1$ и учитывая, что

$$d\Phi = (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma d\xi,$$

где γ — масса участка стержня единичной длины, получаем

$$m_1 \omega^2 (0,5l_1 \sin \alpha + l_2) h = \int_0^{l_1} (l_2 + \xi \sin \alpha) \omega^2 \gamma \xi \cos \alpha d\xi,$$

откуда после интегрирования

$$h = \frac{l_1 (l_2 + (2/3) \cdot l_1 \sin \alpha) \cos \alpha}{l_1 \sin \alpha + 2l_2} = \frac{30 (20 + (2/3) \cdot 30 \cdot 0,5)}{30 \cdot 0,5 + 2 \cdot 20} \cos \alpha = 16,4 \cos \alpha.$$

Показываем составляющие реакций подпятника \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A и подшипника \vec{Y}_B , \vec{Y}_B силы тяжести стержней \vec{G}_1 , \vec{G}_2 , \vec{G}_3 и силы инерции $\vec{\Phi}_1$ и $\vec{\Phi}_2$ (рис. 201, в). Эти силы должны удовлетворять уравнениям, вытекающим из принципа Даламбера

$$\begin{aligned} \Sigma M_{tx} &= 0; -Y_B \cdot 50 - \Phi_2 \cdot 40 - G_2 \cdot 10 - G_1 \cdot 27,5 - \\ &- \Phi_1 (40 - 16,4 \cos \alpha) = 0 \Rightarrow Y_B = -8,47 \text{ кН}; \end{aligned}$$

$$\Sigma Y_t = 0; Y_A + Y_B + \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \Rightarrow Y_A = -6,28 \text{ кН};$$

$$\Sigma Z_t = 0; Z_D - G_1 - G_2 - G_3 = 0;$$

$$Z_D = 0,098 \text{ кН}.$$

Так как рассматриваемые силы расположены в плоскости yAz , то $X_B = X_A = 0$.

Для определения реакции пружины DN составим уравнение $\Sigma M_{t0} = 0$, рассматривая силы, приложенные к стержню I (рис. 201, г)

$$-G_1 \cdot (l_1/2) \cdot \sin \alpha + \Phi_1 h - Pl_1 \cos \alpha = 0,$$

откуда $P = 6,47$ кН.

Задание Д-16. Определение реакций опор при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси

Однородное тело D вращается вокруг неподвижной вертикальной оси z под действием пары сил, расположенной в горизонтальной плоскости. Масса тела — m , момент пары сил — M . Определить реакции подпятника A и подшипника B в момент времени $t = \tau$, считая, что в этот момент центр тяжести тела находится в плоскости yz , с которой совпадает плоскость материальной симметрии тела; положе-

жение центра тяжести тела задано координатами y_C и z_C . Начальная угловая скорость тела $\omega_0 = 0$. Массой стержней, связанных с телом D , пренебречь.

Варианты задания представлены на рис. 202 – 204, а необходимые данные приведены в табл. 57.

Пример выполнения задания. Тело D (однородный цилиндр, из которого вырезан конус) вращается вокруг неподвижной оси z (рис. 205).

Дано: $m = 32$ кг; $M = 60$ Нм; $r = 0,25$ м; $OO_1 = 0,5$ м; $h = 1$ м; $\gamma = 30^\circ$; $a = 1$ м; $b = 2$ м; $\tau = 2$ с. Стержень OO_1 совпадает с осью симметрии тела D . Массой стержней пренебречь. Найти R_A и R_B .

Решение. Показываем главные центральные оси инерции тела D : ξ , η и ζ , а также силу \vec{G} , момент M и составляющие реакции опор \vec{X}_A , \vec{Y}_A , \vec{Z}_A , \vec{X}_B , \vec{Y}_B (рис. 205).

Для решения задачи используем систему уравнений, вытекающую из принципа Даламбера.

$$\left. \begin{aligned} X_A + X_B + mx_C\omega^2 + my_C\varepsilon &= 0; \\ Y_A + Y_B + my_C\omega^2 - mx_C\varepsilon &= 0; \quad Z_A - G = 0; \\ -Y_B(a+b) - G \cdot OC \sin \gamma - J_{yz}\omega^2 + J_{zx}\varepsilon &= 0; \\ X_B(a+b) + J_{zx}\omega^2 + J_{yz}\varepsilon &= 0; \quad M - J_z\varepsilon = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для определения углового ускорения ε из последнего уравнения системы (1) найдем момент инерции тела D относительно оси вращения z по формуле:

$$J_z = J_{z1} + md^2, \quad (2)$$

где J_{z1} — момент инерции тела D относительно центральной оси C_{z1} , параллельной оси z ; d — расстояние между осями z и z_1 .

Воспользуемся формулой:

$$J_{z1} = J_\xi \cos^2 \alpha + J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma, \quad (3)$$

где α , β и γ — углы, составленные осью z_1 с осями ξ , η , ζ соответственно.

Так как $\alpha = 90^\circ$, то

$$J_{z1} = J_\eta \cos^2 \beta + J_\zeta \cos^2 \gamma. \quad (4)$$

Определим моменты инерции J_η и J_ζ как разности моментов инерции тела I (сплошного цилиндра) и тела II (конуса) (рис. 205):

$$J_\eta = J_\eta^I - J_\eta^{II}; \quad J_\zeta = J_\zeta^I - J_\zeta^{II}. \quad (5)$$

Зная массу тела D , равную m , определим массу тела I и тела II :

$$m_I = \rho \pi r^2 h, \quad m_{II} = (1/3) \cdot \rho \pi r^2 h,$$

где ρ — плотность тела; r — радиус основания цилиндра и конуса. Следовательно,

$$m_{II} = (1/3) \cdot m_I.$$

$$m = m_I - m_{II} = (2/3) \cdot m_I = 32 \text{ кг.}$$

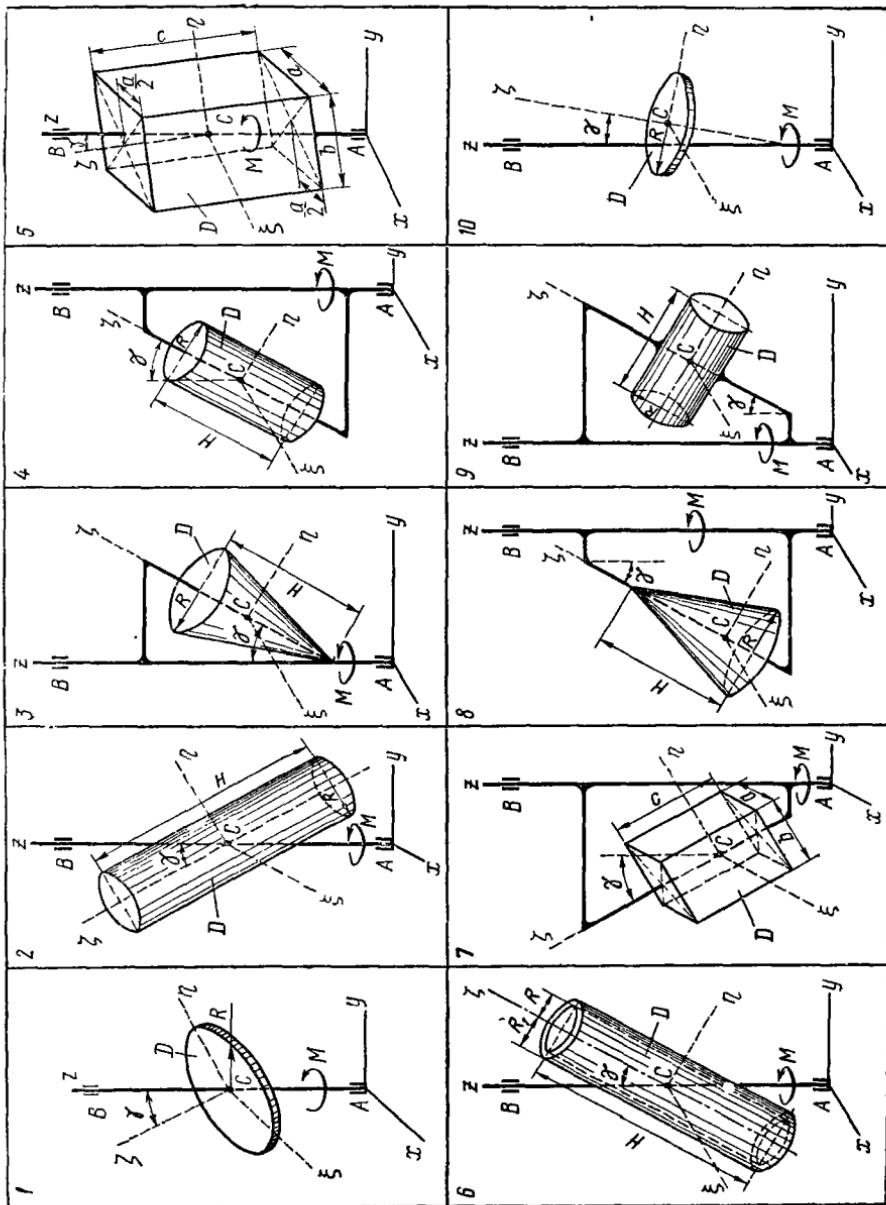
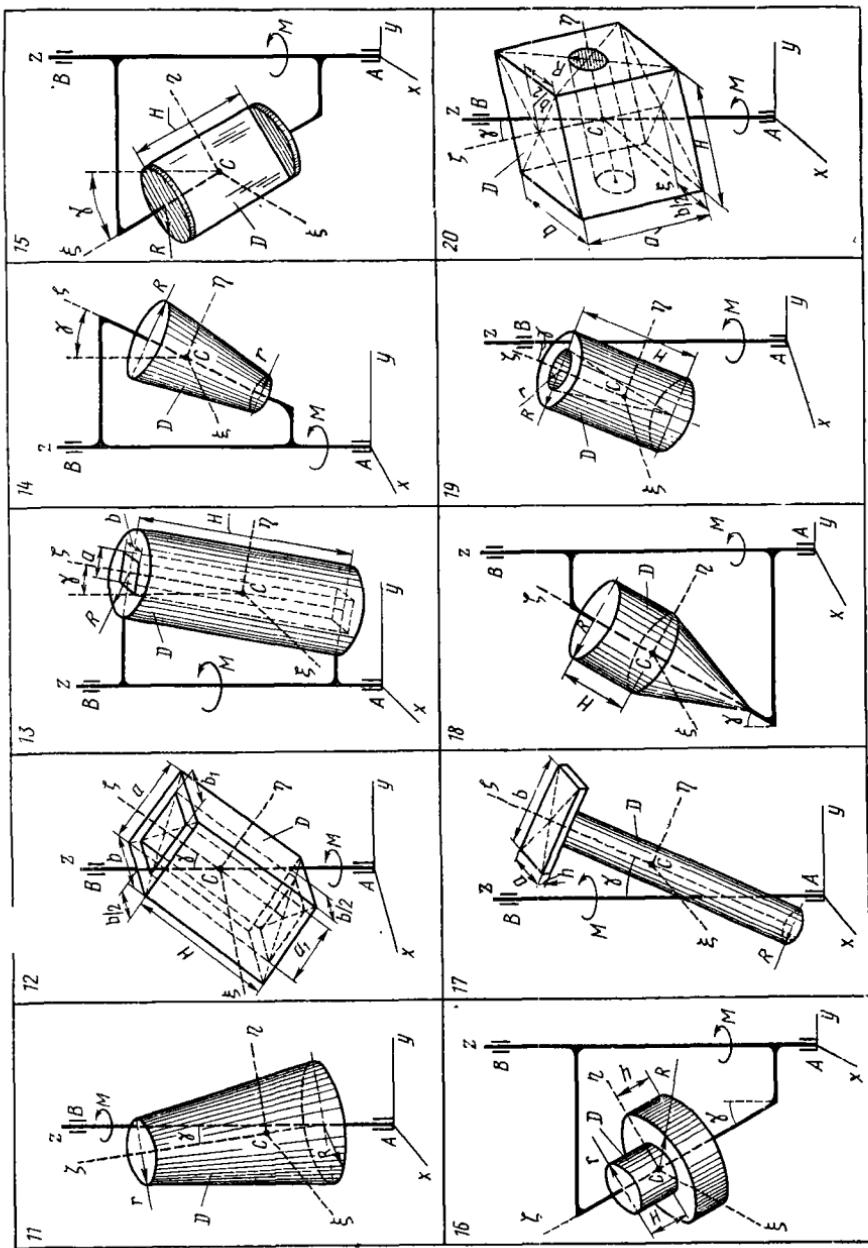


Рис. 203



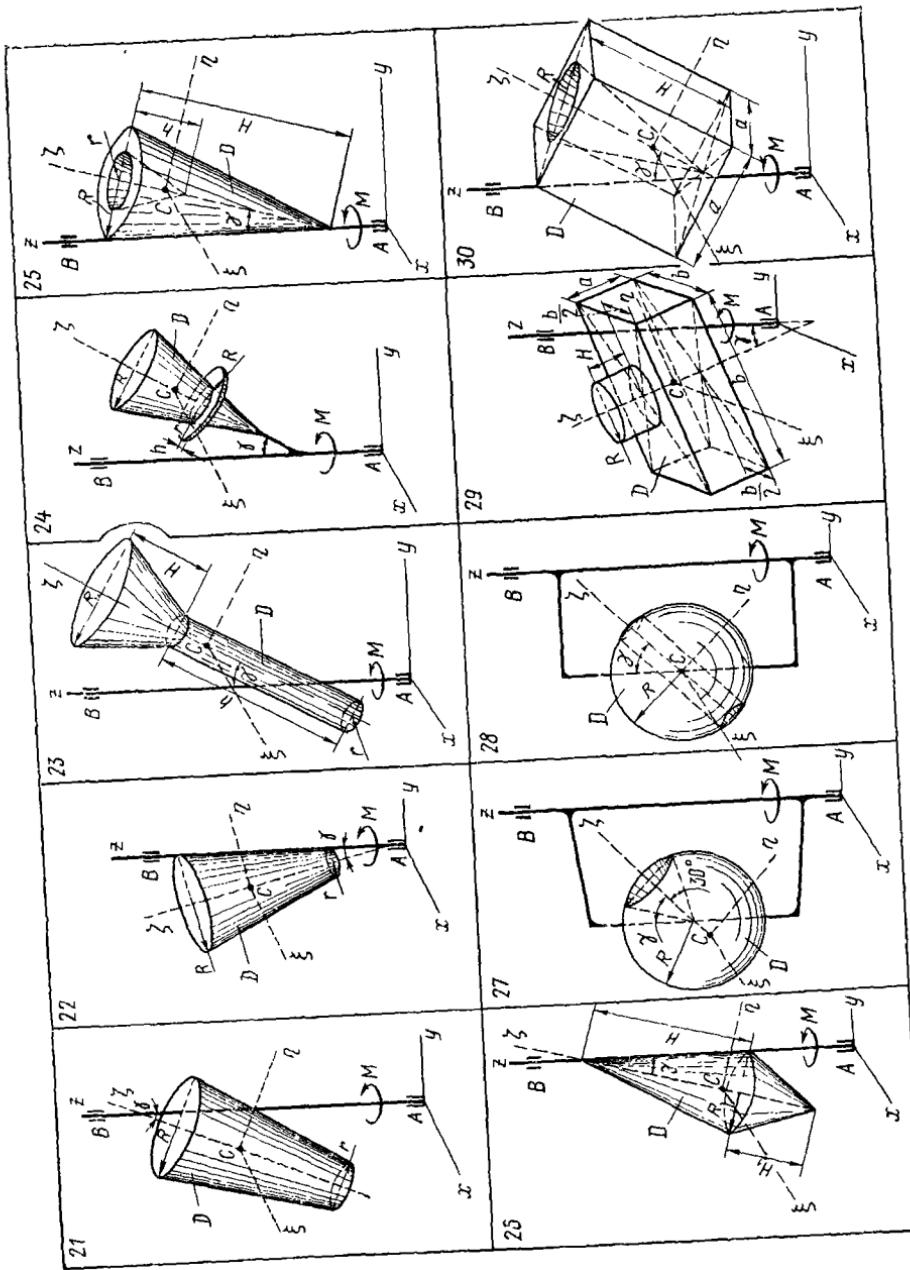


Fig. 23

Таблица 57

Дополнительные данные

Номер варианта	m , кг	M , Нм	y , град	y_C , см	z_C , см	AB , см	R , см	II , см	t , с	
1	40	30	20	0	60	120	25	—	2,0	Толщиной диска иренбергъ
2	120	50	30	0	70	140	20	60	2,5	
3	60	40	40	20	50	120	20	—	1,5	
4	80	50	25	—40	60	125	25	60	3,1	
5	60	45	20	0	50	110	—	—	2,0	$a=30; b=40; c=60$ см;
6	100	60	25	0	65	140	20	100	2,5	$R_1=25$ см.
7	80	40	20	—30	60	125	—	—	2,0	$a=25; b=30; c=50$ см
8	50	25	15	—40	50	115	20	50	3,0	
9	85	40	20	30	55	100	15	60	2,5	
10	60	20	30	15	40	90	30	—	3,5	
11	100	50	15	—2	25	125	24	—	3,0	$R=1,2r$
12	80	30	30	0	60	120	—	90	2,0	$a=30; a_1=24; b=20; b_1=16$ см
13	75	25	30	50	75	125	20	100	1,5	$a=b=5$ см
14	50	15	30	30	40	110	30	70	2,0	$R=2r$
15	60	10	20	—25	40	100	20	70	2,0	Пластинку между дисками считать тонкой однородной
16	100	20	15	—20	50	110	25	20	2,0	$R=2r; h=10$ см

Номер варианта	m , кг	M , Нм	γ , град	y_C , см	z_C , см	AB , см	R , см	H , см	τ , с	Дополнительные данные	
17	70	30	10	15	55	120	10	70	1,7	$a = b = 35$ см; $h = 5$ см	
18	50	10	15	-25	70	115	25	25	1,8		
19	50	20	30	-20	60	100	30	40	2,5	$r = 0,5R$	
20	70	15	20	0	40	100	7,5	25	1,8	$H = a = b = 25$ см	
21	40	20	30	-10	70	100	25	-	2,0	$R = 2r$	
22	50	15	20	-30	55	100	-	-	2,2	$r = 0,2R$	
23	70	15	30	50	-90	25	25	-	2,0	$r = 0,2R, h = 3H$	
24	40	5	30	25	70	100	20	25	3,5	$r = 0,6R$, принять $h = 0$	
25	100	15	15	-	45	90	25	-	3,2	$r = 0,5R, h = 0,4H$	
26	120	20	30	-	40	90	20	40	3,0	$H = 2H_1$	
27	80	15	45	-40	50	85	30	-	2,0	Пренебречь массой шарового сегмента, являющегося основанием конуса	
28	75	12	20	-40	60	140	30	-	2,5	$r = 0,2R$. Пренебречь массой шаровых сегментов, являющихся основаниями цилиндра	
29	70	10	30	-20	50	100	20	20	2,0	$a = 20; b = 50$ см	
30	50	7	30	-	60	80	10	40	2,5	$a = 30$ см; передняя грань параллелепипеда лежит в плоскости yz	

Отсюда

$$m_1 = (3/2) \cdot 32 = 48 \text{ кг}; \quad m_{II} = 48/3 = 16 \text{ кг.}$$

Для вычисления моментов инерции тела D необходимо знать положение его центра тяжести — расстояние от точки O_1 . (Во всех

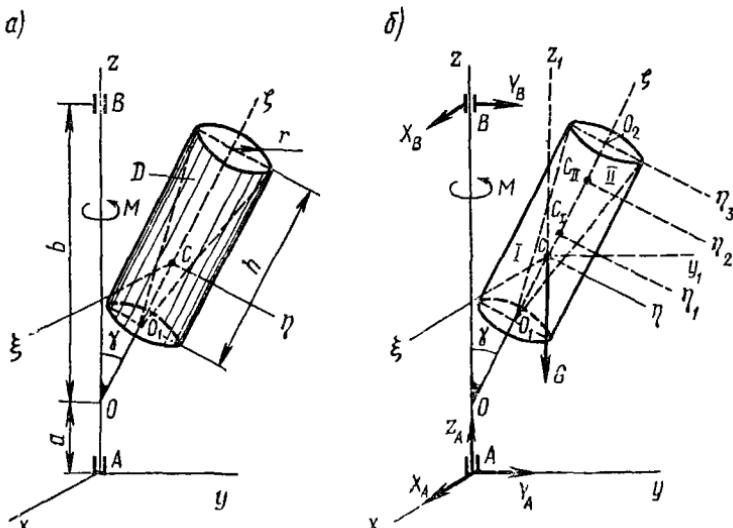


Рис. 205

вариантах координаты центра тяжести заданы, а определению подлежат другие величины, необходимые при решении задачи.)

Это расстояние

$$O_1 C = (m_1 O_1 C_1 - m_{II} O_1 C_{II}) / (m_1 - m_{II}),$$

где

$$O_1 C_1 = (1/2) \cdot h = 1/2 \text{ м}; \quad O_1 C_{II} = (3/4) \cdot h = 3/4 \text{ м.}$$

Следовательно,

$$O_1 C = \frac{48 \cdot 1/2 - 16 \cdot 3/4}{48 - 16} = \frac{3}{8} \text{ м.}$$

Момент инерции цилиндра относительно оси C_{η} :

$$J_{\eta}^I = J_{\eta I}^I + m_1 (C_1 C)^2, \quad (6)$$

где $J_{\eta I}^I = m_1 (r^2/4 + h^2/12)$ * — момент инерции цилиндра относительно оси η_I , проходящей через центр тяжести C_1 этого тела: $C_1 C = O_1 C_1 - O_1 C = 1/2 - 3/8 = 1/8$ — расстояние между осями η и η_I .

Подставляя в (6) значение этих величин, получим

$$J_{\eta}^I = 48 (0,25^2/4 + 1^2/12) + 48 (1/8)^2 = 5,5 \text{ кгм}^2.$$

* См., например, А. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Теоретическая механика. Физматгиз, 1954. М. В. Фаворин. Моменты инерции тел. М., 1970.

Момент инерции конуса относительно оси C_{η} :

$$J_{\eta}^{II} = J_{\eta_2}^{II} + m_{II} (C_{II} C)^2, \quad (7)$$

где $J_{\eta_2}^{II}$ — момент инерции конуса относительно оси η_2 , проходящей через центр тяжести C_{II} этого тела.

В свою очередь для конуса имеем:

$$J_{\eta_2}^{II} = J_{\eta_3}^{II} - m_{II} (O_2 C_{II})^2. \quad (8)$$

Здесь $J_{\eta_3}^{II}$ — момент инерции конуса относительно оси η_3 , проходящей через центр основания конуса O_2 и параллельной оси η_2 .

Подставляя (8) в формулу (7), получим:

$$J_{\eta}^{II} = J_{\eta_3}^{II} - m_{II} (O_2 C_{II})^2 + m_{II} (C_{II} C)^2 = J_{\eta_3}^{II} + m_{II} [(C_{II} C)^2 - (O_2 C_{II})^2],$$

причем момент инерции конуса относительно оси η_3 определяется по формуле *:

$$J_{\eta_3}^{II} = 0,15 m_{II} r^2 + 0,1 m_{II} h^2 = (0,15 \cdot 0,25^2 + 0,1 \cdot 1^2) 16 = 1,75 \text{ кгм}^2;$$

$$C_{II} C = O_1 C_{II} - O_1 C = 3/4 - 3/8 = 3/8 \text{ м};$$

$$O_2 C_{II} = h/4 = 1/4 \text{ м.}$$

Таким образом,

$$J_{\eta}^{II} = 1,75 + 16 [(3/8)^2 - (1/4)^2] = 3 \text{ кгм}^2.$$

Теперь J_{η} и J_{ξ} можно вычислить по формулам (5):

$$J_{\eta} = J_{\eta}^I - J_{\eta}^{II} = 5,5 - 3 = 2,5 \text{ кгм}^2; \quad J_{\xi} = J_{\xi}^I - J_{\xi}^{II},$$

где

$$J_{\xi}^I = m_1 r^2 / 2 = (48 \cdot 0,25^2) / 2 = 1,5 \text{ кгм}^2;$$

$$J_{\xi}^{II} = 0,3 m_{II} r^2 = 0,3 \cdot 16 \cdot 0,25^2 = 0,3 \text{ кгм}^2.$$

Тогда

$$J_{\xi} = 1,5 - 0,3 = 1,2 \text{ кгм}^2.$$

По формуле (4) вычисляем J_{z1} , учитывая, что $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 30^\circ$.

$$J_{z1} = J_{\eta} \cos^2 120^\circ + J_{\xi} \cos^2 30^\circ = 2,5 (1/2)^2 + 1,2 (\sqrt{3}/2)^2 = 1,525 \text{ кгм}^2.$$

Момент инерции тела D относительно оси вращения z вычисляем по формуле (2):

$$J_z = J_{z1} + md^2,$$

где

$$d = OC \sin \gamma = (O_1 O_2 + O_2 C) \sin \gamma = (1/2 + 3/8) \sin 30^\circ = 0,437 \text{ м};$$

$$J_z = 1,525 + 32 (0,437)^2 = 7,65 \text{ кгм}^2.$$

Из последнего уравнения системы (1)

$$\epsilon = M/J_z = 60/7,65 = 7,85 \text{ с}^{-2} = \text{const.}$$

Угловая скорость при равноускоренном вращении тела

$$\omega = \omega_0 + \epsilon t,$$

поэтому при $\omega_0 = 0$ и $t = \tau = 2$ с

$$\omega = 7,85 \cdot 2 = 15,7 \text{ с}^{-1}.$$

Для определения реакций опор следует определить центробежные моменты инерции J_{yz} и J_{zx} тела. $J_{zx} = 0$, так как ось x , перпендикулярная к плоскости материальной симметрии тела D , является главной осью инерции в точке A .

Центробежный момент инерции тела J_{yz} определим по формуле *:

$$J_{yz} = J_{y_1 z_1} + m y_C z_C, \text{ где } J_{y_1 z_1} = (J_\eta - J_\zeta) (\sin 2\gamma)/2,$$

$$t. e. J_{y_1 z_1} = (2,5 - 1,2) (\sin 60^\circ)/2 = 562 \text{ кгм}^2.$$

Координаты центра тяжести тела D следующие:

$$x_C = 0; \quad y_C = d = 0,437 \text{ м};$$

$$z_C = a + OC \cos \gamma = a + (OO_1 + O_1 C) \cos \gamma = 1,76 \text{ м}.$$

Таким образом,

$$J_{yz} = 0,562 + 32 \cdot 0,437 \cdot 1,76 = 25,16 \text{ кгм}^2.$$

Подставляя известные величины в систему уравнений (1) и учитывая, что $OC \sin \gamma = d = 0,437$ м, получаем следующие равенства:

$$X_A + X_B + 32 \cdot 0,437 \cdot 7,85 = 0;$$

$$Y_A + Y_B + 32 \cdot 0,437 \cdot (15,7)^2 = 0;$$

$$Z_A - 32 \cdot 9,81 = 0;$$

$$- 3Y_B - 32 \cdot 9,81 \cdot 0,437 - 25,16 \cdot (15,7)^2 = 0;$$

$$3X_B + 25,16 \cdot 7,85 = 0.$$

Откуда

$$X_A = -43,6 \text{ Н}; \quad Y_A = -1340 \text{ Н}; \quad Z_A = 314 \text{ Н}; \quad X_B = -65,8 \text{ Н}; \\ Y_B = -2120 \text{ Н}.$$

ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

Задание Д-17. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

Для заданной механической системы определить ускорения грузов и натяжения в ветвях нитей, к которым прикреплены грузы. Массами нитей пренебречь. Трение качения и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Система движется из состояния покоя.

* См., например, А. А. Яблонский. Курс теоретической механики. Ч. II. Изд-во «Высшая школа», 1977, пример № 20.

Варианты механических систем показаны на рис. 206 – 208, а необходимые для решения данные приведены в табл. 58.

Блоки и катки, для которых радиусы инерции в таблице не указаны, считать сплошными однородными цилиндрами.

Пример выполнения задания. Дано: $G_1 = G_2 = 2G$; $G_3 = G_4 = G$; $R = 2r$; $i_{2x} = r\sqrt{2}$, $f = 0,2$.

Блок 3 – сплошной однородный цилиндр (рис. 209). Определить ускорения грузов 1 и 4 и натяжения ветвей нити 1–2 и 3–4.

Решение. Применим к решению задания общее уравнение динамики. Так как система приходит в движение из состояния покоя, направления ускорений тел соответствуют направлениям их движения.

Ввиду того, что среди сил, действующих на тела системы, есть сила трения, целесообразно установить по исходным данным истинное направление движения системы, чтобы правильно показать направление силы трения.

Если направление движения системы выбрано ошибочно, то искомое ускорение получается со знаком «—». В этом случае необходимо изменить направления силы трения и сил инерции и внести соответствующие поправки в общее уравнение динамики.

В данном примере движение системы таково, что груз 1 опускается.

Покажем задаваемые силы: силы тяжести \vec{G}_1 – груза 1, \vec{G}_2 – блока 2, \vec{G}_3 – блока 3 и \vec{G}_4 – груза 4, а также \vec{F} – силу трения скольжения груза 1 по наклонной плоскости (рис. 210).

Приложим силы инерции. Сила инерции груза 1, движущегося поступательно с ускорением \vec{w}_1 , выражается вектором

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{w}_1.$$

Силы инерции блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением ϵ_2 , приводятся к паре, момент которой

$$M_2^\Phi = J_{2x} \epsilon_2.$$

Силы инерции блока 3, совершающего плоское движение, приводятся к вектору

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3 \vec{w}_3,$$

где \vec{w}_3 – ускорение центра масс блока 3, и к паре сил, момент которой

$$M_3^\Phi = J_{3x} \epsilon_3,$$

где ϵ_3 – угловое ускорение блока.

Сила инерции груза 4, движущегося поступательно с ускорением \vec{w}_4

$$\vec{\Phi}_4 = -m_4 \vec{w}_4.$$

Сообщим системе возможное перемещение в направлении ее действительного движения (рис. 210) (можно сообщить возможное перемещение и в обратном направлении).

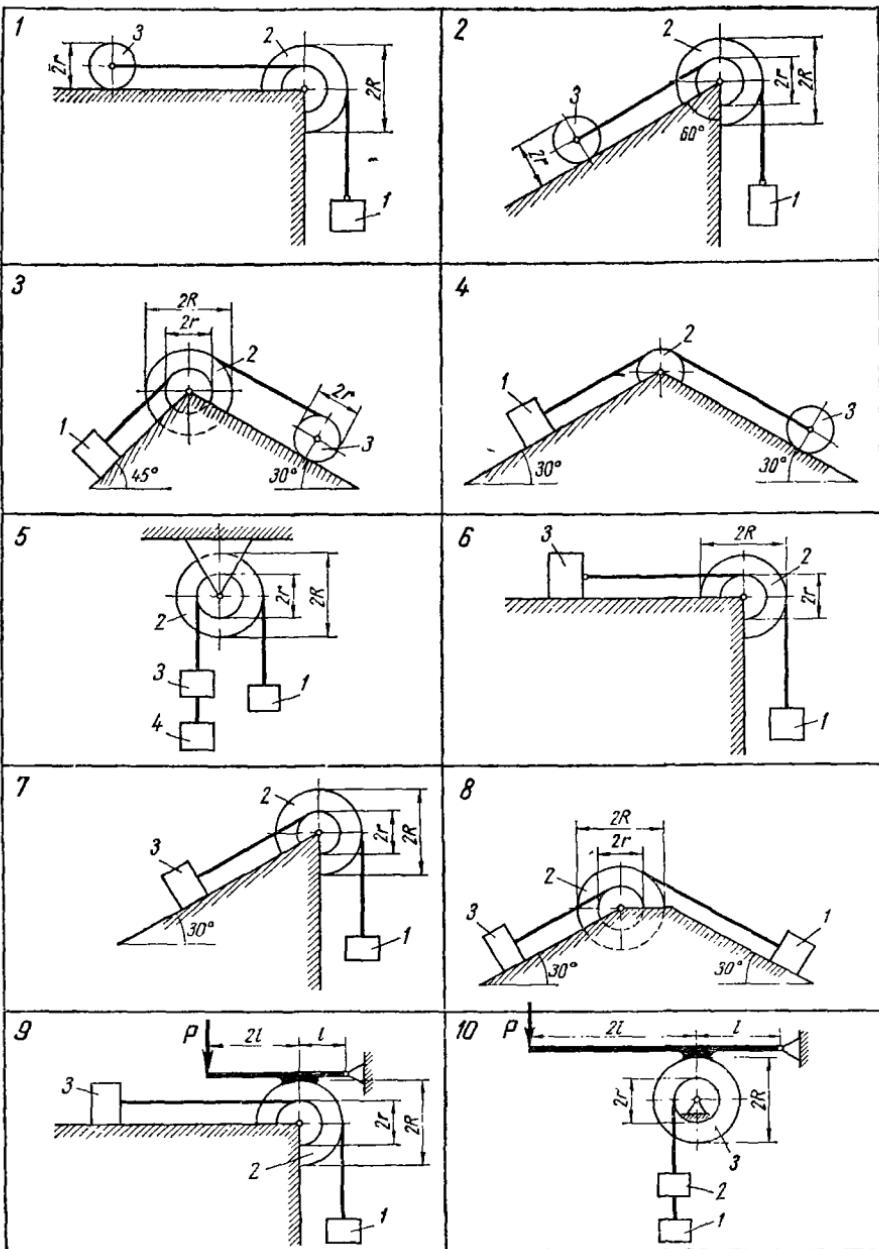


Рис. 206

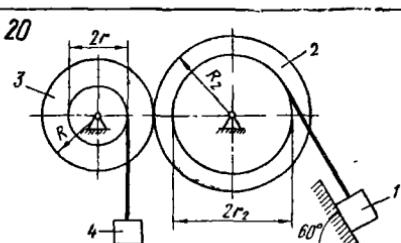
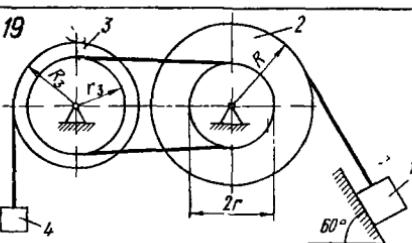
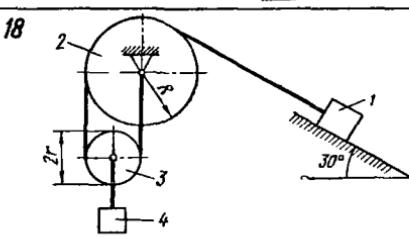
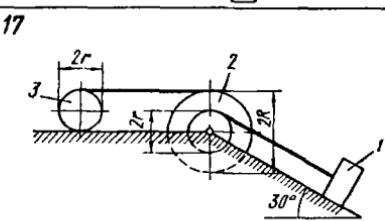
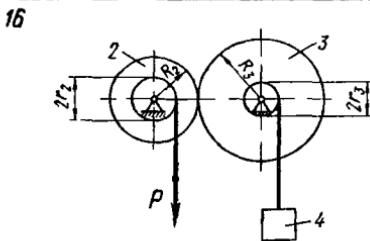
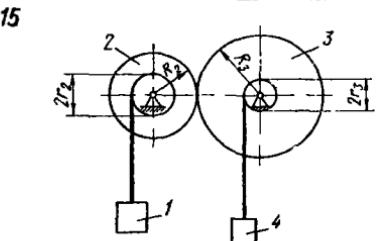
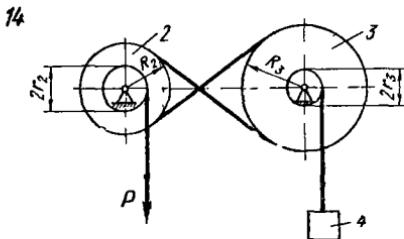
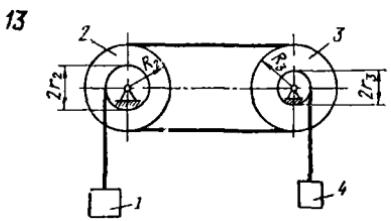
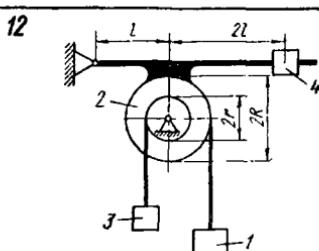
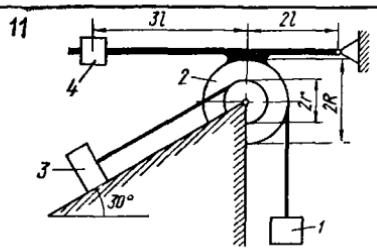


Рис. 207

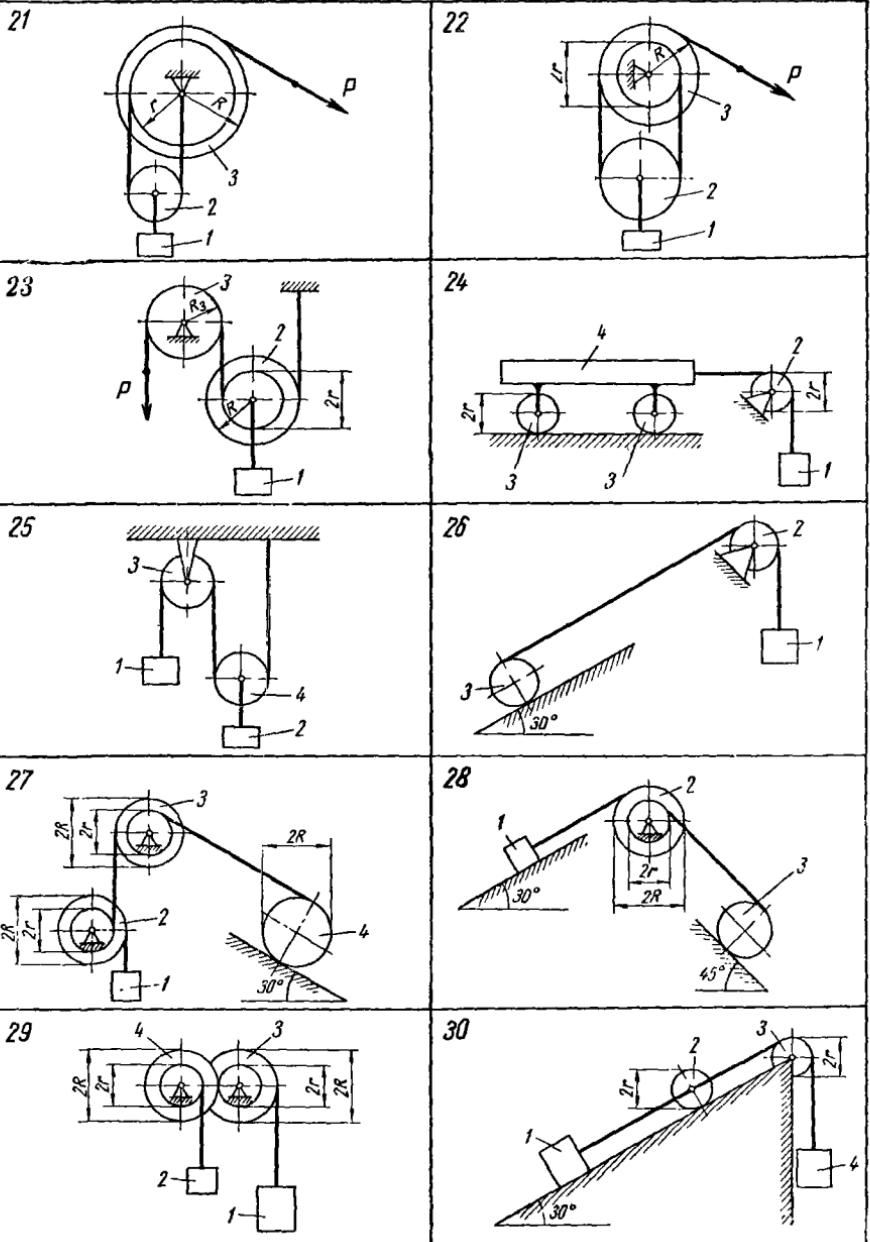


Рис. 208

Таблица 58

Номер варианта (рис. 206— 208)	Веса				$\frac{R}{r}$	Радиусы инерции		ρ	Коэффициент трения f	Дополнительные данные
	G_1	G_2	G_3	G_4		l_{gx}	l_{gy}			
1	G	G	$3G$	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	—	—
2	G	G	G	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	—	—
3	$3G$	G	G	—	2	$r\sqrt{2}$	—	—	0,1	—
4	G	G	$2G$	—	—	—	—	—	0,2	$r_2 = r_3$
5	$2G$	G	G	G	3	$2r$	—	—	—	—
6	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	—
7	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	—
8	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	—
9	$2G$	G	$2G$	—	3	$2r$	—	—	0,2	—
10	$2G$	$2G$	G	—	4	—	—	$2r$	0,2	—
11	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	—	—	0,2	—
12	$2G$	G	$2G$	$0,2G$	3	$2r$	—	—	0,2	—
13	$4G$	$2G$	G	$4G$	—	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	—	—	$r_2 = 2r_3; R_2 = R_3$
14	—	$2G$	G	$4G$	—	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$8G$	—	$r_2 = 2r_3; R_3 = 1,5R_2$

15	$4G$	G	$2G$	$4G$	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$-$	$-$	$-$	$R_3 = 2r_3; R_3 = 1,5R_2$
16	$-$	G	$2G$	$4G$	$r_2\sqrt{2}$	$2r_3$	$4G$	$-$	$-$	$r_2 = 2r_3; R_3 = 1,5R_2$
17	$2G$	G	$-$	$0,5G$	2	$-$	$-$	$-$	$0,1$	$r_3 = 1,2r; R_3 = 1,2r_3$
18	$3G$	$0,2G$	$0,1G$	$3G$	3	$2r$	$1,2r$	$-$	$0,4$	$r_3 = 1,2r; R_3 = 1,2r_3$
19	$4G$	$0,3G$	$0,2G$	$3G$	2	$1,6r$	$r\sqrt{2}$	$-$	$0,1$	$r_2 = 1,5r; R_2 = 1,2r_2$
20	$4G$	$0,2G$	$0,1G$	$3G$	2	$-$	$r\sqrt{2}$	G	$-$	$R_3 = 1,2r$
21	$5G$	$0,1G$	$0,2G$	$-$	3	$-$	$r\sqrt{2}$	G	$-$	$Mассы четырех колес одинаковы$
22	G	$0,2G$	$0,3G$	$-$	2	$-$	$r\sqrt{2}$	G	$-$	$R_3 = 1,2r$
23	G	$0,2G$	$0,1G$	$-$	$1,5$	$1,2r$	$-$	$-$	$-$	$r_3 = r_4$
24	$2G$	G	G	$8G$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$r_3 = r_2$
25	$6G$	$2G$	$2G$	G	$-$	$-$	$r\sqrt{2}$	$-$	$-$	$r_3 = r_4$
26	$6G$	G	$2G$	$-$	$-$	$-$	$r\sqrt{2}$	$-$	$-$	$r_3 = r_2$
27	G	G	G	$4G$	2	$-$	$r\sqrt{2}$	$-$	$-$	$r_3 = r_2$
28	$3G$	G	G	$-$	2	$-$	$r\sqrt{2}$	$-$	$0,1$	$i_{4x} = i_{3x}$
29	$6G$	$3G$	G	G	2	$-$	$r\sqrt{2}$	$-$	$-$	$i_{4x} = i_{3x}$
30	$8G$	G	G	$2G$	$-$	$-$	$-$	$-$	$0,1$	$i_{4x} = i_{3x}$

Причесанн.
1. Радиусы и массы даны относительно центральных осей, перпендикулярных к плоскости чертежа (рис. 206—208).
2. Коэффициент трения приличать одинаковым как при скольжении тела по плоскости, так и при торможении колодкой (варианты 9—12).

Составим общее уравнение динамики:

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - M_2^\phi \delta \varphi_2 - G_3 \delta s_3 - \Phi_3 \delta s_3 - M_3^\phi \delta \varphi_3 - G_4 \delta s_4 - \Phi_4 \delta s_4 = 0, \quad (1)$$

где $\delta \varphi_2$ и $\delta \varphi_3$ — углы поворотов блоков 2 и 3.

Учитывая, что

$$G_1 = G_2 = 2G = 2mg, \quad G_3 = G_4 = G = mg$$

имеем:

$$\left. \begin{aligned} F &= f G_1 \cos 60^\circ = 2f mg \cos 60^\circ; \\ \Phi_1 &= m_1 w_1 = 2m w_1; \\ M_2^\phi &= J_{2x} \varepsilon_2 = m_2 l_{2x}^2 \varepsilon_2 = 4mr^2 \varepsilon_2; \\ \Phi_3 &= m_3 w_3 = m w_3; \\ M_3^\phi &= J_{3x} \varepsilon_3 = (m_3 r^2 / 2) \varepsilon_3 = (mr^2 / 2) \varepsilon_3; \\ \Phi_4 &= m_4 w_4 = m w_4. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Устанавливаем зависимости между возможными перемещениями, входящими в (1), и между ускорениями в (2), пользуясь тем, что эти зависимости такие же, как между соответствующими скоростями.

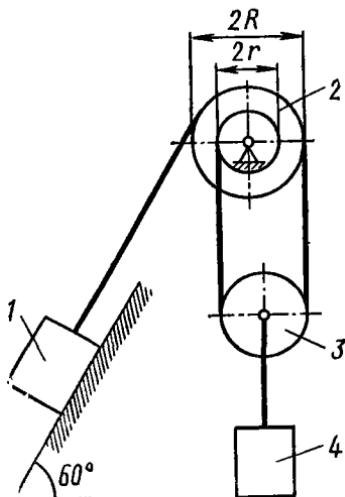


Рис. 209

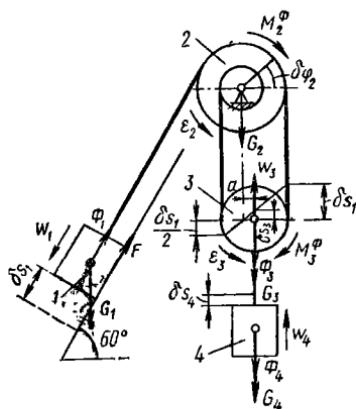


Рис. 210

Как показано на рис. 210, мгновенный центр скоростей блока 3 находится на одной вертикали с центром блока 2. Расстояние между мгновенным центром скоростей и центром блока 3

$$a = (3r/2) - r = r/2.$$

Теперь находим:

$$\left. \begin{aligned} \delta\varphi_2 &= \delta\varphi_3 = \delta s_1/R = \delta s_1/2r; \\ \delta s_3 &= \delta s_4 = \delta\varphi_3 a = \delta s_1/4; \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_3 = w_1/2r; \quad w_3 = w_4 = w_1/4. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) уравнение (1), после деления всех его членов на m и δs_1 , принимает вид

$$\begin{aligned} 2g \sin 60^\circ - 2fg \cos 60^\circ - \\ - 2w_1 - w_1 - g/4 - w_1/16 - \\ - w_1/8 - g/4 - w_1/16 = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{g(2 \sin 60^\circ - 2f \cos 60^\circ - 0,5)}{3,25} = \\ &= \frac{9,81(1,73 - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 0,5)}{3,25} = \\ &= 3,11 \text{ м/с}^2, \end{aligned}$$

$$w_4 = w_1/4 = 3,11/4 = 0,78 \text{ м/с}^2.$$

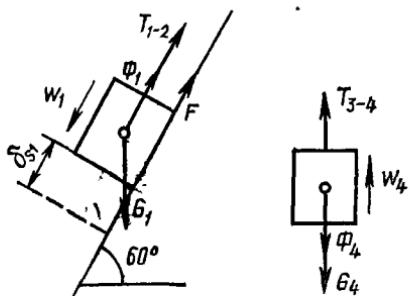


Рис. 211

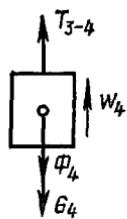


Рис. 212

Для определения натяжения в ветви нити 1—2 мысленно разрежем нить и заменим ее действие на груз реакцией T_{1-2} (рис. 211).

Общее уравнение динамики

$$G_1 \delta s_1 \sin 60^\circ - F \delta s_1 - \Phi_1 \delta s_1 - T_{1-2} \delta s_1 = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} T_{1-2} &= G_1 \sin 60^\circ - F - \Phi_1 = 2G\sqrt{3}/2 - 2Gf \cos 60^\circ - \\ &- 2 \cdot (G/g) w_1 = G(1,73 - 2 \cdot 0,2 \cdot 0,5 - 2 \cdot 3,11/9,81) = 0,90G. \end{aligned}$$

Для определения натяжения в нити 3—4 мысленно разрежем эту нить и заменим ее действие на груз 4 реакцией T_{3-4} (рис. 212).

Не составляя общего уравнения динамики, на основании принципа Даламбера имеем:

$$T_{3-4} = G_4 + \Phi_4 = G + (G/g) \cdot w_4 = G_4(1 + 0,78/9,81) = 1,08 G.$$

Задание Д-18. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система тел 1—6 (рис. 213—215) движется под воздействием постоянных сил \vec{P} и пар сил с моментами M или только сил тяжести.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах q_1 и q_2 при заданных начальных условиях. Необходимые данные приведены в табл. 59; там же указаны рекомендуемые обобщенные координаты (x и φ — обобщенные координаты для абсолютного движения, а ξ — для относительного движения).

При решении задачи массами нитей пренебречь. Считать, что качение колес происходит без проскальзывания. Трение качения

Таблица 59

Номер варианта (рис. 213—215)	Массы тел					Радиус инерции *	Силы P	Коэффициент трения скольжения	Обобщенные координаты		Начальные условия		Дополнительные данные
	1	2	3	4	5				t_{2y}	t_{3y}	q_1	q_2	
1	$2n$	$6m$	m	m	—	—	—	—	—	—	x	ξ	0 0 0 0 0
2	m	$3m$	—	—	—	—	—	M	—	—	φ	x	x_0 0 0 0
3	m	$3m$	$2m$	—	$r\sqrt{2}$	—	—	M	—	—	Φ	x	0 0 0 0 0
4	n	$4m$	—	—	—	—	P	—	0	b	x	ξ_0	0 0 0 0 0
5	m	$2m$	$4m$	$2m$	$2m$	—	—	—	f	—	τ_1	x_2	0 0 0 0 0
6	m	$2m$	$3m$	—	—	$2r$	—	M_1	M_2	—	φ_1	φ_2	0 0 0 0 0
7	$3m$	—	—	m	—	—	P_1, P_2	—	—	—	x_1	x_2	0 0 0 0 0
8	m	$2m$	—	$2m$	—	—	—	—	M_1, M_2	—	φ_1	φ_2	0 0 0 0 0
9	m	$2m$	—	—	—	—	—	—	—	—	x	ξ_0	x_0 0 0 0
10	$2m$	$2m$	m	—	—	—	—	—	M_1, M_2	—	φ_1	φ_2	0 0 0 0 0
11	m	$3m$	$2m$	m	—	$4r$	rV^2	—	P	—	x	ξ_0	x_0 0 0 0
12	$2m$	$5m$	m	—	—	—	—	—	—	—	b	x	ξ_0 0 0 0
13	m	$3m$	$2m$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	x_0 0 0 0

- * Радиус инерции тела 2 или 3 относительно центральной оси, перпендикулярной к плоскости чертежа
- ** Коэффициентом взаимного сопротивления называют коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления относительному движению

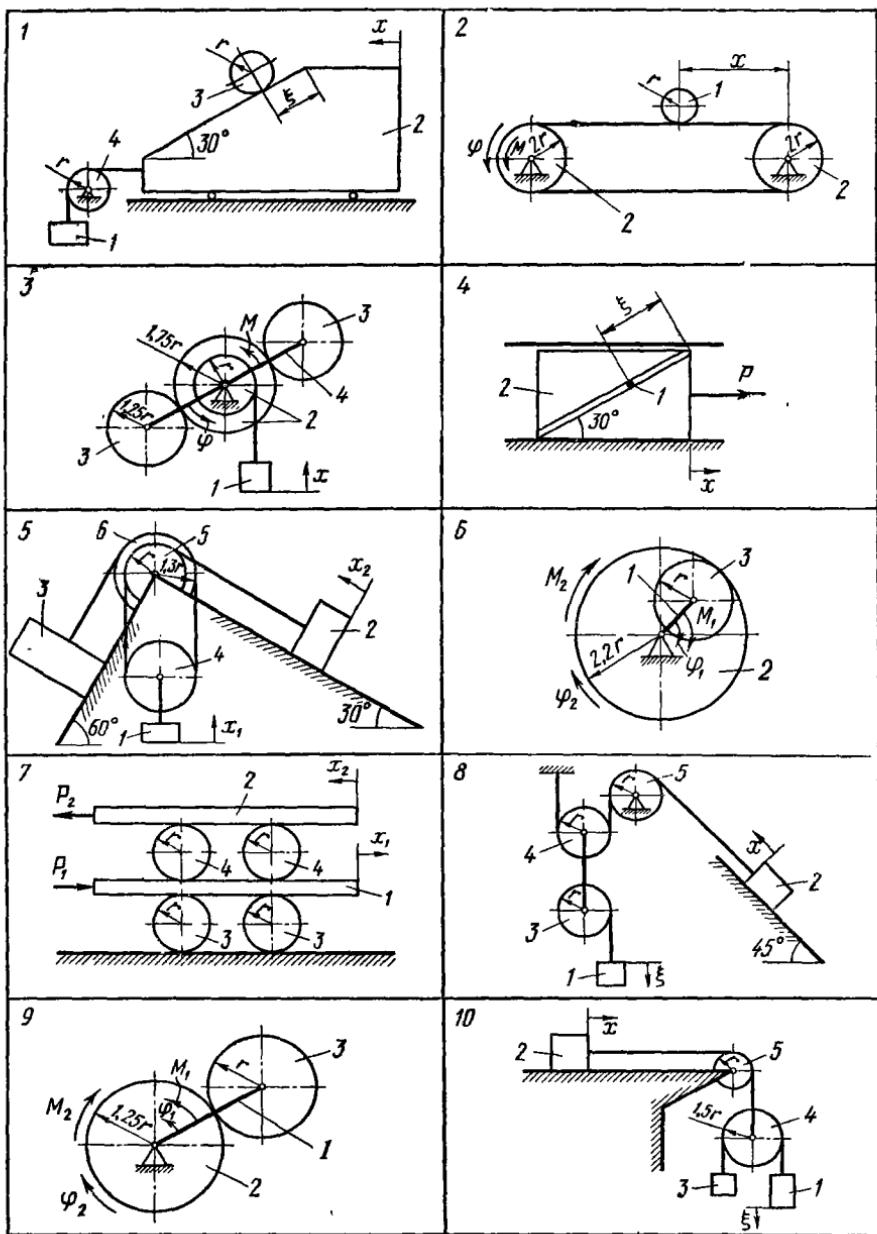


Рис. 213

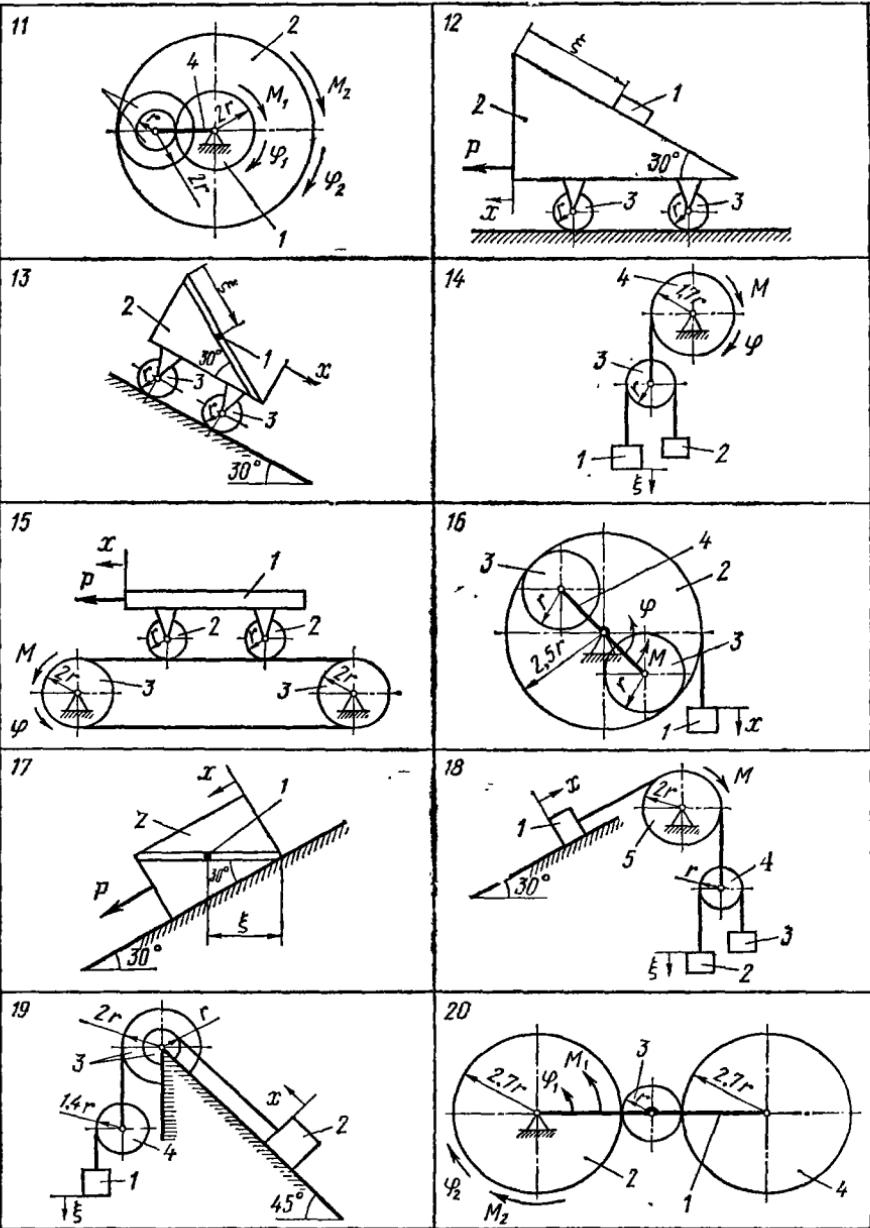


Рис. 214

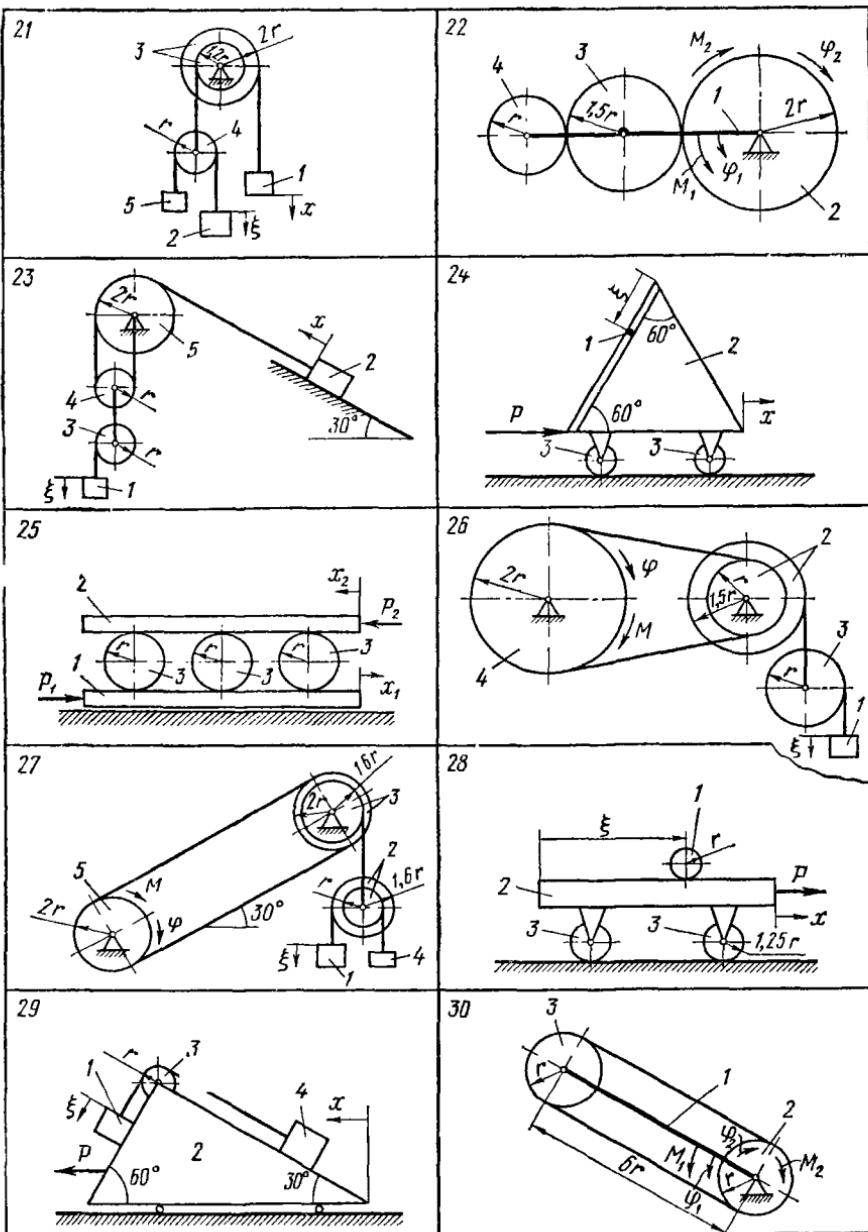


Рис 215

и силы сопротивления в подшипниках не учитывать. Колеса, для которых в таблице радиусы инерции не указаны, считать сплошными однородными дисками. Водила (кривошипы) рассматривать как тонкие однородные стержни. Принять, что в вариантах 6, 9, 11, 20, 22 и 30 механизм расположен в горизонтальной плоскости.

Пример выполнения задания. Дано: массы тел 1 и 2 механической системы (рис. 216): $m_1 = m$, $m_2 = 5m$ (тело 1 считать материальной точкой); \vec{P} — постоянная сила, приложенная к телу 2 (тело 2 может двигаться только поступательно вдоль линии действия силы \vec{P}); b — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления относительному движению тел 1 и 2; $\vec{R} = -b\vec{v}$, где \vec{v} — относительная скорость тел. Коэффициент трения скольжения (тела 2) $f = 0$.

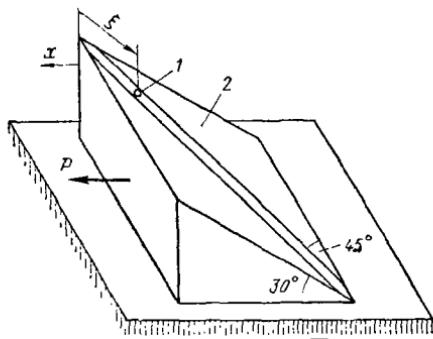


Рис. 216

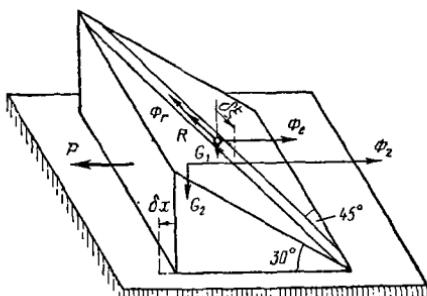


Рис. 217

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах $q_1 = x$, $q_2 = \xi$ (рис. 216) при начальных условиях:

$$q_{10} = 0, q_{20} = \xi_0, \dot{q}_{10} = 0, \dot{q}_{20} = 0.$$

Решение. Воспользуемся общим уравнением динамики. Покажем задаваемые (активные) силы: силы тяжести тел 1 (шарика) и 2 — \vec{G}_1 и \vec{G}_2 , силу \vec{P} , а также силу \vec{R} сопротивления движению шарика по желобу (рис. 217). Со стороны шарика на тело 2 действует сила $\vec{R}' = -\vec{R}$, которая на рисунке не показана.

Приложим силы инерции. Сила инерции тела 2, движущегося поступательно с ускорением \vec{w}_2 , выражается вектором

$$\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{w}_2.$$

Ускорение шарика 1 складывается из относительного \vec{w}_r и переносного $\vec{w}_e = \vec{w}_2$.

Соответственно покажем две составляющие силы инерции шарика

$$\vec{\Phi}_r = -m_1 \vec{w}_r \text{ и } \vec{\Phi}_e = -m_1 \vec{w}_2.$$

Для того чтобы получить уравнение движения системы, применим принцип наложения дополнительных связей (принцип затвердения).

Мысленно закрепив тело 2, сообщим шарику 1 возможное перемещение $\delta\xi$ и составим общее уравнение динамики:

$$G_1 \delta\xi \cos(\vec{G}_1, \delta\xi) - (R + \Phi_r) \delta\xi + \Phi_e \delta\xi \cos(\vec{\Phi}_e, \delta\xi) = 0.$$

Имея в виду, что

$$\cos(\vec{G}_1, \delta\xi) = \sin 30^\circ \sin 45^\circ; \quad \cos(\vec{\Phi}_e, \delta\xi) = \cos 30^\circ \sin 45^\circ,$$

получим

$$m_1 g \sin 30^\circ \sin 45^\circ - b\xi - m_1 \ddot{\xi} + m_1 \ddot{x} \cos 30^\circ \sin 45^\circ = 0$$

или

$$\ddot{\xi} + (b/m) \cdot \dot{\xi} - (\sqrt{6}/4) \cdot \ddot{x} = g\sqrt{2}/4. \quad (1)$$

Теперь мысленно закрепив шарик 1 в желобе, сообщим телу 2 возможное перемещение δx .

Общее уравнение динамики в этом случае имеет вид:

$$(P - \Phi_2 - \Phi_e) \delta x + \Phi_r \delta x \cos(\vec{\Phi}_r, \delta x) = 0.$$

Учитывая, что

$$\cos(\vec{\Phi}_r, \delta x) = \cos 30^\circ \sin 45^\circ,$$

находим

$$P = m_2 \ddot{x} - m_1 \ddot{x} + m_1 \ddot{\xi} \cos 30^\circ \sin 45^\circ = 0$$

или

$$6m\ddot{x} - m(\sqrt{6}/4) \cdot \ddot{\xi} = P. \quad (2)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (1) и (2) из (1) определяем

$$\ddot{x} = (4/\sqrt{6}) \cdot \ddot{\xi} + (4b/\sqrt{6}m) \cdot \dot{\xi} - g/\sqrt{3}.$$

Подставляя это значение \ddot{x} в (2), получаем

$$3,75\sqrt{6}m\ddot{\xi} + 4\sqrt{6}b\dot{\xi} = P + 2m\sqrt{3}g. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$3,75\sqrt{6}m = a; \quad 4\sqrt{6}b = \mu; \quad P + 2m\sqrt{3}g = h.$$

Тогда уравнение (3) примет вид:

$$a\ddot{\xi} + \mu\dot{\xi} = h \text{ или } \ddot{\xi} + (\mu/a) \cdot \dot{\xi} = h/a. \quad (4)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$\xi = C_1 + C_2 t^{-(\mu/a)} + (h/\mu) \cdot t. \quad (5)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий. При $t=0$

$$\xi = \xi_0, \quad \dot{\xi}_0 = 0.$$

Следовательно, согласно (5)

$$\xi_0 = C_1 + C_2; \quad 0 = -(\mu/a) \cdot C_2 + h/\mu,$$

откуда

$$C_2 = ah/\mu^2; \quad C_1 = \xi_0 - ah/\mu^2.$$

Окончательно

$$\xi = \xi_0 - (ah/\mu^2) (1 - e^{-(\mu/a) \cdot t}) + (h/\mu) \cdot t. \quad (6)$$

Для того чтобы получить второе уравнение движения $x = x(t)$, найдем из (2)

$$\ddot{x} = (1/4) \sqrt{6} \cdot \ddot{\xi} + P/6m.$$

Дважды дифференцируя (6), определяем, что

$$\ddot{\xi} = (h/a) \cdot e^{-(\mu/a) \cdot t}.$$

Тогда

$$\ddot{x} = (h/a4) \sqrt{6} \cdot e^{-(\mu/a) \cdot t} + P/6m$$

или, учитывая, что $a = 3,75\sqrt{6} m$,

$$\ddot{x} = (h/90m) \cdot e^{-(\mu/a) \cdot t} + P/6m. \quad (7)$$

Интегрируя (7), находим:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(ha/90m\mu) \cdot e^{-(\mu/a) \cdot t} + (P/6m) \cdot t + C_3; \\ x &= (ha^2/90m\mu^2) e^{-(\mu/a) \cdot t} + (P/12m) \cdot t^2 + C_3t + C_4. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно условию задачи при $t = 0$

$$x = 0, \quad \dot{x} = 0.$$

Следовательно,

$$0 = -ha/90m\mu + C_3; \quad 0 = ha^2/90m\mu^2 + C_4.$$

Отсюда

$$C_3 = ha/90m\mu; \quad C_4 = -ha^2/90m\mu^2.$$

Подставляя эти значения постоянных в (8), получаем:

$$x = \frac{P}{12m} t^2 + \frac{ha}{90m\mu} \left[t - \frac{a}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{a} t} \right) \right]. \quad (9)$$

Уравнения (6) и (9) являются решением задачи.

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Задание Д-19. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы

К ведущему валу I механизма приложена пара сил, момент которой (вращающий момент) постоянен и равен M_1 . К ведомому валу II приложены силы сопротивления, создающие относительно оси II постоянный момент M_{II} (момент сопротивления).

Определить угловые ускорения ведущего и ведомого валов.

В задании приняты следующие обозначения: m_{2-3} — масса каждого сателлита 2—3, состоящего из колес 2 и 3; J_{2-3} — момент инерции сателлита 2—3 относительно собственной оси; J_1 — момент инерции

частей, жестко связанных с ведущим валом I , относительно его оси; J_{II} — момент инерции частей, жестко связанных с ведомым валом II , относительно его оси; r_1, r_2, r_3, r_4 — радиусы колес $I-4$.

Схемы показаны на рис. 218—220, а необходимые для решения данные приведены в табл. 60.

Таблица 60

Номер варианта (рис. 218—220)	r_1	r_2	r_3	r_4	r_*	m_{2-3} , кг	J_{2-3}	J_I	J_{II}	M_I	M_{II}
	см						кгм ²			Нм	
1	20	25	15	30	—	50	0,92	2,7	19	110	54
2	20	5	10	15	—	45	0,8	12	2,0	170	90
3*	15	10	10	—	—	5/5	0,0015	20	4,0	45	55
4*	25	15	10	30	16	58	1,0	2,0	3,0	75	18
5	15	10	—	—	—	10	0,003	2,5	12	95	100
6	40	10	18	12	—	80	1,2	3,0	15	100	91
7*	15	12	18	9	10	55	0,9	3,5	4,5	70	450
8	15	10	15	10	—	70	1,0	4,2	21	80	35
9	20	15	10	25	—	82	1,1	2,5	20	75	150
10	50	10	15	25	—	72	1,02	1,5	12	120	30
11*	30	8	14	—	14	4,5	0,001	2	18	72	6
12	35	10	15	40	—	95	1,2	12	6	75	160
13	15	10	12	37	—	60	0,9	4	16	90	220
14*	10	10	10	—	15	4/4	0,001	2,5	10	100	15
15	15	20	—	—	—	7	0,002	6	12	85	350
16*	10	15	10	15	12	65	0,96	5,5	6,0	70	8
17	10	15	12	37	—	55	0,92	4,8	22	200	225
18	10	12	—	—	—	70	1,0	4	16	130	726
19	10	10	—	—	—	80	1,1	4,5	18	110	400
20	10	15	12	—	—	55	0,91	18	5,7	120	450
21	20	15	—	—	—	72	1,2	0,2	5	240	280
22	20	10	—	—	—	75	1,05	20	7	175	55
23	15	10	—	—	—	62	0,95	5,5	18	170	105
24	10	15	—	—	—	50	0,9	12	6	220	80
25	30	10	5	—	—	70	1,0	9	22	190	100
26*	10	10	10	—	—	5/5	0,0014	6,2	17	135	32
27	10	10	—	—	—	8	0,002	6,5	20	130	380
28	15	10	12	—	—	95	1,2	4	6	120	74
29	27	12	5	10	—	82	1,1	5	12	60	102
30*	15	10	10	—	—	4/4	0,001	6	30	150	360
							0,001				

* Дополнительные данные в вариантах 4, 7, 11, 14 и 16 — радиус шестеренки, соприкасающейся с колесом — 5 — 2 см, момент инерции рамки относительно оси вращения — 0,5 кгм²; в вариантах 3, 14, 26, 30 — в числителе данные для колеса 2, в знаменателе — для колеса 3.

Пример выполнения задания. Дано: $M_I = 100$, $M_{II} = 320$ Нм; $J_I = 4$ кгм²; $m_{2-3} = 100$ кг; $J_{2-3} = 2$ кгм²; $J_{II} = 12$ кгм²; $r_1 = 60$; $r_2 = 25$; $r_3 = 5$; $r_4 = 30$ см (рис. 221).

Определить угловые ускорения ε_I и ε_{II} .

Решение. Воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода. Приняв за обобщенную координату системы, имеющей одну степень

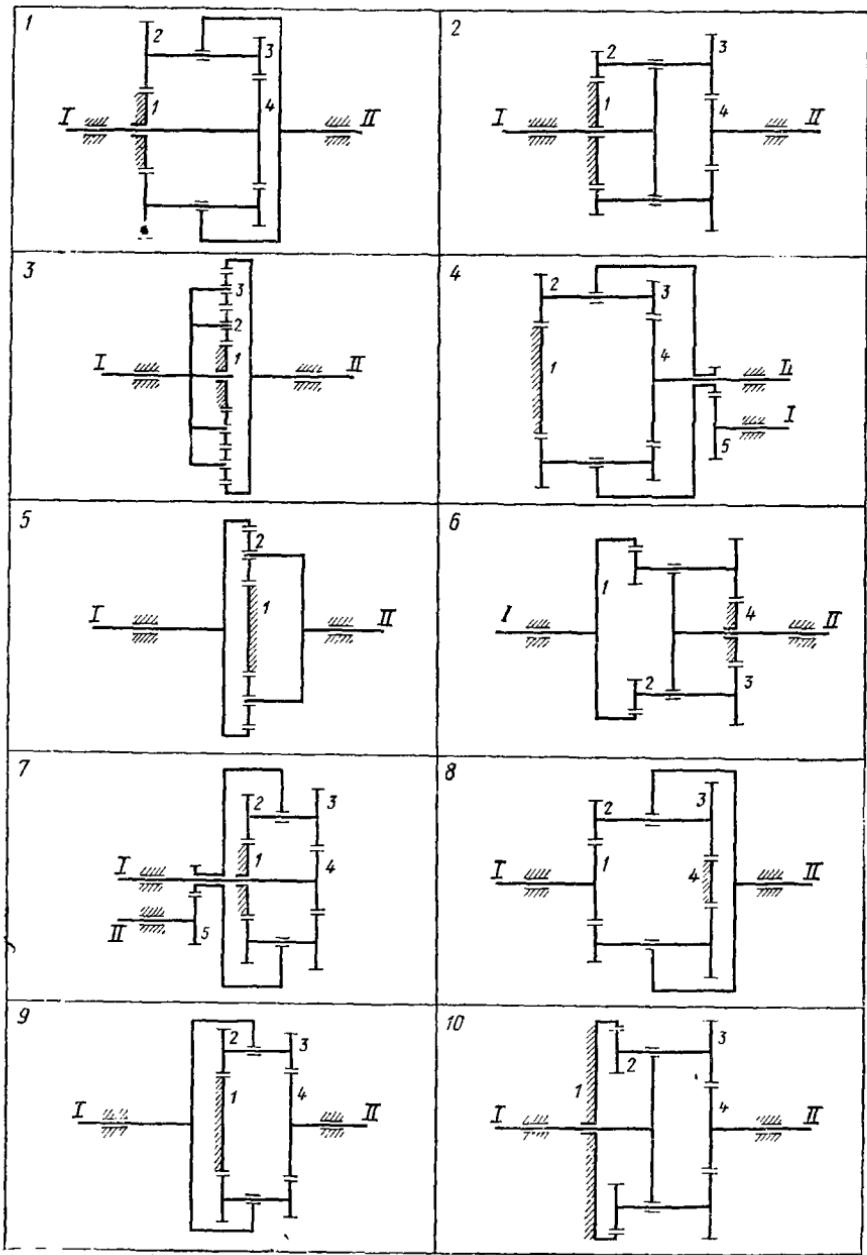
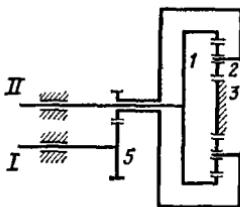
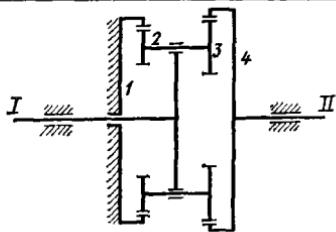


Рис. 218

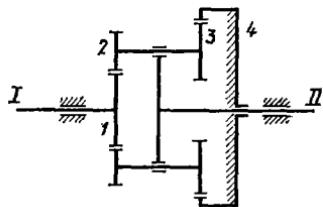
11



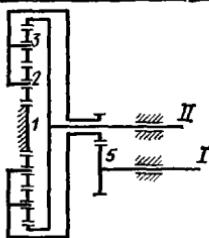
12



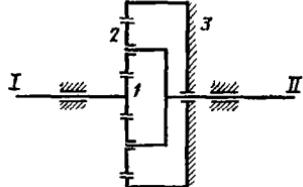
13



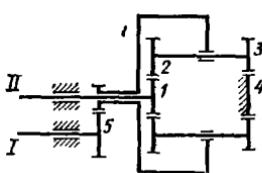
14



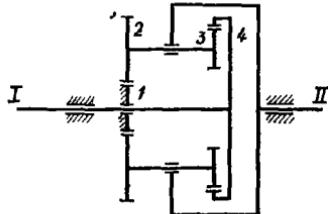
15



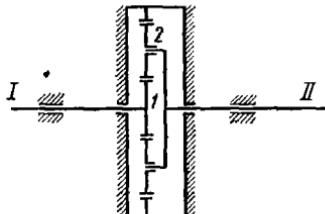
16



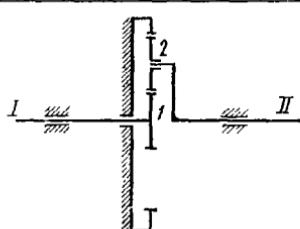
17



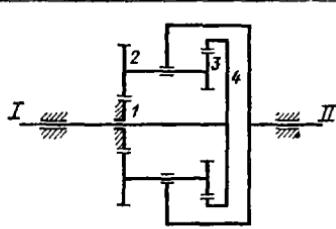
18



19



20



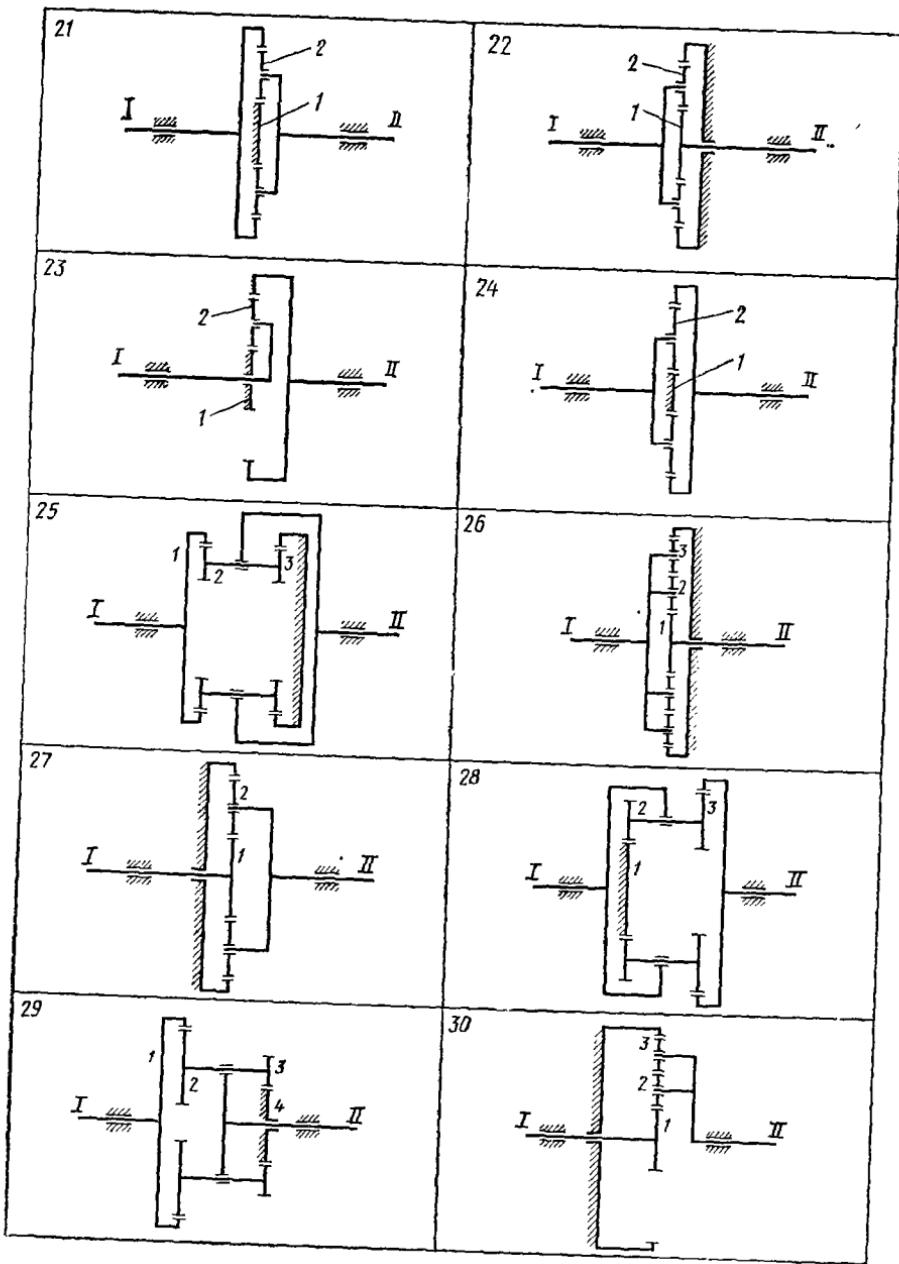


Рис. 220

свободы, угол поворота φ_1 ведущего вала, имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = - \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}_1} + Q_{\varphi_1}. \quad (1)$$

Найдем кинетическую энергию системы T как функцию обобщенной скорости $\dot{\varphi}_1$, равной угловой скорости ведущего вала ω_1 . Для

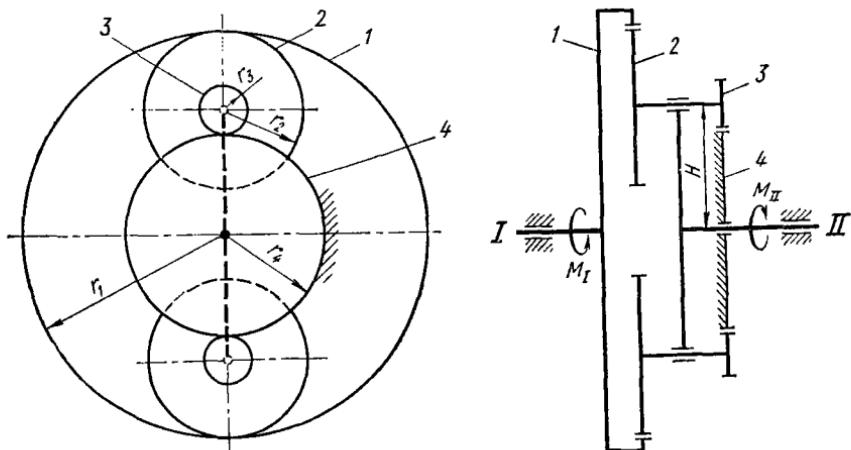


Рис. 221

вычисления кинетической энергии рассматриваемой системы необходимо знать угловые скорости всех звеньев: ведущего вала (колеса 1) ω_1 , ведомого вала (водила) ω_{II} , сателлитов ω_{2-3} .

Определим эти угловые скорости способом Виллиса (см. пример выполнения задания К-11):

$$(\omega_1 - \omega_{II}) / (\omega_2 - \omega_{II}) = r_2 / r_1 = i_{1-2}; \quad (2)$$

$$(\omega_3 - \omega_{II}) / (\omega_4 - \omega_{II}) = - r_4 / r_3 = - i_{3-4}. \quad (3)$$

Перемножая левые и правые части равенств (2) и (3), а также учитывая, что $\omega_2 = \omega_3$, получаем:

$$(\omega_1 - \omega_{II}) / (\omega_4 - \omega_{II}) = - i; \quad i = i_{1-2} \cdot i_{3-4}.$$

Так как колесо 4 неподвижно, т. е. $\omega_4 = 0$, то

$$(\omega_1 - \omega_{II}) / \omega_{II} = i.$$

Из этого равенства

$$\omega_{II} = \omega_1 / (1 + i). \quad (4)$$

Из (2) и (4)

$$\omega_2 = [(1 + i_{3-4}) / (1 + i)] \omega_1. \quad (5)$$

Полученные значения ω_{II} и ω_2 показывают, что вал II и сателлиты вращаются в одном направлении с валом I .

Составим выражение кинетической энергии всех движущихся частей:

$$T = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + 2 \left(\frac{m_{2-3} v_{C2}^2}{2} + \frac{J_{2-3} \omega_2^2}{2} \right) + \frac{J_{II} \omega_{II}^2}{2},$$

где

$$v_{C2} = H \omega_{II} = (r_3 + r_4) \omega_{II} = \frac{r_3 + r_4}{1+i} \omega_1.$$

Выразив все линейные и угловые скорости через угловую скорость ведущего вала $\omega_1 = \dot{\phi}_1$, получим:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\phi}_1^2 \left\{ J_1 + \frac{1}{(1+i)^2} [2m_{2-3} (r_3 + r_4)^2 + 2J_{2-3} (1+i_{3-4})^2 + J_{II}] \right\}.$$

Из выражения кинетической энергии находим приведенный к оси ведущего вала момент инерции:

$$J_{np} = J_1 + \frac{1}{(1+i)^2} [2m_{2-3} (r_3 + r_4)^2 + 2J_{2-3} (1+i_{3-4})^2 + J_{II}]. \quad (6)$$

Таким образом,

$$T = (1/2) J_{np} \dot{\phi}_1^2.$$

Определим потенциальную энергию P . Силами, имеющими потенциал, являются силы тяжести. Но центр тяжести всех движущихся частей неизменно находится на оси его материальной симметрии — прямой, совпадающей с осями валов I и II , так что потенциальная энергия постоянна:

$$P = \text{const.}$$

Найдем обобщенную силу Q_{ϕ_1} , соответствующую задаваемым силам, не имеющим потенциала. Такими силами являются: силы, приложенные к валу I и образующие пару, момент которой (вращающий момент) равен M_1 , и силы сопротивления, приложенные к валу II и создающие относительно оси II момент сопротивления M_{II} .

Сообщим углу ϕ_1 приращение $\delta\phi_1$ и составим сумму элементарных работ задаваемых сил на этом возможном перемещении. В эту сумму войдет работа вращающего момента M_1 и рабства момента сил сопротивления M_{II} , которая отрицательна,

$$\delta A_{\phi_1} = M_1 \delta\phi_1 - M_{II} \delta\phi_{II}.$$

Зависимость между угловыми перемещениями ведущего и ведомого валов такая же, как и зависимость между абсолютными значениями угловых скоростей:

$$\delta\phi_{II} = [1/(1+i)] \cdot \delta\phi_1.$$

Тогда

$$\delta A_{\phi_1} = [M_1 - M_{II} \cdot 1/(1+i)] \delta\phi_1.$$

Обобщенная сила

$$Q_{\phi_1} = \delta A_{\phi_1} / \delta\phi_1 = M_1 - M_{II} \cdot 1/(1+i).$$

Найдем значения членов левой части уравнения (1):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} \right) = J_{np} \ddot{\varphi}_I; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial P}{\partial \dot{\varphi}_I} = 0.$$

Уравнение (1) примет вид

$$J_{np} \ddot{\varphi}_I = M_I - M_{II} \cdot 1/(1+i). \quad (7)$$

Из уравнения (7), учитывая выражение (6), получаем:

$$\varepsilon_I = \ddot{\varphi}_I = (1/J_{np}) [M_I - M_{II}/(1+i)].$$

Зависимость между угловыми ускорениями ведущего и ведомого валов такая же, как и зависимость (4) между их угловыми скоростями:

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_I/(1+i).$$

Подставляя в эти формулы заданные числовые значения всех величин, находим:

$$\varepsilon_I = 0,37 \text{ с}^{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{II} = 0,106 \text{ с}^{-2}.$$

Задание Д-20. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы

Решить задачу из задания Д-18, пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода. Условие задачи и все исходные данные, указанные в задании Д-18 (см. рис. 213—215, табл. 59), остаются без изменений.

Пример выполнения задания. Рассмотрим пример, решенный в задании Д-18.

Дано: массы тел 1 и 2 механической системы (рис. 222) $m_1 = m$, $m_2 = 5m$ (тело 1 считать материальной точкой); \vec{P} — постоянная сила, приложенная к телу 2 (тело 2 может двигаться только поступательно вдоль линии действия силы \vec{P}); b — коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления относительному движению тел $\vec{R} = -b\vec{v}$, где \vec{v} — относительная скорость тел. Коэффициент трения скольжения (тела 2) $f = 0$.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах $q_1 = x$; $q_2 = \xi$ (рис. 222) при начальных условиях:

$$q_{10} = 0, \quad q_{20} = \xi_0, \quad \dot{q}_{10} = 0, \quad \dot{q}_{20} = 0.$$

Решение. Для решения задачи применим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial T}{\partial x} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x} + Q_x; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + Q_\xi. \quad (2)$$

Здесь T — кинетическая энергия системы; Π — потенциальная энергия; Q_x и Q_ξ — обобщенные силы, соответствующие неконсервативным силам.

Кинетическая энергия системы (рис. 223)

$$T = m_1 v^2 / 2 + m_2 \dot{x}^2 / 2,$$

где v — абсолютная скорость тела l (шарика):

$$v^2 = v_r^2 + v_e^2 +$$

$$+ 2v_r v_e \cos(\vec{v}_r, \vec{v}_e).$$

Здесь относительная скорость $v_r = \dot{\xi}$, переносная скорость $v_e = \dot{x}$

$$\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_e) =$$

$$= -\cos 30^\circ \cos 45^\circ =$$

$$= -\sqrt{6}/4.$$

Учитывая, что $m_1 = m$, $m_2 = 5m$, получим

$$T = 3m\dot{x}^2 + (m/2)\dot{\xi}^2 - m(\sqrt{6}/4)\dot{\xi}\dot{x}. \quad (3)$$

Рис. 223

Потенциальная энергия системы зависит только от высоты, на которой находится шарик. Принимая, что $\Pi = 0$ при $\xi = 0$, находим:

$$\Pi = -mg\xi \sin 30^\circ \sin 45^\circ$$

или

$$\Pi = -(\sqrt{2}/4) \cdot mg\xi. \quad (4)$$

Обобщенные силы Q_x и Q_ξ определяются из выражений работы неконсервативных сил на элементарных перемещениях системы, соответствующих вариации каждой обобщенной координаты:

$$\delta A_x = Q_x \delta x = P \delta x;$$

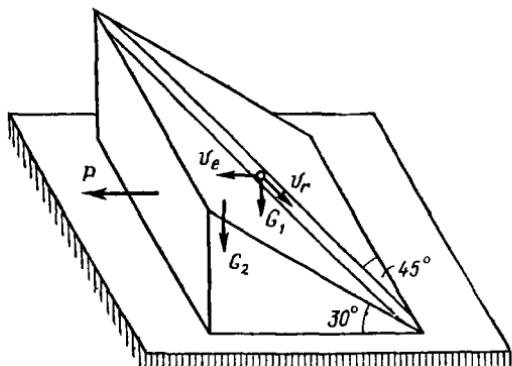
$$\delta A_\xi = Q_\xi \delta \xi = -R \delta \xi = -b \dot{\xi} \delta \xi,$$

где $R = b \dot{\xi}$ — сила сопротивления движению шарика по желобу.

Отсюда

$$Q_x = P; \quad Q_\xi = -b \dot{\xi}.$$

Определяем величины, входящие в уравнения Лагранжа (1) и (2).



Учитывая (3) и (4), имеем

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 6m\ddot{x} - m \frac{V_6}{4} \dot{\xi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}} = m\ddot{\xi} - m \frac{V_6}{4} \dot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{\xi}} = - \frac{V_2}{4} mg.$$

Теперь уравнения (1) и (2) принимают вид:

$$6m\ddot{x} - m \frac{V_6}{4} \dot{\xi} = P, \quad (5)$$

$$\ddot{\xi} + \frac{b}{m} \dot{\xi} - \frac{V_6}{4} \dot{x} = g \frac{V_2}{4}. \quad (6)$$

Дифференциальные уравнения движения системы (5) и (6) совпадают с уравнениями (1) и (2) в примере выполнения задания Д-18, где дано их решение.

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ ПОКОЯ (РАВНОВЕСИЯ) КОНСЕРВАТИВНОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задание Д-21. Определение положений покоя (равновесия) консервативной механической системы с одной степенью свободы и исследование их устойчивости (по теореме Лагранжа — Дирихле)

Определить положения покоя консервативной механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая массами упругих элементов. Провести исследование устойчивости найденных положений покоя по теореме Лагранжа — Дирихле.

Варианты механических систем показаны на рис. 224 — 228, а необходимые для расчета данные приведены в табл. 61.

В качестве обобщенной координаты выбрать угол φ , образованный стержнем 1 и вертикалью (ось Oy), считая, что при $\varphi = 0$ угол между стержнем 2 и положительным направлением оси Oy равен нулю. На рис. 224 — 228 показаны механические системы тел 1—6 при некотором положительном угле φ . Во всех вариантах качение колес происходит без проскальзывания и трение в сочленениях отсутствует. При решении задачи считать все стержни и диски однородными.

Пример выполнения задания. Дано: веса элементов системы тел 1—6 (рис. 229): $G_1 = 10$; $G_2 = 5$; $G_3 = 20$; $G_4 = 5$; $G_5 = 10$; $G_6 = 15$ Н; линейные размеры: $l_1 = 0,8$, $l_2 = 0,2$, $l_4 = 0,2$, $l_5 = 0,5$, $l_6 = 0,7$ м; $R = 0,1$ м; коэффициенты жесткости пружин: $c_1 = 40$ Н/см, $c_2 = 50$ Н/см, длины недеформированных пружин 1 и 2: $a_1 = 0,1$ м, $a_2 = 0,3$ м.

Определить положения покоя рассматриваемой системы и исследовать их устойчивость по теореме Лагранжа — Дирихле.

Решение 1. Определение положений покоя рассматриваемой системы. Значения угла φ , соответствующие положениям покоя исследуемой консервативной системы с одной степенью свободы,

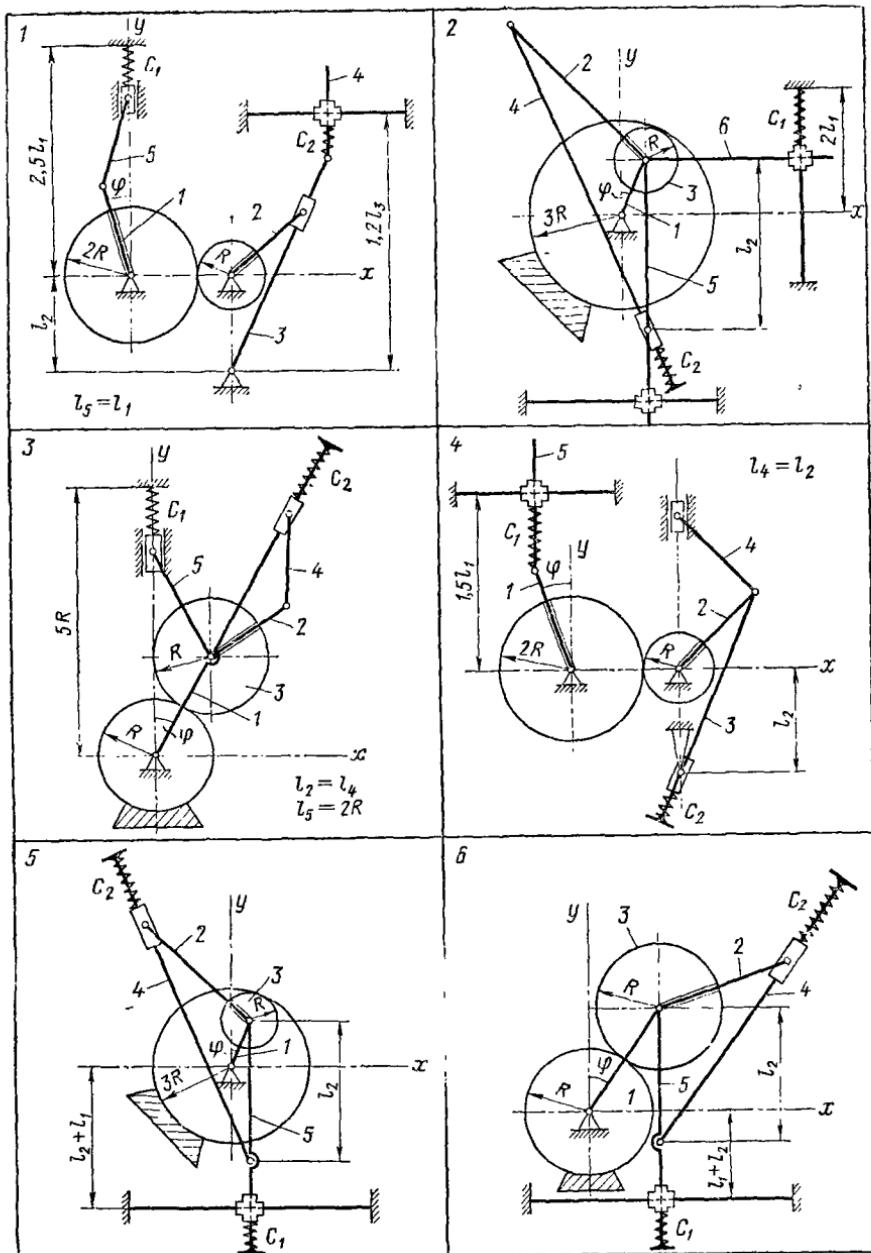


Рис. 224

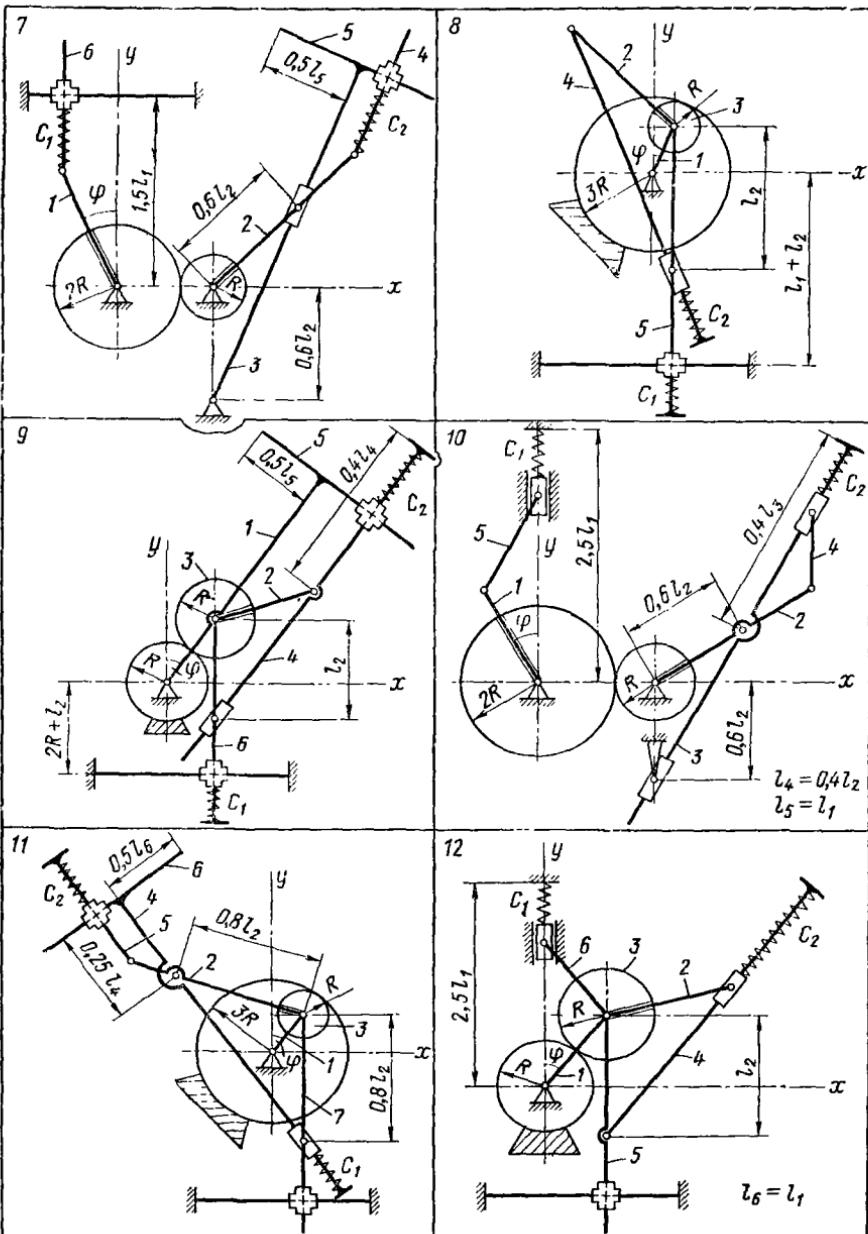


Рис. 225

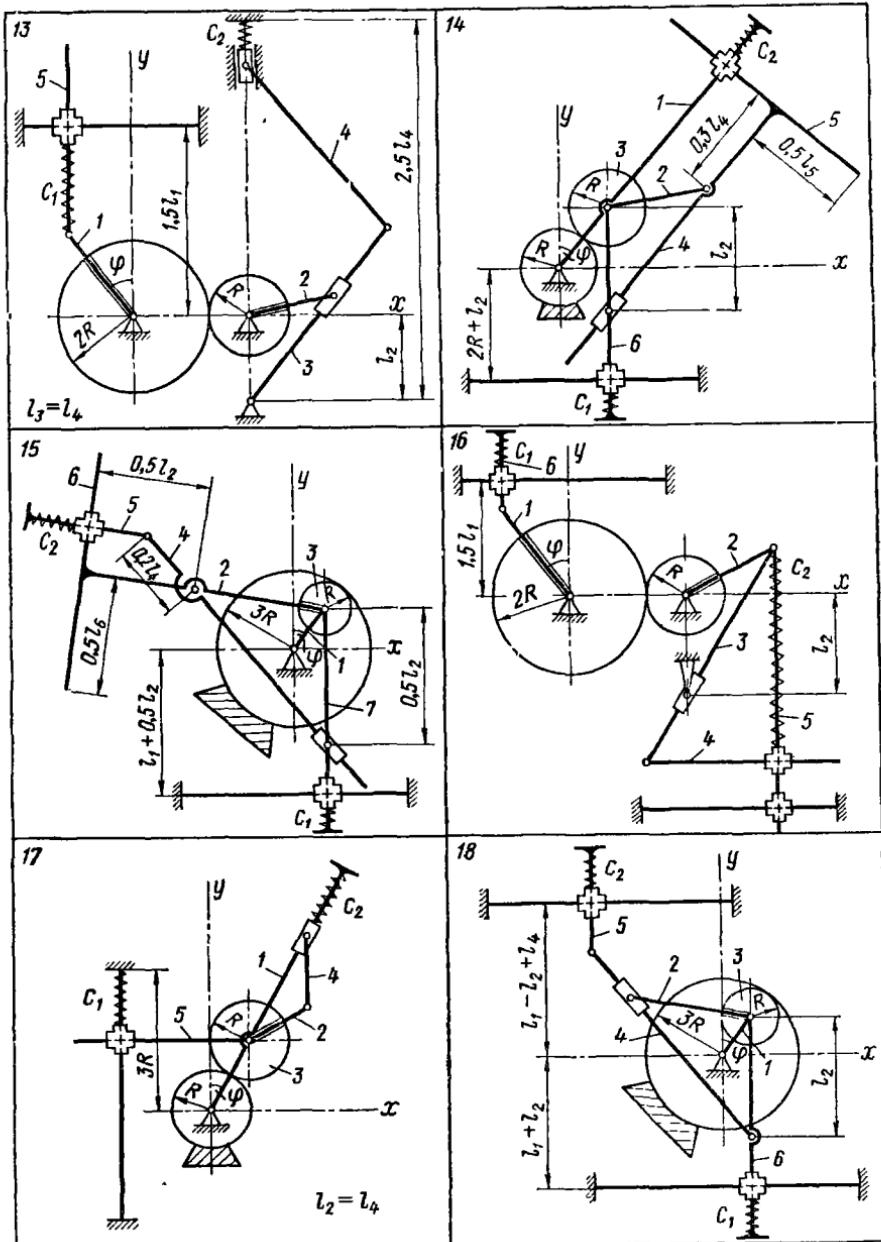


FIG. 226

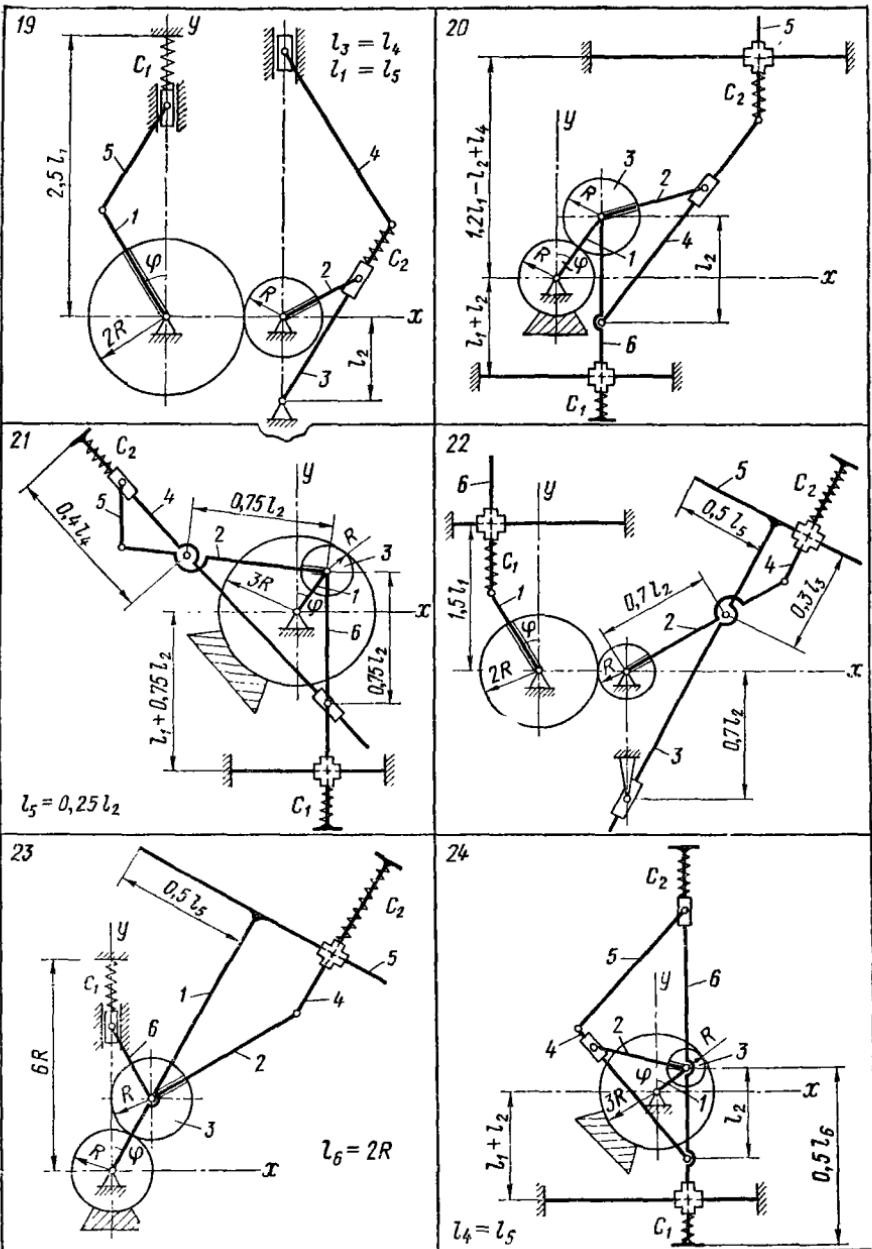


Рис 227

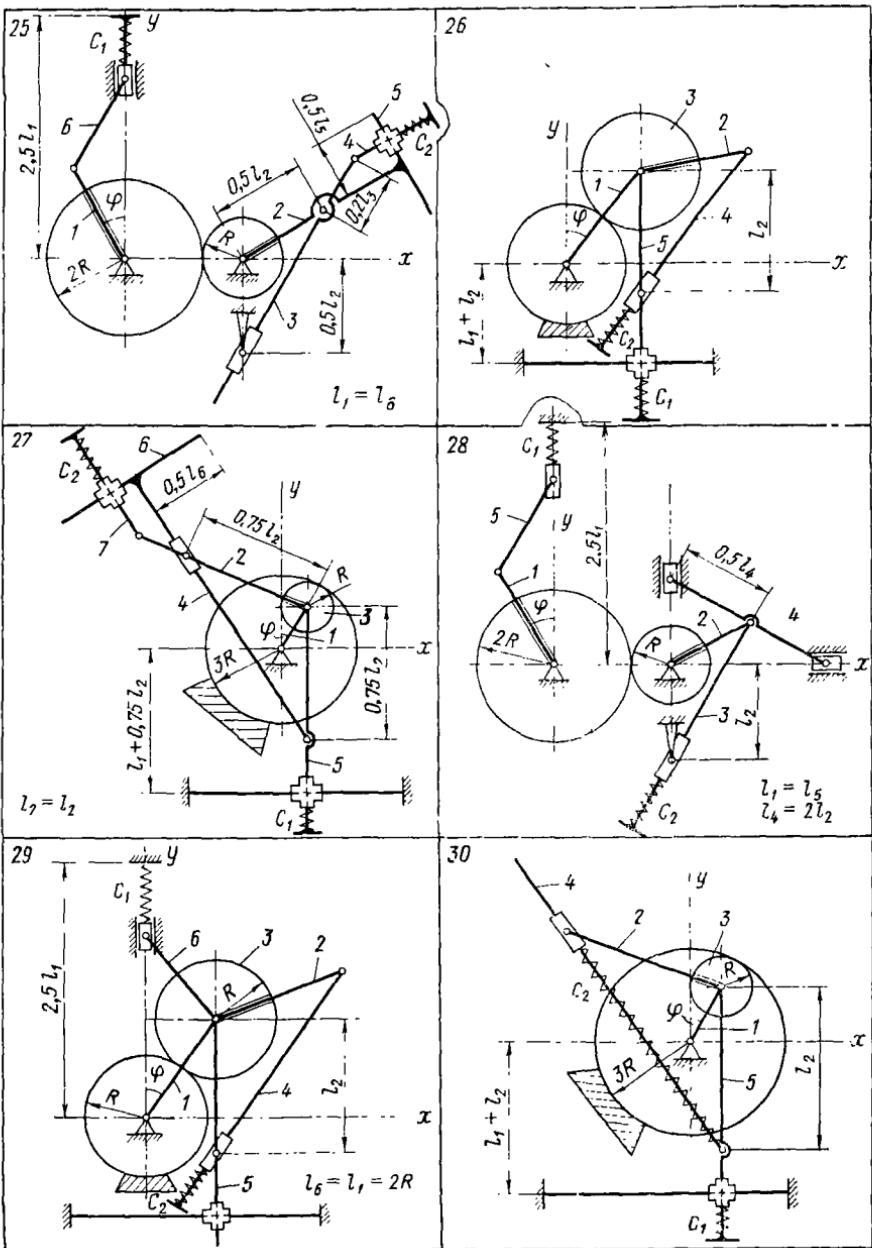


Рис. 228

Таблица 61

Номер гарнитуры (рис. 224—228)	Веса тел, Н						Длины стержней, м						Радиус $R, \text{м}$	Коэффициент жесткости пружин, Н/см	Длины пел-формированных пружин, м						
	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6	G_7	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	a_1	a_2	c_1	c_2			
1	4	2	6	3	1	—	—	0,2	0,15	0,4	0,9	0,2	—	—	—	0,05	0,02	40	60		
2	6	10	20	15	8	—	—	0,2	0,4	—	0,9	0,9	—	—	—	0,1	0,8	60	80		
3	2	3	6	4	6	—	—	0,7	0,15	—	0,15	0,2	—	—	—	0,1	0,2	30	20		
4	4	8	20	20	10	—	—	0,2	0,3	0,7	0,3	0,6	—	—	—	0,03	0,04	80	100		
5	6	6	30	12	15	—	—	0,4	0,9	—	2	1,8	—	—	—	0,6	0,8	60	40		
6	7	2	4	6	8	2	—	—	0,3	0,5	—	0,9	1,2	—	—	—	0,1	1,0	20	20	
7	2	5	20	12	10	—	—	0,2	0,3	—	1	0,3	0,4	—	—	—	0,1	0,1	30	60	
8	3	2	2	10	20	5	—	—	0,2	0,1	—	1,1	0,1	—	—	—	0,1	0,5	60	90	
9	4	4	5	15	2	4	—	—	0,4	0,5	1,5	0,2	0,2	—	—	—	0,1	0,2	20	90	
10	1	1	5	20	14	7	—	—	0,4	0,7	—	1,1	0,4	—	—	—	0,2	0,2	40	70	
11	2	3	30	8	5	2	—	—	0,2	0,2	—	0,8	0,5	—	—	—	0,1	0,1	80	120	
12	50	40	90	80	130	—	40	—	0,5	0,4	—	0,7	0,9	—	—	—	0,1	0,1	50	70	
13	70	15	60	100	100	120	100	50	80	60	—	0,3	0,3	—	—	—	0,2	0,2	100	120	
14	1,5	10	80	100	100	100	100	50	80	60	—	0,1	0,1	—	—	—	0,1	0,1	80	100	
15	2	6	7	1	9	—	—	0,3	0,2	—	0,3	0,2	—	—	—	0,9	0,8	40	50		
16	3	2	30	150	30	40	—	—	0,1	0,4	—	0,3	0,3	—	—	—	0,1	0,3	20	10	
17	100	100	100	150	90	150	80	—	—	0,1	0,4	—	0,7	0,7	—	—	—	0,1	0,1	120	120
18	10	40	80	90	150	70	50	—	—	0,4	0,3	0,7	0,7	0,7	—	—	0,1	0,6	40	60	
19	40	30	70	70	50	—	—	0,4	0,3	—	0,1	0,1	—	—	—	0,1	0,5	20	100		
20	15	20	60	30	40	20	—	0,1	0,1	—	0,1	0,1	—	—	—	0,5	0,5	40	40		
21	2	4	10	20	5	7	—	—	0,1	0,4	—	0,1	0,1	—	—	—	0,7	0,7	50	50	
22	80	100	200	120	70	250	—	—	0,8	0,8	—	2	0,4	—	—	—	0,4	0,3	200	200	
23	100	20	60	80	10	20	—	—	0,3	0,1	—	0,3	0,1	—	—	—	0,5	0,5	40	120	
24	20	40	100	80	80	100	—	—	0,08	0,08	—	0,3	0,3	—	—	—	0,1	0,1	40	60	
25	4	6	10	6	5	4	—	—	0,4	—	—	0,6	0,6	—	—	—	0,1	0,1	20	60	
26	20	20	60	50	80	—	—	0,1	0,1	—	0,2	0,2	—	—	—	0,1	0,1	40	80		
27	4	10	20	15	15	5	—	—	0,01	0,1	—	0,2	0,2	—	—	—	0,1	0,1	20	30	
28	20	20	50	40	30	25	—	—	0,2	0,2	—	0,5	0,5	—	—	—	0,6	0,6	40	40	
29	20	30	60	50	70	—	—	0,2	0,2	—	0,5	0,5	—	—	—	0,5	0,5	100	150		
30	20	60	130	80	80	120	—	—	0,6	0,6	—	0,2	0,2	—	—	—	0,1	0,2	40	120	

определяются корнями уравнения:

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0, \quad (1)$$

где P — потенциальная энергия системы.

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии элементов системы в поле сил тяжести и потенциальной энергии деформированных пружин.

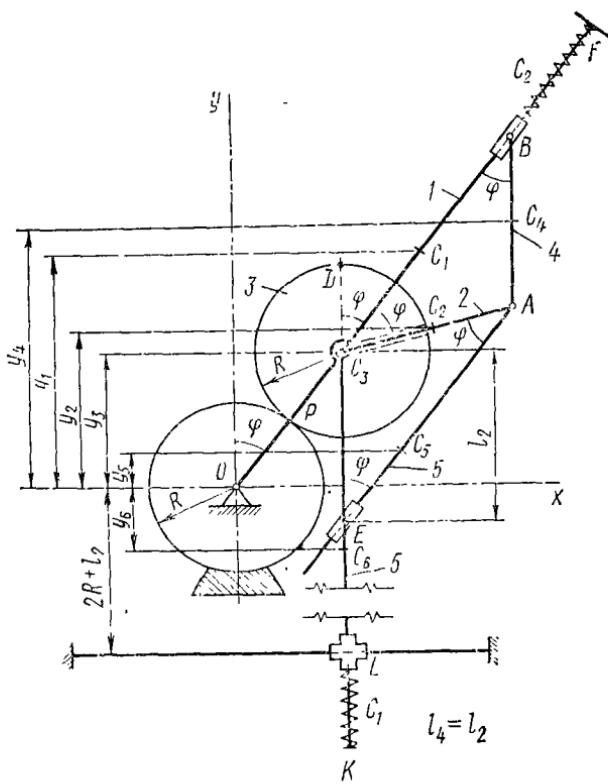


Рис. 229

В качестве нулевого уровня потенциальной энергии элементов в поле сил тяжести выберем ось Ox . Тогда для каждого i -го элемента при выбранном направлении оси y получим:

$$P_{Gi} = G_i y_i, \quad (2)$$

где y_i — вертикальная координата центра тяжести i -го элемента.

Так как при $\varphi = 0$ угол между стержнем 2 и осью Oy равен полулю, а качение подвижного колеса по неподвижному происходит без проскальзывания, то

$$\angle DC_3A = \varphi \cdot OC_3/C_3P = 2R\varphi/R = 2\varphi,$$

поэтому $\angle BC_3A = \varphi$.

Из равенств $l_2 = l_4$ и $l_2 = C_3 E$ следует, что:

$$\angle C_3 BA = \varphi \quad \text{и} \quad \angle C_3 EA = \angle C_3 AE = \varphi.$$

Полученные соотношения между углами позволяют для каждого i -го элемента представить соотношение (2) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{O_1} &= G_1 y_1 = G_1 \cdot OC_1 \cos \varphi = G_1 \cdot (l_1/2) \cdot \cos \varphi; \\ \Pi_{O_2} &= G_2 y_2 = G_2 (OC_3 \cos \varphi + C_3 C_2 \cos 2\varphi) = \\ &= G_2 (2R \cos \varphi + (l_2/2) \cdot \cos 2\varphi); \\ \Pi_{O_3} &= G_3 y_3 = G_3 \cdot OC_3 \cos \varphi = G_3 2R \cos \varphi; \\ \Pi_{O_4} &= G_4 y_4 = G_4 (OC_3 \cos \varphi + C_3 A \cos 2\varphi + AC_4) = \\ &= G_4 (2R \cos \varphi + l_2 \cos 2\varphi + l_4/2); \\ \Pi_{O_5} &= G_5 y_5 = G_5 (OC_3 \cos \varphi + C_3 A \cos 2\varphi - AC_5 \cos \varphi) = \\ &= G_5 [(2R - l_5/2) \cos \varphi + l_2 \cos 2\varphi]; \\ \Pi_{O_6} &= G_6 y_6 = G_6 (OC_3 \cos \varphi - C_3 C_6) = G_6 (2R \cos \varphi - l_6/2). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Потенциальная энергия j -й деформированной пружины определяется равенством

$$\Pi_{cj} = (1/2) c_j \lambda_i^2, \quad (4)$$

где λ_i — деформация j -й пружины.

Для пружин с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 равенство (4) примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{c_1} &= (1/2) c_1 \lambda_1^2 = (1/2) \cdot c_1 (LK - a_1)^2 = \\ &= (1/2) \cdot c_1 [l_6 - (2R + l_2 + OC_3 \cos \varphi) - a_1]^2 = \\ &= (1/2) \cdot c_1 [(l_6 - 2R - l_2 - a_1) - 2R \cos \varphi]^2 = \\ &= (1/2) c_1 [(l_6 - 2R - l_2 - a_1)^2 + 4R^2 \cos^2 \varphi - \\ &\quad - 4R (l_6 - R - l_2 - a_1) \cos \varphi]; \\ \Pi_{c_2} &= (1/2) \cdot c_2 \lambda_2^2 = (1/2) \cdot c_2 (BF - a_2)^2 = (1/2) \cdot c_2 (l_1 - OB - a_2)^2 = \\ &= (1/2) \cdot c_2 (l_1 - 2R - 2l_2 \cos \varphi - a_2)^2 = \\ &= (1/2) c_2 [(l_1 - 2R - a_2) - 2l_2 \cos \varphi]^2 = \\ &= (1/2) \cdot c_2 [(l_1 - 2R - a_2)^2 + 4l_2^2 \cos^2 \varphi - 4l_2 (l_1 - 2R - a_2) \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (5)$$

Суммируем соотношения (3) и (5) и приводим подобные члены при $\cos^2 \varphi$, $\cos \varphi$ и $\cos 2\varphi$:

$$\Pi = A \cos^2 \varphi - B \cos \varphi + C \cos 2\varphi + D, \quad (6a)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 2R^2 C_1 + 2l_2^2 C_2 = 2 (c_1 R^2 + c_2 l_2^2); \\ B &= -[G_1 l_1/2 + G_2 2R + G_3 2R + G_5 (2R - l_5/2) + \\ &+ G_4 2R + G_6 2R - 2R c_1 (l_6 - 2R - l_2 - a_1) - 2l_2 c_2 (l_1 - 2R - a_2)] = \\ &= G_5 l_5/2 + 2 [R c_1 (l_6 - 2R - l_2 - a_1) + l_2 c_2 (l_1 - 2R - a_2)] - \\ &\quad - G_1 l_1/2 - 2R (G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6); \\ C &= G_2 \cdot l_2/2 + G_4 l_2 + G_5 l_2 = l_2 (G_2/2 + G_4 + G_5), \end{aligned} \quad (6b)$$

D — свободный член, значение которого ввиду последующей операции дифференцирования можно не вычислять.

Производную от потенциальной энергии (6а) по обобщенной координате φ представим в виде:

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = -2A \cos \varphi \sin \varphi + B \sin \varphi - 2C \sin 2\varphi = \\ = -\sin \varphi (2A \cos \varphi - B + 4C \cos \varphi) = -\sin \varphi [2(A + 2C) \cos \varphi - B]. \quad (7)$$

На основании равенства (1) получаем, что в состоянии покоя

$$\sin \varphi [2(A + 2C) \cos \varphi - B] = 0, \quad (8)$$

откуда следует, что значения угла φ , соответствующие состояниям покоя, определяются двумя уравнениями:

$$\sin \varphi = 0; \quad (9)$$

$$\cos \varphi = \frac{B}{2(A + 2C)} \text{ при } \left| \frac{B}{2(A + 2C)} \right| \leqslant 1. \quad (10)$$

Для исследуемой системы значения коэффициентов A , B и C , вычисленные по формулам (6б), равны:

$$A = 2(c_1 R^2 + c_2 l_2^2) = 2(4000 \cdot 0,1^2 + 5000 \cdot 0,2^2) = 480 \text{ Нм};$$

$$B = G_5 \cdot l_5/2 + 2[Rc_1(l_6 - 2R - l_2 - a_1) + l_2 c_2(l_1 - 2R - a_2)] -$$

$$-G_1 \cdot l_1/2 - 2R(G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6) = 10 \cdot 0,5/2 +$$

$$+ 2[0,1 \cdot 4000(0,7 - 2 \cdot 0,1 - 0,2 - 0,1) + 0,2 \cdot 5000(0,8 - 2 \cdot 0,1 - 0,3) - \\ - 10 \cdot 0,8/2 - 2 \cdot 0,1(5 + 20 + 5 + 10 + 15) = 747,5 \text{ Нм};$$

$$C = l_2(G_2/2 + G_4 + G_6) = 0,2(5/2 + 5 + 10) = 3,5 \text{ Нм},$$

откуда

$$2(A + 2C) = 2(480 + 7) = 974 \text{ Нм.}$$

Проведенные вычисления показывают, что $B < 2(A + 2C)$. Следовательно, система имеет четыре состояния покоя, соответствующие корням уравнений (9) и (10):

из (9)

$$\varphi_1 = 0 \text{ и } \varphi_2 = \pi;$$

из (10)

$$\varphi_{3,4} = \arccos[B/2(A + 2C)] = \arccos(747,5/974) = \arccos 0,767,$$

что соответствует углам $\varphi_3 = 39^\circ 54'$ и $\varphi_4 = -39^\circ 54'$.

В общем случае из соотношения (9) следует, что вне зависимости от параметров системы существуют по крайней мере два значения обобщенной координаты φ , при которых система находится в состоянии покоя,

$$\varphi_1 = 0 \text{ и } \varphi_2 = \pi. \quad (11)$$

Так как при любых исходных данных $A > 0$ и $C > 0$, то уравнение (10) имеет решение лишь при $|B| \leq 2(A + 2C)$.

В зависимости от числовых значений коэффициентов A , B и C при решении задачи возможны три следующих случая.

Первый случай:

$$|B| > 2(A + 2C). \quad (12)$$

В этом случае положения покоя, определяемые углами φ_1 и φ_2 , единственные. Второй случай:

$$|B| = 2(A + 2C), \text{ т. е. } B = 2(A + 2C) \quad (13a)$$

или

$$B = -2(A + 2C). \quad (13b)$$

В этом случае выражение (10) примет вид

$$\cos \varphi = \pm 1.$$

Корни этого уравнения совпадают со значениями φ_1 и φ_2 из формулы (11). Следовательно, и в этом случае система имеет только два положения покоя, определяемые углами φ_1 и φ_2 .

Третий случай:

$$|B| < 2(A + 2C). \quad (14)$$

В этом случае, помимо φ_1 и φ_2 , появляются еще два угла φ_3 и φ_4 , соответствующие положениям покоя.

$$\varphi_{3,4} = \arccos \frac{B}{2(A + 2C)}. \quad (15)$$

При $B > 0$

$$0 < \varphi_3 < \pi/2 \text{ и } -\pi/2 < \varphi_4 < 0.$$

При $B < 0$

$$\pi/2 < \varphi_3 < \pi \text{ и } -\pi < \varphi_4 < -\pi/2.$$

Случай $B = 0$ не рассматриваем, так как ввиду равенства $I_2 = G_3 E$ положение системы при $\varphi = \pm \pi/2$ определяется неоднозначно.

2. Исследование устойчивости положений покоя рассматриваемой системы. Если в положении покоя ($\varphi = \varphi_k$) потенциальная энергия исследуемой системы имеет минимум, то по теореме Лагранжа—Дирихле это положение покоя устойчиво*.

Известно, что условие минимума функции P можно представить в виде:

$$(\partial^2 P / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_k} > 0, \quad (16)$$

где φ_k — значение обобщенной координаты, соответствующее положению покоя. Если представить равенство (7) в виде

$$\partial P / \partial \varphi = B \sin \varphi - (A + 2C) \sin 2\varphi,$$

то

$$\partial^2 P / \partial \varphi^2 = B \cos \varphi - 2(A + 2C) \cos 2\varphi. \quad (17)$$

При $\varphi = \varphi_1 = 0$ из (17) следует:

$$(\partial^2 P / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_1=0} = B - 2(A + 2C) = 747,5 - 974 = -226,5 \text{ Нм} < 0,$$

т. е. условие устойчивости (16) при $\varphi = \varphi_1$ не выполняется.

При $\varphi = \varphi_2 = \pi$ выражение (17) примет вид:

$$(\partial^2 P / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_2=\pi} = -B - 2(A + 2C) = -747,5 - 974 = -1721,5 \text{ Нм} < 0.$$

Следовательно, при $\varphi = \varphi_2$ условие устойчивости (16) также не выполняется.

Таким образом, теорема Лагранжа—Дирихле не позволяет судить о характере состояний покоя при $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$.

При $\varphi = \varphi_{3,4} = \arccos 0,767$

$$\cos \varphi_{3,4} = 0,767, \cos 2\varphi_{3,4} = 2 \cos^2 \varphi_{3,4} - 1 = 2 \cdot 0,767^2 - 1 = 0,176.$$

* Если потенциальная энергия системы при $\varphi = \varphi_k$ не имеет минимума, то для исследования характера устойчивости состояния покоя необходимо использовать теоремы Яншунова.

Тогда вторая производная от потенциальной энергии по обобщенной координате

$$\begin{aligned} (\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_{3,4}} &= B \cos \varphi_{3,4} - 2(A+2C) \cos 2\varphi_{3,4} = \\ &= 747,5 \cdot 0,767 - 974 \cdot 0,176 = 403 \text{ Нм} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, условие (16) оказывается при $\varphi = \varphi_{3,4}$ выполненным, откуда следует, что положения покоя, соответствующие обоим углам, устойчивы.

Ниже приведено исследование устойчивости положений покоя в общем виде для каждого из трех перечисленных случаев, определяемых формулами (12) — (14). Первый случай. Исследованию подлежат значения φ , определяемые формулами (11).

При $\varphi = \varphi_1 = 0$ из (17) следует:

$$(\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_1=0} = B - 2(A+2C).$$

Отсюда условие устойчивости (16) примет вид

$$B > 2(A+2C). \quad (18)$$

При $\varphi = \varphi_2 = \pi$

$$(\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_2=\pi} = -B - 2(A+2C)$$

и условие устойчивости этого положения покоя определится неравенством:

$$B < -2(A+2C). \quad (19)$$

Неравенства (18) и (19) совместны с неравенством (12). Следовательно, в первом случае устойчивым может оказаться как первое ($\varphi_1 = 0$), так и второе ($\varphi_2 = \pi$) положения покоя.

Второй случай. Исследованию по-прежнему подлежат значения φ , задаваемые формулами (11); при этом величина B определяется по одному из равенств (13).

При $\varphi = \varphi_1 = 0$ и $B = 2(A+2C)$

$$\begin{aligned} (\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_1=0} &= B - 2(A+2C) = 0, \\ B = 2(A+2C) \end{aligned}$$

Следовательно, значение второй производной не может служить критерием минимума потенциальной энергии. В этом случае необходимо вычислить старшие ($n > 2$) производные $(\partial^n \Pi / \partial \varphi^n)_{\varphi=\varphi_k}$. Если первая не равная нулю производная имеет четный порядок и при этом положительна, то при $\varphi = \varphi_k$ имеется минимум.

Если первая не равная нулю производная имеет нечетный порядок, то теорема Лагранжа — Дирихле не позволяет судить о характере состояния покоя

$$\partial^3 \Pi / \partial \varphi^3 = -B \sin \varphi + 4(A+2C) \sin 2\varphi; \quad (20)$$

$$\partial^4 \Pi / \partial \varphi^4 = -B \cos \varphi + 8(A+2C) \cos 2\varphi; \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (\partial^3 \Pi / \partial \varphi^3)_{\varphi_1=0} &= 0; \\ B = 2(A+2C) \end{aligned}$$

$$(\partial^4 \Pi / \partial \varphi^4)_{\varphi_1=0} = -B + 8(A+2C) = 6(A+2C).$$

Так как $A > 0$ и $C > 0$, то

$$\begin{aligned} (\partial^4 \Pi / \partial \varphi^4)_{\varphi=\varphi_1=0} &> 0, \\ B = 2(A+2C) \end{aligned}$$

Следовательно, при $\varphi_1 = 0$ и $B = 2(A+2C)$ состояние покоя рассматриваемой системы устойчиво.

При $\varphi = \varphi_2 = \pi$ и $B = 2(A+2C)$

$$\begin{aligned} (\partial^2 \Pi / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_2=\pi} &= -B - 2(A+2C) = -4(A+2C) < 0, \\ B = 2(A+2C) \end{aligned}$$

т. е. оказывается невыполненным условие устойчивости (16).

При $\varphi = \varphi_1 = 0$ и $B = -2(A + 2C)$

$$\frac{(\partial^2 H / \partial \varphi^2)_{\varphi=\varphi_1=0}}{B=-2(A+2C)} = -B - 2(A + 2C) = 0$$

Из (20) и (21) следует

$$\frac{(\partial^3 H / \partial \varphi^3)_{\varphi=\varphi_1=0}}{B=-2(A+2C)} = 0,$$

$$(\partial^4 H / \partial \varphi^4)_{\varphi=\varphi_1=0} = B + 8(A + 2C) = 6(A + 2C) > 0.$$

Равенство нулю третьего производного от потенциальной энергии и положительно четвертого производного заслуживает, что при $\varphi = \varphi_2 = -\pi$ и $B = -2(A + 2C)$ состояние покоя системы устойчиво.

Проведенное исследование позволяет сформулировать условия устойчивости для первого и второго случаев. Где $B = 2(A + 2C)$, то при $\varphi = \varphi_1 = 0$ соединение покоя устойчиво, когда $B < 2(A + 2C)$, а при $\varphi = \varphi_2 = \pi$ когда $B > 2(A + 2C)$.

Третий случай. Исследование поддается четырем значениям φ , определяемым формулами (11) и (15).

При $\varphi = \varphi_1 = 0$ условие устойчивости совпадает с неравенством (18), а при $\varphi = \varphi_2 = \pi$ с неравенством (19).

Неравенства (18) и (19) совместны с условием (14). Следовательно, при $|B| < 2(A + 2C)$ положения покоя, соответствующие углам φ_1 и φ_2 , не отвечают условию устойчивости.

При $\varphi = \varphi_{3,4}$

$$\cos \varphi_{3,4} = \frac{B}{2(A + 2C)};$$

$$\cos 2\varphi_{3,4} = 2 \cos^2 \varphi_{3,4} - 1 = \frac{B^2}{2(A + 2C)^2} - 1,$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right)_{\varphi=\varphi_{3,4}} &= \frac{B^2}{2(A + 2C)} - 2(A + 2C) \left[\frac{B^2}{2(A + 2C)^2} - 1 \right] = \\ &= 2(A + 2C) - \frac{B^2}{2(A + 2C)}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости (16) выражается в виде

$$2(A + 2C) > \frac{B^2}{2(A + 2C)} \text{ или } B^2 < 4(A + 2C)^2. \quad (22)$$

Неравенство (22) равно ильно условию (14), откуда следует, что углы φ_3 и φ_4 соответствуют положению устойчивого состояния покоя рассматриваемой системы.

Задание Д-22. Определение условий устойчивости заданного состояния покоя (равновесия) механической системы с одной и двумя степенями свободы (по теореме Лагранжа—Дирихле)

A. Определение условия устойчивости заданного состояния покоя (равновесия) механической системы с одной степенью свободы. Определить условие устойчивости заданного состояния покоя механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая массами упругих элементов.

Схемы механических систем тел 1—4 в состоянии покоя показаны на рис. 230—232. Каждая механическая система состоит из нескольких однородных тел весами G_i , где i — номер соответствующего тела на схеме. Во всех вариантах пружины, коэффициенты жесткости которых c_1 и c_2 , в положении покоя не деформированы.

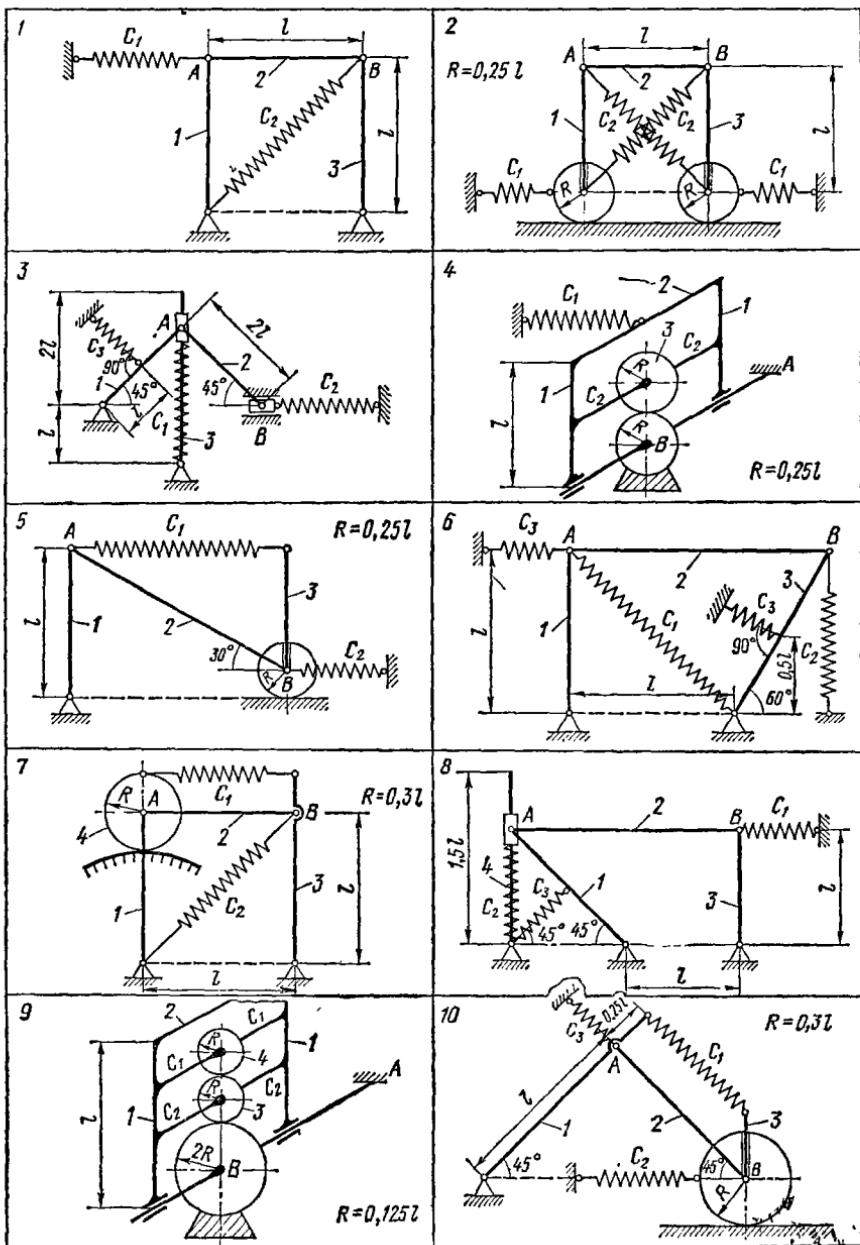


Рис. 230

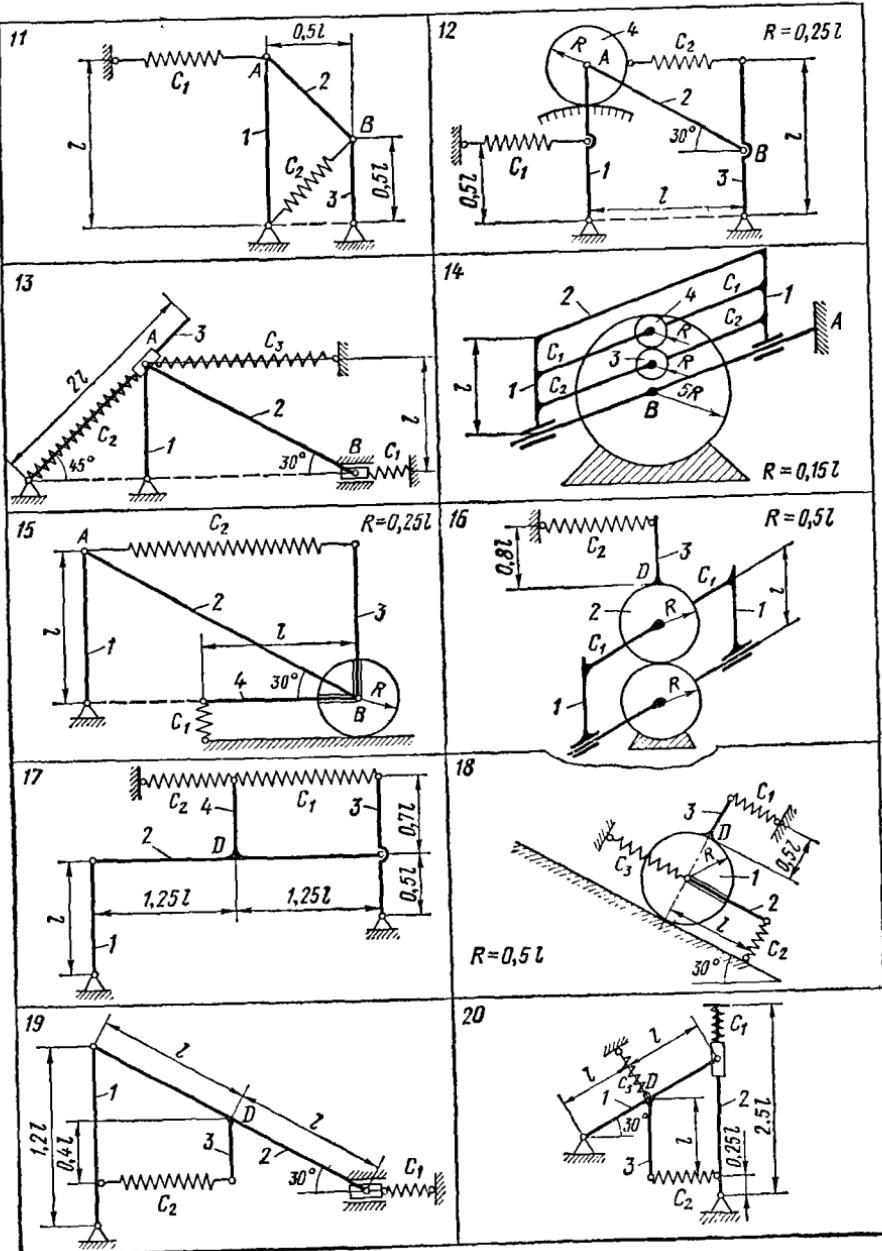


Рис. 231

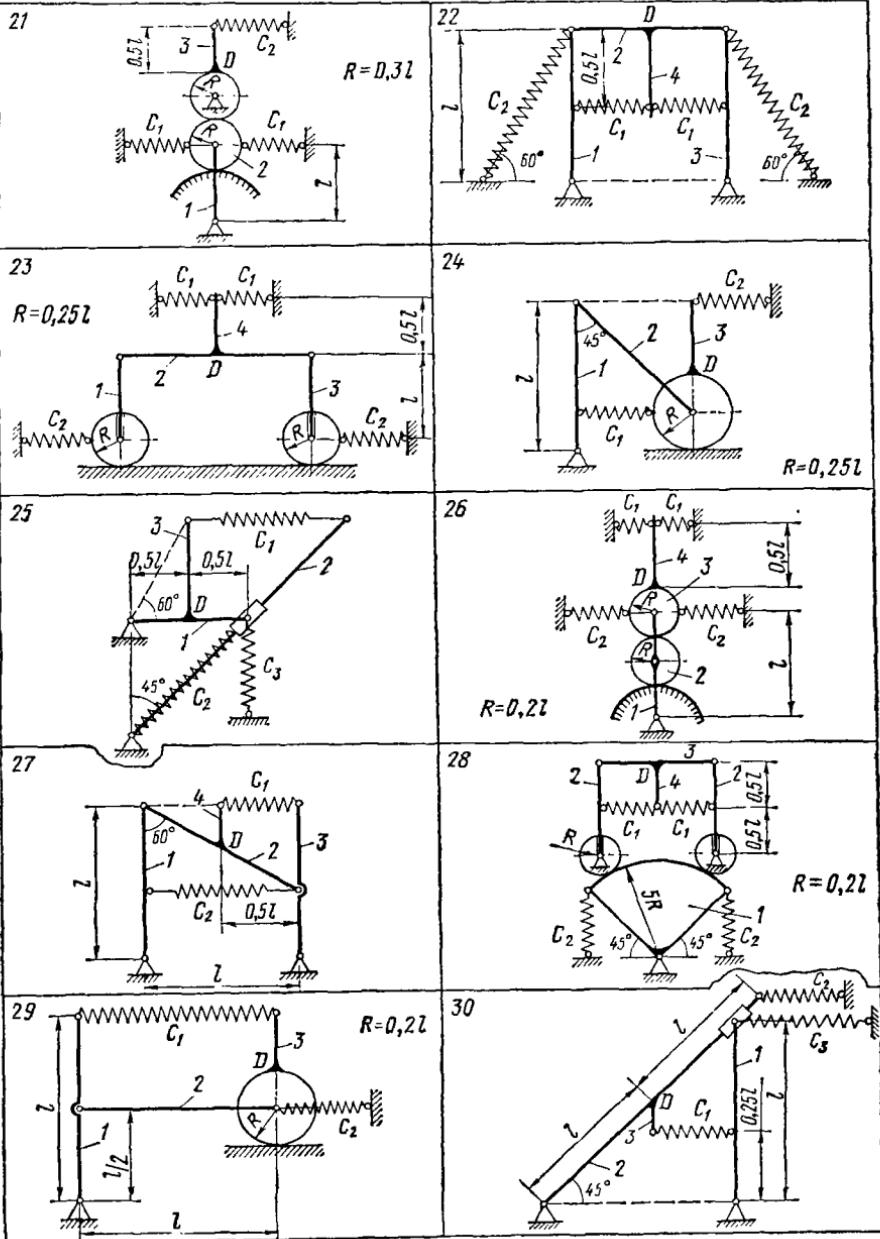


FIG. 232

Трение в шарнирах отсутствует и качение колес происходит без скольжения. При решении задачи считать все стержни тонкими однородными и диски однородными сплошными.

Пример решения задания. Определить условие устойчивости состояния покоя для механической системы тел 1—3 с одной степенью свободы, изображенной в положении покоя на рис. 233. Дано: веса элементов G_1 , G_2 , G_3 ; коэффициенты жесткости пружин c_1 , c_2 и c_3 ; длина стержня $OA = l$ и радиус диска $R = 0,3l$. Известно, что пружины, коэффициенты жесткости которых c_1 и c_2 , в положении покоя не деформированы.

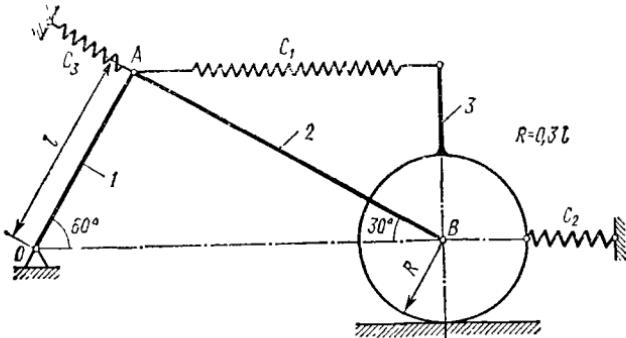


Рис. 233

Решение. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ_1 , на который отклоняется стержень 1 от положения покоя (рис. 234).

Исследуемая система является консервативной, следовательно, при $\varphi_1 = 0$ должно выполняться равенство:

$$(\partial P / \partial \dot{\varphi}_1)_{\varphi_1=0} = 0. \quad (1)$$

По теореме Лагранжа — Дирихле состояние покоя рассматриваемой системы является устойчивым, если паряду с равенством (1) выполняется условие:

$$(\partial^2 P / \partial \dot{\varphi}_1^2)_{\varphi_1=0} > 0. \quad (2)$$

При этом обобщенная координата φ_1 считается малой, поскольку проводится исследование устойчивости около положения $\varphi_1 = 0$.

Потенциальную энергию системы определим как сумму работ сил тяжести и сил упругости при перемещении системы от отклоненного положения в нулевое, каковым считаем положение покоя системы.

Неравенство (2) позволяет при вычислении потенциальной энергии ограничиться слагаемыми второго порядка малости относительно обобщенной координаты φ_1 . Для этого деформации пружин, не нагруженных в положении покоя, достаточно вычислить с точностью до величин первого порядка малости, а вертикальные смещения центров тяжести и деформации пружин, загруженных в положении покоя, — с точностью до величин второго порядка малости включительную.

В рассматриваемой задаче такая точность будет достигнута, если при определении углов поворота элементов системы ограничиться величинами первого порядка малости относительно φ_1 .

При повороте стержня 1 (OA) на угол φ_1 , все точки системы занимают новое положение. На рис. 234 точки, обозначенные буквами с верхним индексом в виде одного штриха, соответствуют положениям, показанным с точностью до величины первого порядка малости относительно φ_1 , а точки, обозначенные буквами с верхним индексом в виде двух штрихов, соответствуют положениям, в которых учтены перемещения второго порядка малости.

Опишем перемещения элементов системы, ограничиваясь величинами первого порядка малости. Точка A перемещается перпендикулярно к отрезку OA в точку A' , при этом:

$$AA' = OA \cdot \varphi_1 = l\varphi_1.$$

Перемещение стержня 2 (отрезка AB) можно представить как поворот на некоторый угол φ_2 вокруг точки P_2 , являющейся мгновенным центром вращения звена AB , при этом точка B переместится по горизонтали в точку B' .

$$BB' = AA' \cdot P_2B/P_2A; \quad \varphi_2 = AA'/P_2A,$$

где

$$P_2A = P_2O - OA = 2 \cdot OB - OA = 4 \cdot OA - OA = 3l;$$

$$P_2B = P_2O \cdot \cos 30^\circ = 4l \cdot \sqrt{3}/2 = 2l\sqrt{3},$$

откуда

$$BB' = l\varphi_1 \cdot (2l\sqrt{3}/3l) = 1,15l\varphi_1; \quad \varphi_2 = l\varphi_1/3l = 0,33\varphi_1.$$

Перемещение стержня 3 (DF), жестко скрепленного с диском, можно представить как поворот на угол φ_3 вокруг точки P_3 , являющейся мгновенным центром вращения диска, при этом перемещение точки E в точку E' будет перпендикулярным к отрезку P_3E .

$$\varphi_3 = \frac{BB'}{BP_3} = \frac{2\sqrt{3}l\varphi_1}{3R} = \frac{2\sqrt{3}l\varphi_1}{3 \cdot 0,3l} = 3,85\varphi_1;$$

$$EE' = \varphi_3 \cdot P_3E = \varphi_3 R \sqrt{2} = 2\sqrt{2/3} \cdot l\varphi_1 = 1,63l\varphi_1.$$

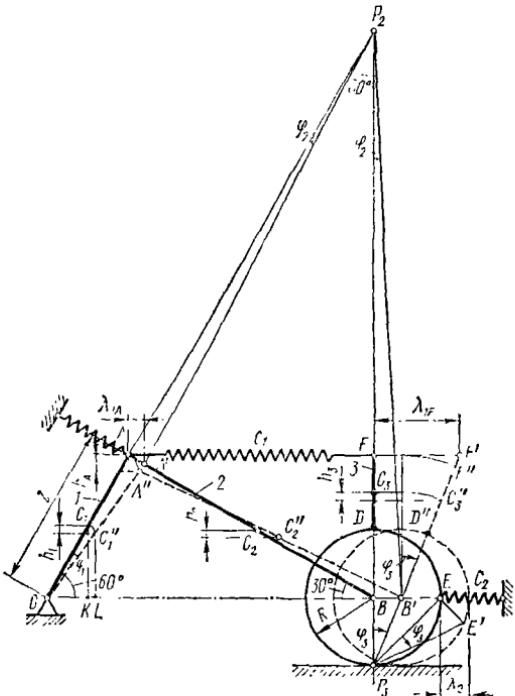


Рис. 234

Перемещение точки F перпендикулярно к P_3F и равно:

$$FF' = \varphi_3 \cdot FP_3 = \varphi_3 (l \cos 30^\circ + R) = 3,85\varphi_1 l (0,866 + 0,3) = 4,5l\varphi_1.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины, коэффициент жесткости которой c_j , определяется формулой

$$P_{cj} = (1/2) \cdot c_j (\lambda_j \pm f_{ctj})^2 - (1/2) \cdot c_j f_{ctj}^2 = (1/2) \cdot c_j \lambda_j^2 \pm c_j \lambda_j f_{ctj}, \quad (3)$$

где λ_j — деформация j -й пружины, вызванная отклонением стержня I на угол φ_1 от положения покоя; f_{ctj} — деформация j -й пружины в положении покоя (статическая деформация).

Для пружины, коэффициент жесткости которой c_1 , имеем:

$$\lambda_1 = \lambda_{IF} - \lambda_{IA},$$

где λ_{IA} и λ_{IF} — проекции перемещений точек A и F на ось первой пружины.

Зная перемещения AA' и FF' , можно получить:

$$\lambda_1 = FF' - AA' \cos 30^\circ = 4,5l\varphi_1 - 0,866l\varphi_1 = 3,63l\varphi_1.$$

Для пружины, коэффициент жесткости которой c_2 , деформация λ_2 равна проекции перемещения точки E на ось пружины:

$$\lambda_2 = EE' \cos 45^\circ = 2\sqrt{2/3} \cdot l\varphi_1 \sqrt{2}/2 = (2/\sqrt{3})l\varphi_1 = 1,15l\varphi_1.$$

Следует иметь в виду также, что $f_{ct1} = 0$ и $f_{ct2} = 0$.

Деформация пружины с коэффициентом жесткости c_3 , нагруженной в положении покоя, должна вычисляться с точностью до величин второго порядка малости относительно φ_1 . Так как ось этой пружины перпендикулярна к OA , то легко показать, что в выражении для λ_3 слагаемые второго порядка малости отсутствуют:

$$\lambda_3 = l\varphi_1 \text{ и } f_{ct3} \neq 0.$$

Подставляя найденные значения деформаций λ_1 , λ_2 и λ_3 в выражение (3), получаем значения потенциальной энергии для каждой деформированной пружины:

$$P_{c1} = (1/2) \cdot c_1 (3,63)^2 l^2 \varphi_1^2 = (1/2) \cdot c_1 \cdot 13,18 l^2 \varphi_1^2; \quad (4)$$

$$P_{c2} = (1/2) \cdot c_2 (4/3)^2 l^2 \varphi_1^2 = (1/2) \cdot c_2 \cdot 1,32 l^2 \varphi_1^2; \quad (5)$$

$$P_{c3} = (1/2) \cdot c_3 l^2 \varphi_1^2 + c_1 l\varphi_1 f_{ct3}. \quad (6)$$

Потенциальная энергия i -го элемента системы в поле сил тяжести определяется формулой:

$$P_{Gi} = G_i h_i, \quad (7)$$

где h_i — вертикальное перемещение центров тяжести элементов системы, вычисленное с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты φ_1 . Если при повороте звена OA на угол φ_1 , центр тяжести i -го тела поднимается, то $h_i > 0$; в противном случае $h_i < 0$. В рассматриваемой задаче h_i для всех элементов отрицательно.

Для звена OA :

$$\begin{aligned} h_1 &= -(C_1 K - C''_1 L) = -[OC_1 \cos 30^\circ - OC_1 \cos(30^\circ + \varphi_1)] = \\ &= -OC_1 [\cos 30^\circ - (\cos 30^\circ \cos \varphi_1 - \sin 30^\circ \sin \varphi_1)] = \\ &= -(l/2) \cdot [\cos 30^\circ (1 - \cos \varphi_1) + \sin 30^\circ \sin \varphi_1]. \end{aligned}$$

Учитывая малость φ_1 , получаем:

$$1 - \cos \varphi_1 = 2 \sin^2(\varphi_1/2) \approx \varphi_1^2/2 \text{ и } \sin \varphi_1 \approx \varphi_1.$$

Тогда

$$h_1 = -l/4 [(\sqrt{3}/2) \cdot \varphi_1^2 + \varphi_1] = -l/4 (0,866\varphi_1^2 + \varphi_1).$$

Для звена AB :

$$h_2 = (1/2) h_A;$$

так как $h_A = 2h_1$, то

$$h_2 = h_1 = -l/4 (0,866\varphi_1^2 + \varphi_1).$$

Для звена FD :

$$h_3 = -(BC_3 - B'C'_3 \cos \varphi_3) = -BC_3 (1 - \cos \varphi_3) = -BC_3 \varphi_3^2/2.$$

Так как FD — однородный стержень, то

$$BC_3 = (1/2) (l \cos 30^\circ + R) = 1/2 l (0,866 + 0,3) = 0,583l.$$

Используя значение угла φ_3 , найденное выше, получаем

$$h_3 = -0,583l (3,85\varphi_1)^2/2 = -4,32l\varphi_1^2.$$

Подставляя выражения для вертикальных перемещений центров тяжести в формулу (7), получаем значения потенциальной энергии элементов в поле сил тяжести

$$\Pi_{G_1} = -0,25G_1l(0,866\varphi_1^2 + \varphi_1); \quad (8)$$

$$\Pi_{G_2} = -0,25G_2l(0,866\varphi_1^2 + \varphi_1), \quad (9)$$

$$\Pi_{G_3} = -4,32G_3l\varphi_1^2. \quad (10)$$

Потенциальная энергия системы равна сумме выражений (4), (5), (6), (8), (9) и (10). После приведения подобных членов по степеням обобщенной координаты φ_1 имеем.

$$\begin{aligned} \Pi &= (1/2) \varphi_1^2 l [13,18c_1 + 1,32c_2 + c_3] l - 0,433 (G_1 + G_2) - 8,65G_3] + \\ &\quad + \varphi_1 l [-0,25 (G_1 + G_2) + c_1 f_{ct3}]. \end{aligned}$$

Из условия равновесия (1) следует, что

$$(\partial \Pi / \partial \varphi_1)_{\varphi_1=0} = -0,25 (G_1 + G_2) + c_1 f_{ct3} = 0,$$

поэтому

$$\Pi = (1/2) l [13,18c_1 + 1,32c_2 + c_3] l - 0,433 (G_1 + G_2) - 8,65G_3] \varphi_1^2. \quad (11)$$

После двукратного дифференцирования выражения потенциальной энергии (10) по обобщенной координате φ_1 получаем:

$$\partial^2 \Pi / \partial \varphi_1^2 = l [(13,18c_1 + 1,32c_2 + c_3) l - 0,433 (G_1 + G_2) - 8,65G_3].$$

В соответствии с неравенством (2) условие устойчивости рассматриваемого состояния покоя механической системы, изображенной на рис. 229, примет вид:

$$I(13,18c_1 + 1,32c_2 + c_3) - \\ - 0,433(G_1 + G_2) - \\ - 8,65G_3 > 0,$$

что равносильно:

$$l(c_3 + 1,32c_2 + 13,18c_1) > \\ > 0,433(G_1 + G_2 + 20G_3).$$

При выполнении этого неравенства заданное положение покоя является устойчивым.

Б. Определение условий устойчивости состояния покоя механической системы с двумя степенями свободы. Определить условия устойчивости заданного состояния покоя консервативной механической системы с двумя степенями свободы. Принять, что варианты механических систем в состоянии покоя получаются из схем, изображенных на рис. 226—228, следующим образом: а) в вариантах 1—15 стержень AB заменяется невесомой пружиной с коэффициентом жесткости c , при этом в вариантах 4, 9, 14 диск с центром B получает возможность вращаться, скользя без трения по опоре; б) в вариантах 16—30 считать, что в точке D находится шарнир и спиральная пружина

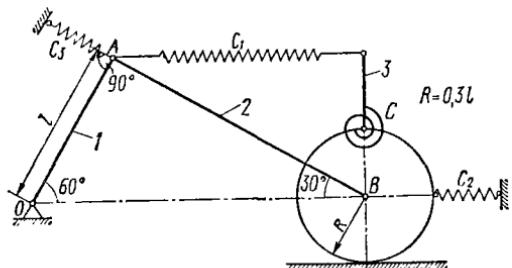


Рис. 235

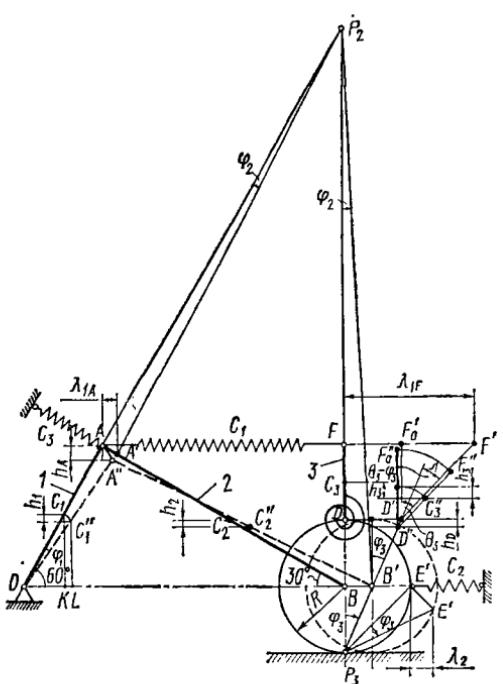


Рис. 236

пружина с коэффициентом крутильной жесткости c . Во всех вариантах пружины с коэффициентами жесткости c_1 , c_2 и c в положении покоя не деформированы.

Пример выполнения задания. Определить условия устойчивости для механической системы с двумя степенями свободы, изображенной в положении покоя на рис. 235. Эта схема получена из механической системы, рассмотренной в предыдущем примере. Дано: веса элементов G_1 , G_2 , G_3 ; коэффициенты жесткости упругих элементов

c_1, c_2, c_3 и c ; длина стержня $OA = l$ и радиус диска $R = 0,3l$. Известно, что спиральная пружина и пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 в положении покоя не деформированы.

Решение. Выберем в качестве обобщенных координат углы φ_1 и θ_3 , на которые стержни 1 и 3 отклоняются из положения покоя. Оба угла отсчитываются в одном направлении (см. рис. 236).

Исследуемая система является консервативной, поэтому при $\dot{\varphi}_1 = 0$ и $\dot{\theta}_3 = 0$ должны выполняться равенства:

$$(\partial P / \partial \dot{\varphi}_1)_{\dot{\theta}_3=0} = 0; \quad (\partial P / \partial \dot{\theta}_3)_{\dot{\varphi}_1=0} = 0. \quad (1)$$

По теореме Лагранжа—Дирихле состояние покоя рассматриваемой системы является устойчивым, если паряду с равенствами (1) выполняются два условия Сильвестра:

$$1. \quad c_{11} > 0 \text{ или } c_{22} > 0; \quad 2. \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, \quad (2)$$

где c_{11} , c_{22} и c_{12} — коэффициенты жесткости системы, вычисляемые по формулам:

$$\begin{aligned} c_{11} &= (\partial^2 P / \partial \dot{\varphi}_1^2)_{\dot{\theta}_3=0}; \quad c_{22} = -(\partial^2 P / \partial \dot{\theta}_3^2)_{\dot{\varphi}_1=0}; \\ c_{12} &= c_{21} = -(\partial^2 P / \partial \dot{\varphi}_1 \partial \dot{\theta}_3)_{\dot{\theta}_3=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом обобщенные координаты φ_1 и θ_3 считаются малыми. Соотношения (3) при вычислении потенциальной энергии позволяют ограничиться слагаемыми второго порядка малости относительно обобщенных координат.

Так как потенциальная энергия системы определяется суммой работ сил тяжести и сил упругости при перемещении системы из отклоненного положения в нулевое (положение покоя), то деформации пружин, не нагруженных в положении покоя, вычисляются с точностью до величин первого порядка малости, а вертикальные смещения центров тяжести тел и деформации пружин, нагруженных в положении покоя, — с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Для достижения указанной точности в выражениях углов поворота элементов рассматриваемой системы достаточно ограничиться величинами первого порядка малости относительно φ_1 и θ_3 .

При повороте стержня 1 (OA) на угол φ_1 , а стержня 3 (DF) на угол θ_3 , все точки системы занимают новое положение. На рис. 236 точки, обозначенные буквами с верхним индексом в виде одного штриха, соответствуют положениям, показанным с точностью до величин первого порядка малости относительно φ_1 и θ_3 , а точки, обозначенные буквами с верхним индексом в виде двух штрихов, соответствуют положениям, в которых учтены перемещения второго порядка малости.

Опинем перемещения элементов системы, ограничиваясь величинами первого порядка малости. Перемещения звеньев OA , AB и диска с центром в точке B полностью определяются обобщенной

координатой φ_1 . Перемещения точек A , B , E , а также углы φ_2 и φ_3 получены в предыдущем примере, в котором:

$$AA' = l\varphi_1; \quad BB' = 1,15l\varphi_1; \quad \varphi_2 = 0,33\varphi_1; \quad \varphi_3 = 3,85\varphi_1; \quad EE' = 1,63l\varphi_1.$$

Перемещение точки D происходит по перпендикуляру к P_3D и равно $DD' = P_3D \cdot \varphi_3 = 2R\varphi_3 = 2 \cdot 0,3l \cdot 3,85\varphi_1 = 2,31l\varphi_1$.

Перемещение стержня FD можно представить как сумму двух перемещений: поступательного вместе с полюсом D и вращательного вокруг этого полюса, при этом поворот FD вокруг точки D происходит на угол θ_3 . В соответствии с этим

$$\begin{aligned} FF' &= DD' + F'_0F' = DD' + D'F'_0 \cdot \theta_3 = 2,31l\varphi_1 + \\ &+ (l \cos 30^\circ - R) \theta_3 = 2,31l\varphi_1 + (0,866l - 0,3l) \theta_3 = \\ &= l(2,31\varphi_1 + 0,566\theta_3). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия деформированной пружины с коэффициентом жесткости c_j определяется формулой:

$$P_{cj} = (1/2) \cdot c_j (\lambda_j \pm f_{ctj})^2 - (1/2) \cdot c_j f_{ctj}^2 = (1/2) \cdot c_j \lambda_j^2 \pm c_j \lambda_j f_{ctj}, \quad (4)$$

где λ_j — деформация j -й пружины, вызванная отклонением стержней I и 3 на углы φ_1 и θ_3 соответственно; f_{ctj} — деформация пружины в положении покоя (статическая деформация).

Примечание. Для пружин 1 , 2 и 3 λ_j и f_{ctj} измеряются в единицах длины, а для спиральной пружины — в угловых единицах.

Для пружины с коэффициентом жесткости c_1 имеем:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_{1F} - \lambda_{1A} = FF' - AA' \cos 30^\circ = l(2,31\varphi_1 + 0,566\theta_3) - \\ &- 0,866l\varphi_1 = (1,44\varphi_1 + 0,566\theta_3)l. \end{aligned}$$

Для спиральной пружины:

$$\lambda = \theta_3 - \varphi_3.$$

Деформации λ_2 и λ_3 зависят только от угла φ_1 и вычислены в предыдущем примере:

$$\lambda_2 = 1,15/\varphi_1; \quad \lambda_3 = l\varphi_1.$$

Подставляя значения λ_1 , λ , λ_2 и λ_3 в (4), получаем:

$$\begin{aligned} P_{c1} &= (1/2) c_1 l^2 (1,44\varphi_1 + 0,566\theta_3)^2 = (1/2) \cdot c_1 l^2 (2,07\varphi_1^2 + \\ &+ 2 \cdot 0,814\varphi_1\theta_3 + 0,32\theta_3^2); \end{aligned} \quad (5)$$

$$P_{c2} = (1/2) \cdot c_2 l^2 (1,15)^2 \varphi_1^2 = (1/2) \cdot c_2 l^2 \cdot 1,32\varphi_1^2; \quad (6)$$

$$P_{c3} = (1/2) \cdot c_3 l^2 \varphi_1^2 + c_3 l f_{ct3} \varphi_1; \quad (7)$$

$$P_c = (1/2) \cdot c (\theta_3 - \varphi_3)^2;$$

так как $\varphi_3 = 3,85\varphi_1$, то

$$P_c = (1/2) \cdot c (0_3^2 - 7,7\theta_3\varphi_1 + 14,8\varphi_1^2). \quad (8)$$

Потенциальная энергия i -го элемента системы в поле сил тяжести определяется формулой

$$P_{Gi} = G_i h_i, \quad (9)$$

где h_i — вертикальное перемещение центров тяжести элементов системы, вычисленное с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенных координат φ_1 и θ_3 . Если центр тяжести i -го тела опускается, то $h_i < 0$; в противном случае $h_i > 0$. В рассматриваемой задаче для всех элементов h_i отрицательно.

Потенциальная энергия элементов 1 и 2 зависит только от координаты φ_1 и вычислена в предыдущем примере:

$$\Pi_{G1} = -0,25G_1l(0,866\varphi_1^2 + \varphi_1); \quad (10)$$

$$\Pi_{G2} = -0,25G_2l(0,866\varphi_1^2 + \varphi_1). \quad (11)$$

Вертикальное перемещение центра тяжести C_3 звена 3 складывается из вертикального смещения точки D при повороте диска на угол φ_3 и смещения точки C_3 при повороте стержня DF вокруг точки D на угол θ_3 :

$$h_3 = h_D + h_i,$$

где

$$\begin{aligned} h_D &= -(BD - B'D' \cos \varphi_3) = -(R - R \cos \varphi_3) = -R(1 - \cos \varphi_3) = \\ &= -R \cdot \varphi_3^2/2 = -0,15l\varphi_3^2 = -0,15(3,85)^2l\varphi_3^2 = -2,22l\varphi_3^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'_3 &= -(DC_3 - D'C'_3 \cos \theta_3) = -DC_3 \cdot \theta_3^2/2 = -1/4(l \cos 30^\circ - R)\theta_3^2 = \\ &= -0,25l(0,866 - 0,3)\theta_3^2 = -0,142l\theta_3^2; \end{aligned}$$

следовательно,

$$h_3 = -l(2,22\varphi_3^2 + 0,142\theta_3^2),$$

откуда

$$\Pi_{G3} = -G_3l(2,22\varphi_3^2 + 0,142\theta_3^2). \quad (12)$$

Потенциальная энергия системы равна сумме выражений (5)–(8), (10)–(12). После приведения подобных членов по степеням обобщенных координат φ_1 и θ_3 получаем.

$$\Pi = (1/2) \cdot c_{11}\varphi_1^2 + c_{12}\varphi_1\theta_3 + (1/2) \cdot c_{22}\theta_3^2 + A\varphi_1,$$

где

$$c_{11} = l^2(2,07c_1 + 1,32c_2 + c_3) + 14,8c - l[0,433(G_1 + G_2) + 4,44G_3];$$

$$c_{22} = 0,32c_1l^2 + c - 0,284G_3l;$$

$$c_{12} = 0,814c_1l^2 - 3,85c;$$

$$A = c_{3f_{ct}}l - 0,25l(G_1 + G_2).$$

Из условий равновесия (1) следует, что

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1}\right)_{\substack{\varphi_1=0 \\ \theta_3=0}} = A = 0,$$

поэтому

$$\Pi = (1/2) \cdot c_{11}\varphi_1^2 + c_{12}\varphi_1\theta_3 + (1/2) \cdot c_{22}\theta_3^2. \quad (13)$$

В соответствии с выражениями (2) и (3) условия устойчивости рассматриваемого состояния покоя примут вид:

$$c_{22} > 0 \text{ или } 0,32c_1l^2 + c - 0,284G_3l > 0$$

и

$$\{l^2(2,07c_1 + 1,32c_2 + c_3) + 14,8c - l[0,433(G_1 + G_2) + 4,44G_3]\} \times \\ \times [l(0,32c_1l - 0,284G_3) + c] - (0,814c_1l^2 - 3,85c)^2 > 0.$$

После перемножения, приведения подобных членов и деления на l во втором неравенстве окончательно получаем:

$$0,32c_1l^2 + c - 0,284G_3l > 0$$

и

$$l(2,07c_1 + 1,32c_2 + c_3)(c - 0,284G_3l) + 14,8c(0,32c_1l - 0,284G_3) - \\ - [0,433(G_1 + G_2) + 4,44G_3][l(0,32c_1l - 0,284G_3) + c] + \\ + 6,26c_1lc > 0.$$

При одновременном выполнении этих неравенств рассматриваемое состояние покоя является устойчивым.

КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Задание Д-23. Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы

Определить частоту и период малых свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы, пренебрегая силами сопротивления и массами нитей.

Найти уравнение движения груза 1 $y = y(t)$, приняв за начало отсчета положение покоя груза 1 (при статической деформации пружин). Найти также амплитуду колебаний груза 1.

Схемы систем показаны на рис. 237—239, а необходимые данные приведены в табл. 62.

В задании приняты следующие обозначения: 1 — груз массой m_1 ; 2 — блок массой m_2 и радиусом r_2 (сплошной однородный диск); 3 — блок массой m_3 и радиусом инерции i_x ; 4 — сплошной однородный диск массой m_4 и радиусом r_4 ; 5 — диск массой m_5 и радиусом инерции i_z ; 6 — тонкий однородный стержень массой m_6 и длиной l ; 7 — стержень, масса которого не учитывается; c — коэффициент жесткости пружины; y_0 — начальное отклонение груза 1 по вертикали от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины; \dot{y}_0 — проекция начальной скорости \vec{v}_0 груза 1 на вертикальную ось.

На рис. 237—239 системы тел 1—7 показаны в положении покоя (при статической деформации пружин).

В вариантах 5, 6, 14 и 23 стержень 6 жестко соединен с диском 4.

Пример выполнения задания. Дано: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_4 = 1$, $m_6 = 3$ кг; $l = 0,6$ м; $c = 20$ Н/см; $y_0 = 0,2$ см; $\dot{y}_0 = 8$ см/с (рис. 240).

Определить циклическую частоту k и период T малых свободных колебаний системы, а также получить уравнение $y = y(t)$ колебаний груза 1 и найти амплитуду a его колебаний.

Решение. Воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода для консервативной системы. Приняв за обобщенную координату

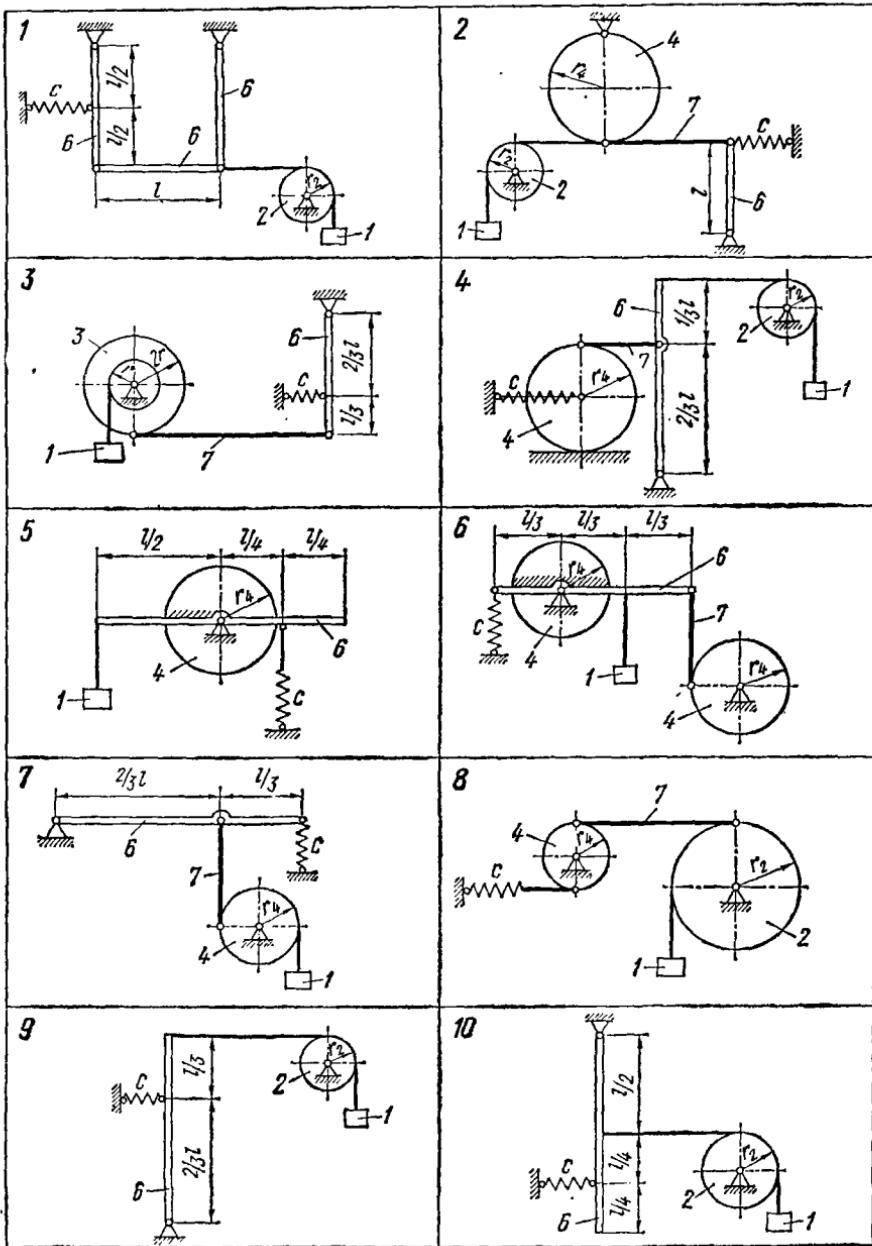
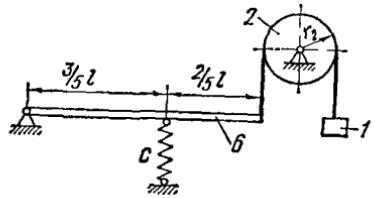
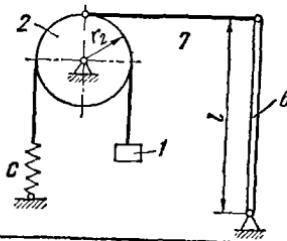


Рис. 237

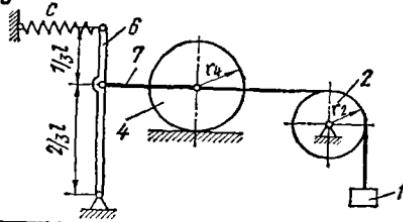
11



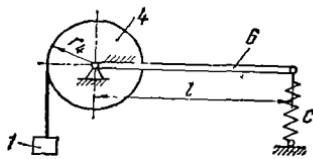
12



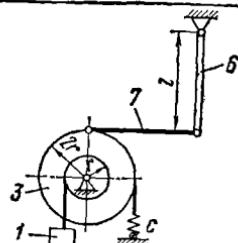
13



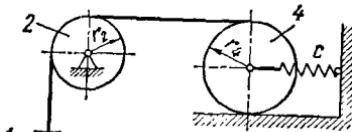
14



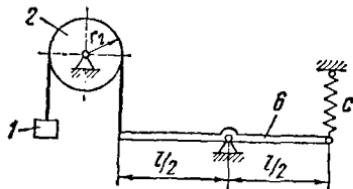
15



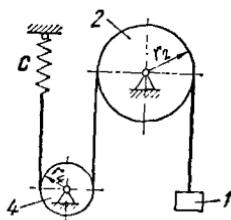
16



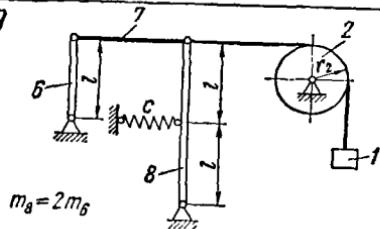
17



18



19



20

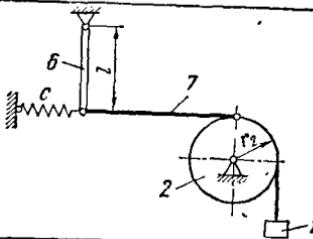
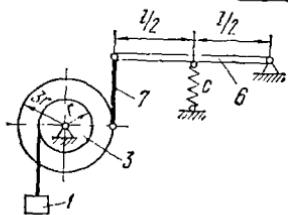
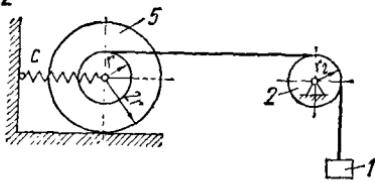


Рис. 238

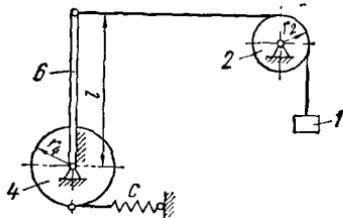
21



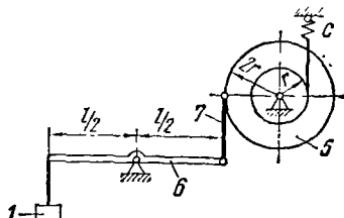
22



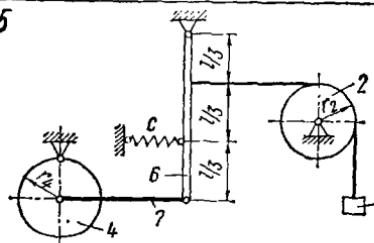
23



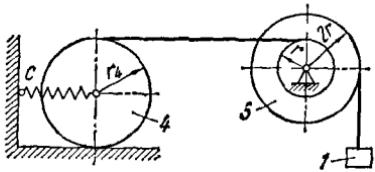
24



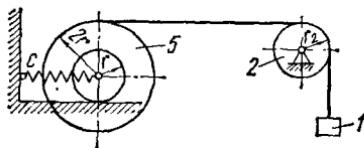
25



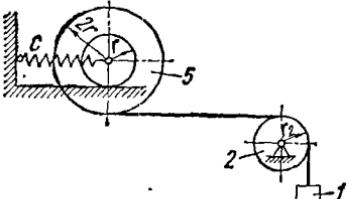
26



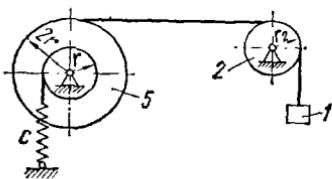
27



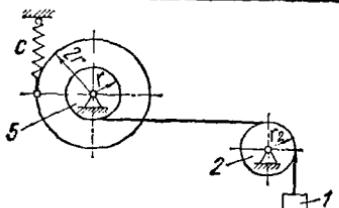
28



29



30



Picc 239

Таблица 62

Номер варианта (рис. 237—239)	<i>t</i>	<i>t_x</i>	<i>t'_x</i>	<i>r₄</i>	<i>m₁</i>	<i>m₂</i>	<i>m₃, m₄</i>	<i>m₆</i>	<i>H</i> см	Начальные условия (<i>t</i> = 0)	
	м	м	м	кг	м	м	с	см		у ₀ , см	у̇ ₀ , см/с
1	0,5	—	—	—	1	2	—	3	40	0,1	5,0
2	0,5	—	—	0,2	1	2	2	3	40	0	6,0
3	0,5	(3/2) <i>r</i>	—	—	1	—	4	3	20	0,2	7,0
4	0,6	—	—	—	1	2	3	2	36	0,2	0
5	0,6	—	—	0,15	1	—	3	3	16	0	8,0
6	0,6	—	—	0,15	1	—	1	1	40	0,3	7,0
7	—	—	—	—	—	—	2	2	40	0,4	0
8	—	—	—	—	1	3	2	—	40	0	6,0
9	0,6	—	—	—	1	2	—	3	38	0,5	5,0
10	0,6	—	—	—	1	2	—	3	32	0	6,0
11	—	—	—	—	1	2	—	3	30	0,4	7,0
12	0,5	—	—	—	1	2	—	3	20	0,2	0
13	0,3	—	—	—	1	1	1	2	32	0	8,0
14	0,4	—	—	0,1	1	—	2	3	20	0	7,0
15	0,4	<i>r V</i> 3	—	—	1	—	2	2	20	0,1	0
16	—	—	—	—	1	2	3	—	32	0,3	6,0
17	—	—	—	—	1	2	—	2	20	0	5,0
18	—	—	—	—	1	2	1	—	40	0	6,0
19	0,2	—	—	—	1	1	—	1	32	0,1	0
20	0,5	—	—	—	1	2	—	3	20	0,1	7,0
21	—	2 <i>r</i>	—	—	1	—	2	3	32	0	8,0
22	—	—	<i>r V</i> 2	—	1	2	4	—	40	0,1	7,0
23	0,4	—	—	0,2	1	2	2	3	40	0,3	0
24	—	—	<i>r V</i> 3	—	1	—	3	2	40	0	6,0
25	0,3	—	—	0,1	1	2	2	1	40	0,2	5,0
26	—	<i>r V</i> 2	—	—	1	—	2	—	40	0,3	0
27	—	—	3 <i>r</i> /2	—	1	2	3	—	40	0	6,0
28	—	—	<i>r V</i> 3	—	1	2	3	—	40	0,2	0
29	—	—	4 <i>r</i> /3	—	1	2	3	—	40	0	7,0
30	—	—	<i>r V</i> 2	—	1	2	3	—	40	0,3	7,0

системы вертикальное отклонение *y* груза 1 от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = - \frac{dP}{dy}, \quad (1)$$

где *T* — кинетическая энергия системы; *P* — потенциальная энергия системы.

Кинетическую энергию *T* вычислим с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной скорости *ẏ*, а потенциальную энергию *P* — с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты *y*.

Найдем кинетическую энергию системы, равную сумме кинетических энергий тел 1, 2, 6 и 4:

$$T = T_1 + T_2 + T_6 + T_4,$$

выразив линейные и угловые скорости, которыми определяется кинетическая энергия тел этой системы, через обобщенную скорость \dot{y} .

Кинетическая энергия груза 1, движущегося поступательно со скоростью $v = \dot{y}$:

$$T_1 = m_1 \dot{y}^2 / 2.$$

Кинетическая энергия блока 2 (сплошного однородного диска), вращающегося вокруг неподвижной оси O_{2x} :

$$T_2 = J_{2x} \omega_2^2 / 2, \text{ где } J_{2x} = m_2 r_2^2 / 2, \omega_2 = \dot{y} / r_2,$$

т. е.

$$T_2 = (m_2 r_2^2 / 2 \cdot 2) \cdot \dot{y}^2 / r_2^2 = m_2 \dot{y}^2 / 4.$$

Кинетическая энергия тонкого однородного стержня 6, жестко связанного с блоком 2 и вращающегося вокруг неподвижной оси O_{2x} :

$$T_6 = (J_{6x} \cdot \omega_6^2) / 2, \text{ где } J_{6x} = m_6 l^2 / 3; \omega_6 = \omega_2 = \dot{y} / r_2,$$

т. е.

$$T_6 = (m_6 l^2 / 3 \cdot 2) (\dot{y} / r_2)^2,$$

так как $r_2 = l/4$, то

$$T_6 = 8m_6 \dot{y}^2 / 3.$$

Кинетическая энергия сплошного однородного диска 4, совершающего плоское движение,

$$T_4 = m_4 v_c^2 / 2 + J_{cx} \omega_4^2 / 2, \text{ где } J_{cx} = m_4 r_4^2 / 2.$$

Скорость центра тяжести диска v_c и угловую скорость ω_4 можно определить следующим образом. Так как рассматриваются малые колебания, то

$$v_B = v_A,$$

а ввиду того, что диск катится без скольжения

$$v_C = v_B / 2,$$

следовательно,

$$v_C = v_A / 2 = \omega_6 l / 2 = \omega_2 l / 2 = \dot{y} l / 2r_2 = 2\dot{y}, \quad \omega_4 = v_C / r_4 = 2\dot{y} / r_4.$$

Подставляем значения J_{cx} , v_C и ω_4 в выражение для T_4 :

$$T_4 = m_4 4\dot{y}^2 / 2 + m_4 r_4^2 4\dot{y}^2 / 4r_4^2 = 3m_4 \dot{y}^2.$$

Таким образом, кинетическая энергия рассматриваемой механической системы

$$\begin{aligned} T &= T_1 + T_2 + T_6 + T_4 = m_1 \dot{y}^2 / 2 + m_2 \dot{y}^2 / 4 + (8/3) \cdot m_6 \dot{y}^2 + 3m_4 \dot{y}^2 = \\ &= (1/2) \cdot [m_1 + m_2/2 + (16/3)m_6 + 6m_4] \dot{y}^2. \end{aligned}$$

Найдем потенциальную энергию системы, которая определяется рабочей силой тяжести системы и силы упругости пружины на перемещении системы из отклоненного положения, когда груз имеет координату y , в пульевое положение, которым считаем положение покоя системы:

$$P = P_I + P_{II}.$$

Потенциальная энергия, соответствующая силам тяжести при указанном перемещении

$$P_1 = -G_1 y - G_6 h,$$

где h — вертикальное смещение центра тяжести стержня b , которое вычисляем с точностью до величин второго порядка малости относительно обобщенной координаты y .

По рис. 241

$$h = l/2 - (l/2) \cdot \cos \varphi = (l/2) \cdot (1 - \cos \varphi).$$

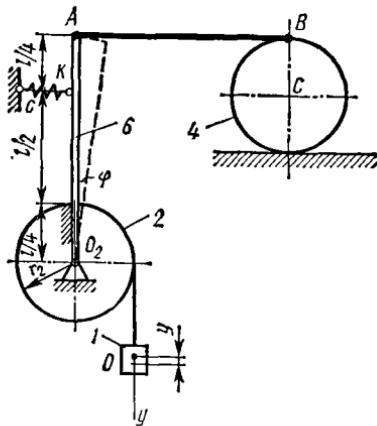


Рис. 240

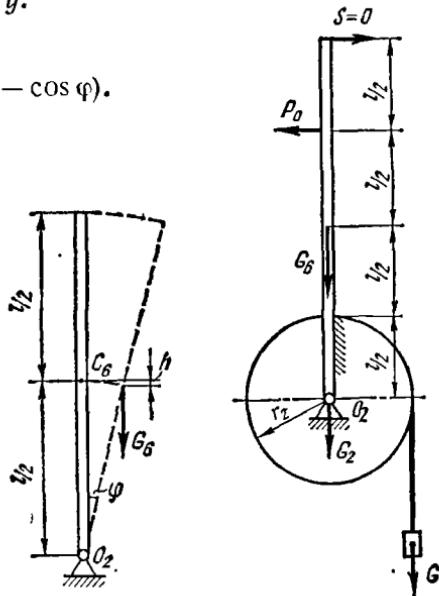


Рис. 241

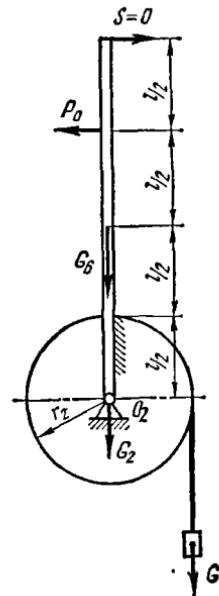


Рис. 242

Ограничиваюсь в формуле разложения

$$\cos \varphi = 1 - \varphi^2/2! + \varphi^4/4! - \dots$$

двумя первыми членами и учитывая, что

$$\varphi = y/r_2 = 4y/l,$$

имеем

$$h = (l/2) \cdot \varphi^2/2 = (l/4) \left(\frac{4y}{l} \right)^2 = 4y^2/l.$$

Таким образом,

$$P_1 = -G_1 y - G_6 \cdot 4y^2/l.$$

Потенциальная энергия деформированной пружины при указанном перемещении системы равна:

$$P_{11} = c(f_{ct} + \lambda_K)^2/2 - cf_{ct}^2/2,$$

где f_{ct} — статическая деформация пружины; λ_K — перемещение точки прикрепления пружины K , соответствующее координате y .

Поскольку (см. рис. 240)

$$\frac{\lambda_K}{y} = \frac{(3/4) \cdot l}{(1/4) \cdot l},$$

т. е. $\lambda_K = 3y$, то

$$P_{II} = \frac{c(f_{ct} + 3y)^2}{2} - \frac{cf_{ct}^2}{2} = 3f_{ct}y + \frac{9}{2}cy^2.$$

Потенциальная энергия системы

$$P = P_I + P_{II} = -G_1y - (4G_6/l) \cdot y^2 + 3cf_{ct}y + (9/2) \cdot cy^2.$$

Так как в положении покоя, соответствующем статической деформации пружины

$$(\partial P / \partial y)_{y=0} = 0,$$

то

$$-G_1 + 3cf_{ct} = 0. \quad (a)$$

Уравнение (а) можно получить также, составив уравнение моментов сил $\sum M_{iO_2}$ для положения покоя системы (рис. 242)

$$\sum M_{iO_2} = P_0 \cdot (3/4) \cdot l - G_1 r_2 = 0$$

или

$$cf_{ct} \cdot (3/4) \cdot l - G_1 \frac{l}{4} = 0,$$

т. е. $3cf_{ct} - G_1 = 0$.

Таким образом, потенциальная энергия рассматриваемой механической системы

$$P = \frac{9}{2}cy^2 - \frac{4G_6}{l}y^2 = \frac{1}{2} \left(9c - \frac{8G_6}{l} \right) y^2.$$

Найдем значения членов уравнения (1):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) &= \left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4 \right) \ddot{y}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} &= 0, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \left(9c - \frac{8G_6}{l} \right) y. \end{aligned}$$

Уравнение (1) приобретает вид

$$\left(m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4 \right) \ddot{y} + \left(9c - \frac{8G_6}{l} \right) y = 0$$

или

$$\ddot{y} + \frac{9c - 8G_6/l}{m_1 + \frac{m_2}{2} + \frac{16}{3}m_6 + 6m_4} y = 0.$$

Обозначив k^2 коэффициент при y , имеем:

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (2)$$

Циклическая частота свободных колебаний

$$k = \sqrt{\frac{9c - 8G_6/l}{m_1 + m_2/2 + (16/3)m_6 + 6m_4}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 2000 - (8 \cdot 3 \cdot 9,81)/0,6}{1 + 2/2 + (16/3) \cdot 3 + 6 \cdot 1}} = 27,1 \text{ c}^{-1}.$$

Период свободных колебаний

$$T = 2\pi/k = 2 \cdot 3,14/27,1 = 0,23 \text{ с.}$$

Интегрируя уравнение (2), получаем уравнение движения груза I

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Для определения постоянных C_1 и C_2 найдем уравнение скорости груза:

$$\dot{y} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt$$

и воспользуемся начальными условиями задачи. Из уравнений $y = y(t)$ и $\dot{y} = \dot{y}(t)$ при $t = 0$ имеем

$$y_0 = C_1, \quad \dot{y}_0 = kC_2.$$

Следовательно,

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \dot{y}_0/k.$$

Подставляем эти значения C_1 и C_2 в уравнение $y = y(t)$

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cos kt + (\dot{y}_0/k) \cdot \sin kt, \\ y &= 0,2 \cos 27,1t + 0,3 \sin 27,1t. \end{aligned}$$

Уравнение $y = y(t)$ можно получить в другом виде, если перейти к другим постоянным интегрирования a и β , приняв

$$C_1 = a \sin \beta, \quad C_2 = a \cos \beta.$$

Тогда $y = a \sin(kt + \beta)$,

где

$$a = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \text{ и } \beta = \arctg(C_1/C_2)$$

или

$$a = \sqrt{y_0^2 + (\dot{y}_0/k)^2};$$

$$\beta = \arctg(ky_0/\dot{y}_0).$$

Найдем числовые значения a и β :

$$a = \sqrt{0,2^2 + (8,0/27,1)^2} = 0,36 \text{ см};$$

$$\beta = \arctg(27,1 \cdot 0,2/8) = \arctg 0,6775.$$

Так как $\sin \beta > 0$ ($C_1 > 0$), то

$$\beta = 34^\circ 07' = 0,595 \text{ рад.}$$

Окончательно

$$y = 0,36 \sin(27,1t + 0,595) \text{ см.}$$

Задание Д-24. Исследование вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы

В механической системе тел $I - 2$ с одной степенью свободы возникают вынужденные колебания под действием силового возмущения. Схемы механических систем в положении покоя показаны на рис. 243 — 245. Необходимые сведения о параметрах системы и силового возмущения приведены в табл. 63. Диссипативные свойства системы заданы логарифмическим декрементом колебаний системы.

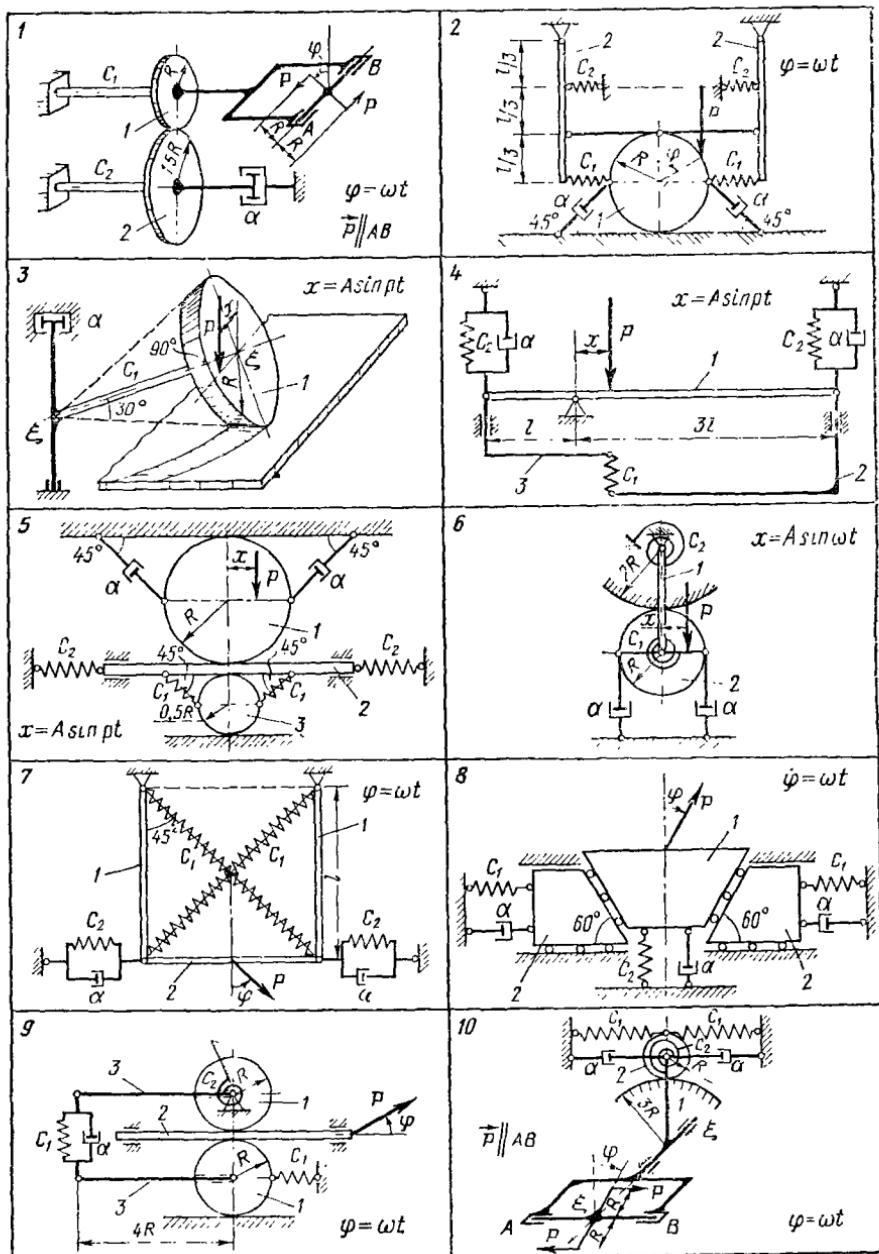
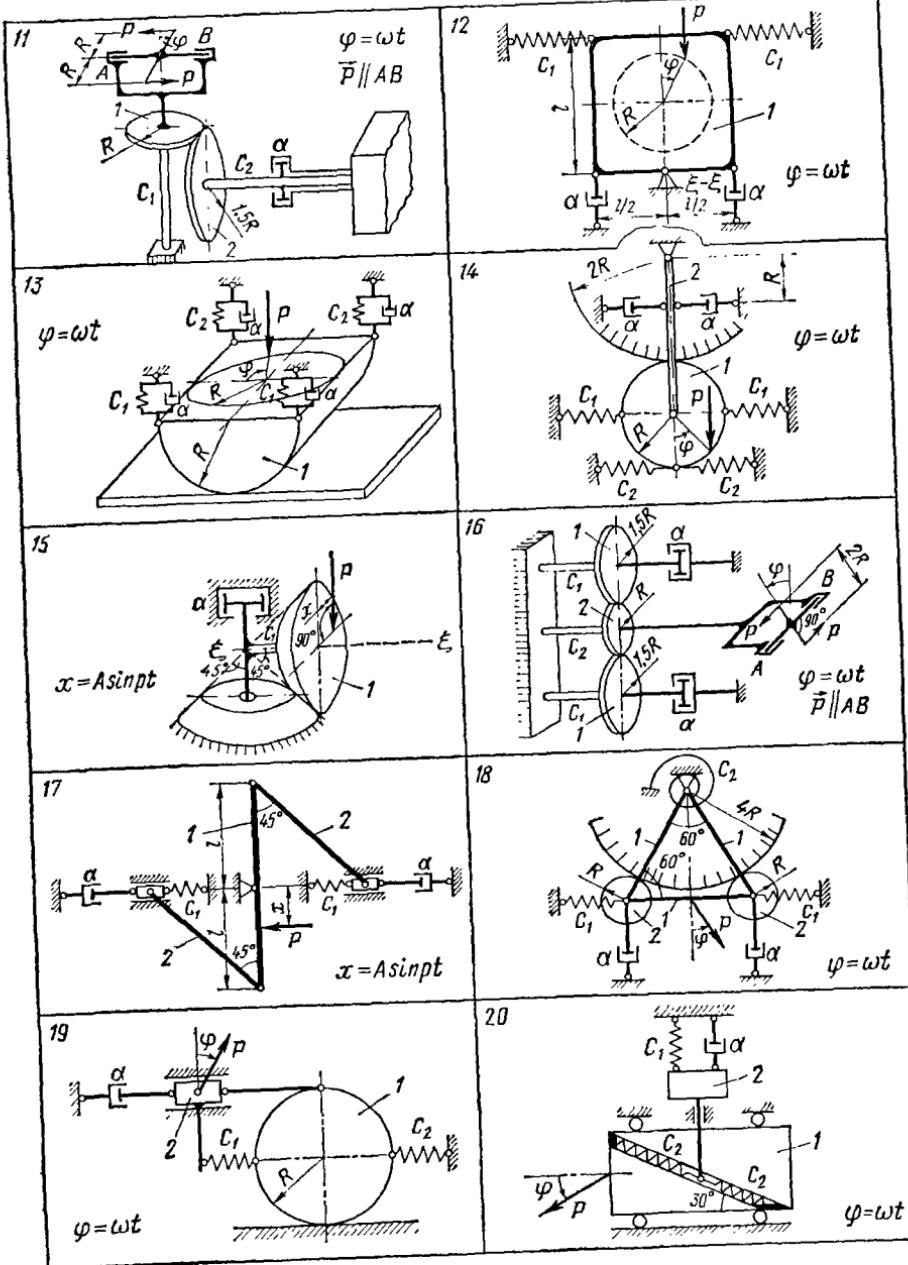


Рис. 243



Плт 244

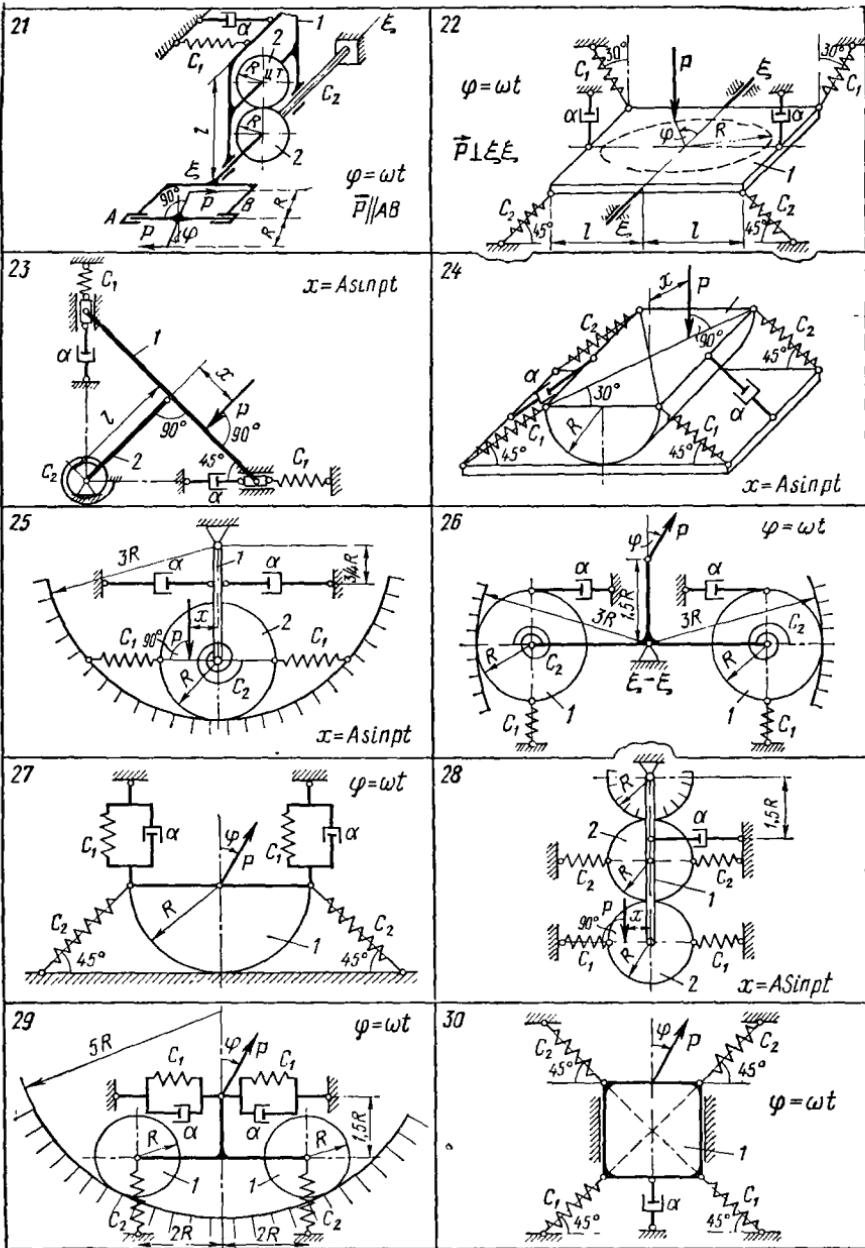


Fig. 245

Таблица 63

Номер варни- та (рис. 243 — 245)	Масса тел, кг			Радиус расстоя- ние R , м			Радиус инер- ции $I_{\text{ин}}$ относительно оси $\xi - \zeta_5$, м			Коэффициенты жесткости пружин			P , Н			A , м			ρ			ω			Логариф- мический декремент η			
	m_1	m_2	m_3	c_1 Н/см	c_2 Н/см	c_3 Нм/рад							P , Н	A , м	ρ	ω				c_1 Н/см	c_2 Н/см	c_3 Нм/рад						
							c_1 Н/см	c_2 Н/см	c_3 Нм/рад	c_1 Н/см	c_2 Н/см	c_3 Нм/рад					c_1 Н/см	c_2 Н/см	c_3 Нм/рад				c_1 Н/см	c_2 Н/см	c_3 Нм/рад			
1	2	4	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	8	2	—	0,3	—	0,9	—	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	20	5	4	—	—	0,1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	40	10	20	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	30	30	—	0,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	7	5	5	—	—	0,6	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
7	8	40	30	—	—	0,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	9	40	15	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
9	10	10	10	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
10	11	15	30	—	—	0,3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
11	12	40	40	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
12	13	80	—	—	—	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
13	14	20	15	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
14	15	60	—	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
15	16	30	20	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
16	17	40	30	—	—	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
17	18	12	12	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
19	20	50	10	—	—	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
21	22	24	20	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
23	24	40	—	—	—	0,4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
25	26	15	—	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
27	28	40	30	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
29	30	25	40	—	—	0,2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

В вариантах 2, 5, 7, 9, 10, 12, 17, 18, 23, 25 и 26 пружины с коэффициентом жесткости c_1 в положении покоя не деформированы, в вариантах 13, 14, 19, 22, 24 и 27–30 в положении покоя не деформированы пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 .

Определить: коэффициент α , характеризующий вязкое сопротивление, осуществляющее в демпфере, уравнение вынужденных колебаний системы при заданной частоте возмущения; максимальные и резонансные значения амплитуд изменения обобщенных координаты, скорости и ускорения в предположении, что частота возмущения может изменяться.

Примечание. Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными диссами, стержни – тонкими однородными; качение колес проходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Вычислить коэффициент α , характеризующий вязкое сопротивление, осуществляющее в демпфере, включением в сис. ему 1–3 в соответствии с рис. 246.

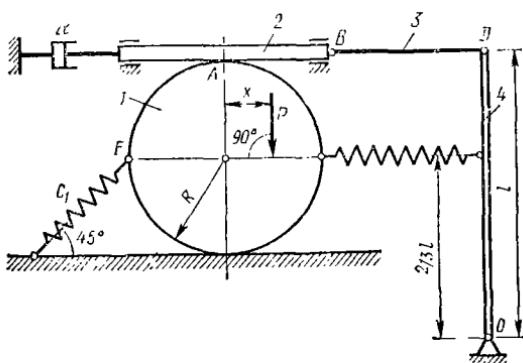


Рис. 246

Определить уравнение вынужденных колебаний системы при заданной частоте возмущения p . Найти также максимальные и резонансные значения амплитуд изменения обобщенных: координаты, скорости и ускорения.

Дано: $m_1 = 20$, $m_2 = 5$, $m_3 = 2$, $m_4 = 9$ кг; $R = 0,3$ м; $l = 0,9$ м; $c_1 = 40$ Н/см; $c_2 = 70$ Н/см; $P = 20$ Н; $x = A \sin pt$, $A = 0,1$ м, $p = -4\pi$ с⁻¹; $\eta = 0,812$. Обе пружины в положении покоя не деформированы.

Решение. За обобщенную координату примем φ_1 – угол поворота колеса 1 (рис. 247).

Уравнение Лагранжа в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_1} + Q_p, \quad (1)$$

где T – кинетическая энергия системы; Φ – функция рассеивания системы (диссипативная функция Релея), Π – потенциальная энергия системы; Q_p – обобщенная возмущающая сила.

Функции T , Φ и P вычисляются с точностью до величины второго порядка малости: T и Φ — относительно обобщенной скорости $\dot{\phi}_1$, P — относительно обобщенной координаты ϕ_1 .

Общий вид этих функций следующий:

$$T = (1/2) \cdot a\dot{\phi}_1^2; \quad \Phi = (1/2) \cdot b\dot{\phi}_1^2; \quad P = (1/2) \cdot c\phi_1^2,$$

где a и c — коэффициенты инерции и жесткости системы, а b — коэффициент, характеризующий сопротивление в системе.

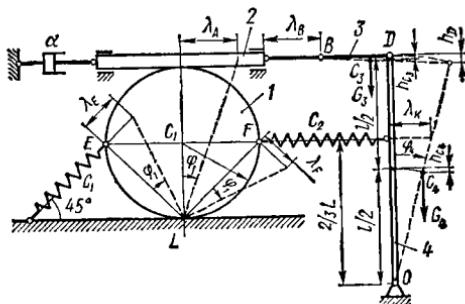


Рис. 247

Найдем кинетическую энергию системы как сумму кинетических энергий тел 1, 2, 3 и 4.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Кинетическая энергия колеса 1 (сплошного однородного диска):

$$T_1 = (1/2) \cdot m_1 v_{c_1}^2 + (1/2) \cdot J_{c_1 x} \omega_1^2,$$

где

$$v_{c_1} = R \omega_1, \quad J_{c_1 x} = (1/2) \cdot m_1 R^2, \quad \omega_1 = \dot{\phi}_1,$$

т. е.

$$T_1 = (1/2) \cdot m_1 R^2 \omega_1^2 + (1/2) \cdot (1/2) \cdot m_1 R^2 \omega_1^2 = (3/4) \cdot m_1 R^2 \omega_1^2.$$

Кинетическая энергия однородного стержня 2, движущегося поступательно:

$$T_2 = (1/2) \cdot m_2 v_2^2 = (m_2/2) \cdot (\omega_1 \cdot 2R)^2 = 2m_2 R^2 \dot{\phi}_1^2.$$

Стержень 3 совершает плоское движение. Мгновенный центр скоростей этого звена при его положении, совпадающем с положением покоя, находится в бесконечности. Следовательно, для обеспечения указанной выше точности выражения кинетической энергии системы можно считать, что $\omega_3 = 0$ и $v_{c3} = v_D = v_B = v_2$.

Таким образом,

$$T_3 = (1/2) \cdot m_3 v_{c3}^2 = (1/2) \cdot m_3 v_2^2 = 2m_3 R^2 \dot{\phi}_1^2.$$

Кинетическая энергия тонкого однородного стержня 4, вращающегося вокруг неподвижной оси Ox

$$T_4 = (1/2) \cdot J_{4x} \dot{\varphi}_4^2, \text{ где } J_{4x} = (1/3) \cdot m_4 l^2;$$

$$\omega_4 = v_D/l = v_2/l = \omega_1 \cdot 2R/l = (2R/l) \cdot \dot{\varphi}_1,$$

т. е.

$$T_4 = (1/2) \cdot (1/3) \cdot m_4 l^2 \cdot (4R^2 \dot{\varphi}_1^2) / l^2 = (2/3) \cdot m_4 R^2 \dot{\varphi}_1^2.$$

Кинетическая энергия всей системы:

$$T = (3/4) \cdot m_1 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_2 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + 2m_3 R^2 \dot{\varphi}_1^2 + \\ + (2/3) \cdot m_4 R^2 \dot{\varphi}_1^2 = (1/2) [(3/2) \cdot m_1 + 4m_2 + 4m_3 + (4/3) \cdot m_4] R^2 \dot{\varphi}_1^2 = \\ = (1/2) \cdot a \dot{\varphi}_1^2,$$

где коэффициент инерции системы

$$a = [(3/2) m_1 + 4m_2 + 4m_3 + (4/3) \cdot m_4] R^2.$$

Найдем функцию рассеивания системы:

$$\Phi = (1/2) \cdot a v_2^2 = (1/2) \cdot a (2R \dot{\varphi}_1)^2 = (1/2) 4R^2 a \dot{\varphi}_1^2 = (1/2) \cdot b \dot{\varphi}_1^2,$$

где

$$b = 4R^2 a.$$

Переходим к определению потенциальной энергии системы.

В положении покоя

$$(\partial P / \partial \dot{\varphi}_1)_{\dot{\varphi}_1=0} = 0,$$

поэтому в выражении для P сумма всех членов первого порядка малости равна нулю. Это позволяет непосредственно производить определение потенциальной энергии системы, вычисляя только члены второго порядка малости.

Найдем потенциальную энергию системы как сумму работ сил тяжести и сил упругости пружин на перемещении системы из отклоненного положения, определяемого углом φ_1 , в цулевое положение, каковым считаем положение покоя системы. При этом в выражениях для деформации пружин, не загруженных в положении покоя, учитываются только те слагаемые, которые имеют первый порядок малости относительно φ_1 , а в выражениях для вертикальных смещений центров тяжести элементов системы — слагаемые, имеющие второй порядок малости. Деформации пружин, загруженных в положении покоя, вычисляются с точностью до величин второго порядка малости включительно.

Потенциальная энергия P_1 , соответствующая силам тяжести, равна:

$$P_1 = -G_3 h_{C3} - G_4 h_{C4},$$

где h_{C3} и h_{C4} — вертикальные смещения центров тяжести элементов 3 и 4, вычисленные с точностью до величин второго порядка малости.

Из рис. 247 видно, что

$$h_{C4} = l/2 - (l/2) \cdot \cos \varphi_4 = (l/2) \cdot (1 - \cos \varphi_4).$$

Ограничиваюсь в формуле разложения

$$\cos \varphi_4 = 1 - \varphi_4^2/2! + \varphi_4^4/4! - \dots$$

двумя первыми членами и учитывая, что

$$\varphi_1 = \lambda_D/l = \lambda_B/l = \lambda_A/l = 2R\varphi_1/l,$$

имеем

$$h_{C4} = (l/2) \cdot \varphi_1^2/2 = (l/4) \cdot 4R^2\varphi_1/l^2 = (R^2/l) \cdot \varphi_1^2.$$

Учитывая, что $h_{C3} = h_D/2 = h_{C4}$, получаем:

$$\Pi_I = -G_3 h_{C3} - G_4 h_{C4} = -G_3 R^2\varphi_1/l - G_4 \cdot R^2\varphi_1/l = -(R^2/l)(G_3 + G_4)\varphi_1^2.$$

Потенциальная энергия Π_{II} деформированных пружин при указанном перемещении системы равна

$$\Pi_{II} = (1/2) c_1 \lambda_E^2 + (1/2) c_2 (\lambda_F \cos 45^\circ - \lambda_K)^2,$$

где λ_E , λ_F , λ_K — перемещения точек прикрепления пружин, вызванные поворотом диска 1 на угол φ_1 .

Вычисляя эти величины с точностью до слагаемых первого порядка малости относительно φ_1 , имеем.

$$\lambda_E = LE \quad \varphi_1 = R\sqrt{2}\varphi_1, \quad \lambda_F = LF \cdot \varphi_1 = R\sqrt{2}\varphi_1;$$

$$\lambda_K = OK \quad \varphi_4 = (2/3) l \cdot 2R\varphi_1/l = (4/3) R\varphi_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Pi_{II} &= \frac{1}{2} c_1 (R\sqrt{2}\varphi_1)^2 + \frac{1}{2} c_2 \left(R\sqrt{2} \cos 45^\circ \varphi_1 - \frac{4}{3} R\varphi_1 \right)^2 = \\ &= \left(c_1 + \frac{c_2}{18} \right) R^2\varphi_1^2. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы

$$\begin{aligned} \Pi &= \Pi_I + \Pi_{II} = -\frac{R^2}{l}(G_3 + G_4)\varphi_1^2 + \left(c_1 + \frac{c_2}{18} \right) R^2\varphi_1^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[2c_1 + \frac{c_2}{9} - \frac{2(G_3 + G_4)}{l} \right] R^2\varphi_1^2 = \frac{1}{2} c\varphi_1^2, \end{aligned}$$

где коэффициент жесткости системы

$$c = \left[2c_1 + \frac{c_2}{9} - \frac{2(G_3 + G_4)}{l} \right] R^2.$$

Определим обобщенную силу Q_ρ , соответствующую возмущающей силе P :

$$Q_\rho = Px \delta\varphi_1 / \delta\varphi_1 = Px = P A \sin \rho t.$$

Здесь $\delta\varphi_1$ — приращение обобщенной координаты, $Px \delta\varphi_1$ — работа силы P на элементарном перемещении системы, соответствующем приращению $\delta\varphi_1$ обобщенной координаты.

Используя полученные для T , Φ , Π и Q_ρ выражения, получаем уравнение (I) в следующем виде:

$$a\varphi_1 + b\dot{\varphi}_1 + c\ddot{\varphi}_1 = P A \sin \rho t$$

или

$$\varphi_1 + (b/a) \dot{\varphi}_1 + (c/a) \ddot{\varphi}_1 = (P A / a) \sin \rho t.$$

Обозначив

$$b/a = 2n, \quad c/a = k^2; \quad P A / a = : l,$$

представим дифференциальное уравнение колебаний системы в следующем виде:

$$\ddot{\varphi}_1 + 2n\dot{\varphi}_1 + k^2\varphi_1 = h \sin pt. \quad (2)$$

Уравнение вынужденных колебаний системы является частным решением неоднородного дифференциального уравнения (2) и имеет вид:

$$\varphi_1 = A_{\varphi_1} \sin(pt - \varepsilon), \quad (3)$$

где A_{φ_1} — амплитуда вынужденных колебаний; ε — сдвиг фазы вынужденных колебаний.

$$A_{\varphi_1} = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}}; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}.$$

Определим h , k , n

$$\begin{aligned} h &= \frac{P \cdot A}{a} = \frac{P \cdot A}{[(3/2) \cdot m_1 + 4m_2 + 4m_3 + (4/3) \cdot m_4] R^2} = \\ &= \frac{20 \cdot 0,1}{[(3/2) \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (4/3) \cdot 18] 0,3^2} = 0,271 \text{ с}^{-2}; \\ k &= \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{[2c_1 + c_2/9 - (2/l) \cdot (G_3 + G_4)] R^2}{[(3/2) \cdot m_1 + 4m_2 + 4m_3 + (4/3) \cdot m_4] R^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 + 7000/9 - [2(2+9) \cdot 9,81]/0,9}{(3/2) \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (4/3) \cdot 18}} = \sqrt{\frac{8538}{82}} = 10,2 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Величину n определим по заданному логарифмическому декременту колебаний системы:

$$\eta = \frac{\pi n}{\sqrt{k^2 - n^2}} = n \frac{T^*}{2}, \quad \text{где} \quad T^* = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Отсюда

$$n = \frac{k}{\sqrt{1 + \pi^2/\eta^2}} = \frac{10,2}{\sqrt{1 + (3,14^2)/0,812^2}} = 2,55 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициент α , характеризующий сопротивление, осуществляющее в демпфере, вычисляем по формуле

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{b}{4R^2} = \frac{2an}{4R^2} = \frac{an}{2R^2} = \frac{[(3/2) \cdot m_1 + 4m_2 + 4m_3 + (4/3) \cdot m_4] R^2 n}{2R^2} = \\ &= \frac{[(3/2) \cdot 20 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2 + (4/3) \cdot 18] 2,55}{2} = 104,5 \text{ Нс/м}. \end{aligned}$$

Определяем амплитуду изменения угла φ_1 и сдвиг фазы вынужденных колебаний системы при $p = 4\pi \text{ с}^{-1} = 12,57 \text{ с}^{-1}$:

$$\begin{aligned} A\varphi_1 &= \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = \frac{0,271}{\sqrt{[(10,2^2 - (4\pi)^2)^2 + 4 \cdot 2,55^2 (4\pi)^2]}} = 0,00324 \text{ рад}, \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= 2np/(k^2 - p^2) = (2 \cdot 2,55 \cdot 4\pi) / [(10,2^2 - (4\pi)^2)] = -1,189; \\ \varepsilon &= 130^\circ 04' = 2,2701 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Окончательно по формуле (3)

$$\varphi_1 = 0,00324 \cdot \sin(4\pi t - 2,27) \text{ рад.}$$

Определяем максимальные значения амплитуд изменения φ_1 , $\dot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_1$ при условии, что частота возбуждения p может изменяться.

Амплитуда колебаний A_{φ_1} имеет максимум при

$$p = p_1 = \sqrt{k^2 - 2n^2} = \sqrt{10,2^2 - 2 \cdot 2,55^2} = 9,54 \text{ с}^{-1},$$

откуда:

$$A_{\varphi_{1\max}} = \frac{h}{2n \sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{0,271}{2 \cdot 2,55 \sqrt{10,2^2 - 2,55^2}} = 0,00536 \text{ рад.}$$

Обобщенная скорость

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{hp}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \cos(pt - \varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2/p^2 + 4n^2}} \cos(pt - \varepsilon).$$

Следовательно, амплитуда обобщенной скорости имеет максимум при $p = p_2 = k$:

$$A_{\dot{\varphi}_{1\max}} = h/2n = 0,271/(2 \cdot 2,55) = 0,0531 \text{ с}^{-1}.$$

Обобщенное ускорение

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 &= -\frac{hp^2}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} \sin(pt - \varepsilon) = \\ &= -\frac{h}{\sqrt{\left(\frac{k^2 - p^2}{p^2}\right)^2 + 4\left(\frac{n}{p}\right)^2}} \sin(pt - \varepsilon). \end{aligned}$$

Найдем то значение $p = p_3$, при котором амплитуда обобщенного ускорения имеет максимум, а следовательно, подкоренное выражение

$$[(k^2 - p^2)/p^2]^2 + 4(n/p)^2$$

имеет минимум. Для этого вычислим производную этого выражения по p и приравняем ее нулю:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dp} \left[\left(\frac{k^2 - p^2}{p^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{n}{p} \right)^2 \right] &= 2 \left(\frac{k^2 - p^2}{p^2} \right) \left[\frac{-2pp^2 - 2p(k^2 - p^2)}{p^4} \right] + \\ &+ \left(-\frac{2 \cdot 4n^2}{p^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

После упрощений получаем:

$$k^4 - p^2k^2 + 2n^2p^2 = 0,$$

откуда

$$p = k^2 / \sqrt{k^2 - 2n^2}.$$

В рассматриваемой задаче

$$p = p_3 = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 - 2n^2}} = \frac{10,2^2}{10,2^2 - 2 \cdot 2,55^2} = 10,9 \text{ с}^{-1}.$$

Максимальное значение амплитуды обобщенного ускорения

$$\begin{aligned} A_{\ddot{\varphi}_{1\max}} &= \frac{h}{\sqrt{\left[\left(\frac{k}{p_3}\right)^2 - 1\right]^2 + 4\left(\frac{n}{p_3}\right)^2}} = \\ &= \frac{0,271}{\sqrt{\left[\left(\frac{10,2}{10,9}\right)^2 - 1\right]^2 + 4\left(\frac{2,55}{10,9}\right)^2}} = 0,559 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Определим теперь амплитуды изменения обобщенных координат, скорости и ускорения при резонансе

$$A_{\varphi_1(\rho=k)} = h/2nk = 0,271/(2 \cdot 2,55 \cdot 10,2) = 0,00521 \text{ рад};$$

$$A_{\dot{\varphi}_1(\rho=k)} = A_{\ddot{\varphi}_{1\max}} = 0,0531 \text{ с}^{-1};$$

$$A_{\ddot{\varphi}_1(\rho=k)} = \hbar k/2n = (0,271 \cdot 10,2)/(2 \cdot 2,55) = 0,542 \text{ с}^{-2}.$$

Из вычислений следует, что амплитуды изменения обобщенной координаты и ускорения при резонансе ($\rho = k$) весьма близки к максимальным значениям.

Задание Д-25. Исследование свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Определить частоты малых свободных колебаний и формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, пренебрегая силами сопротивления, массами пружин и моментами инерции скручиваемых валов.

Схемы механических систем тел 1—3 в положении покоя показаны на рис. 248—250, а необходимые для решения данные приведены в табл. 64.

Примечание. Во всех вариантах колеса считать сплошными однородными дисками, стержни — тонкими однородными. Во всех случаях качение колес происходит без скольжения.

Пример выполнения задания. Определить частоты свободных колебаний и найти формы главных колебаний системы с двумя степенями свободы, указанной на рис. 251.

Дано: $l_1 = 20 \text{ см}$; $l_2 = 60 \text{ см}$; $l_3 = 30 \text{ см}$; масса груза $m_1 = 0,5 \text{ кг}$; масса однородного стержня ED $m_2 = 3 \text{ кг}$; коэффициенты жесткости пружин: $c_1 = 60 \text{ Н/см}$; $c_2 = 40 \text{ Н/см}$; $c_3 = 40 \text{ Н/см}$.

Решение. Система состоит из груза B , подвешенного к рычагу ED на пружине с коэффициентом жесткости c_3 . В точках E и D рычаг опирается на пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 .

В состоянии покоя рычаг занимает горизонтальное положение. Пружины с коэффициентами жесткости c_1 и c_2 деформированы (скаты или растянуты) соответственно на величины f_{c1} , f_{c2} . Пружина с коэффициентом жесткости c_3 растянута на величину f_{c3} .

За обобщенные координаты примем: z — вертикальное смещение груза от положения покоя; φ — угол поворота рычага ED от положения покоя. На рис. 252 показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

Найдем кинетическую и потенциальную энергию системы. Кинетическая энергия системы состоит из кинетической энергии груза и кинетической энергии рычага

$$T = (1/2) \cdot m_1 \dot{z}^2 + (1/2) \cdot J_O \dot{\varphi}^2,$$

где \dot{z} , $\dot{\varphi}$ — обобщенные скорости; J_O — момент инерции стержня ED относительно оси вращения O .

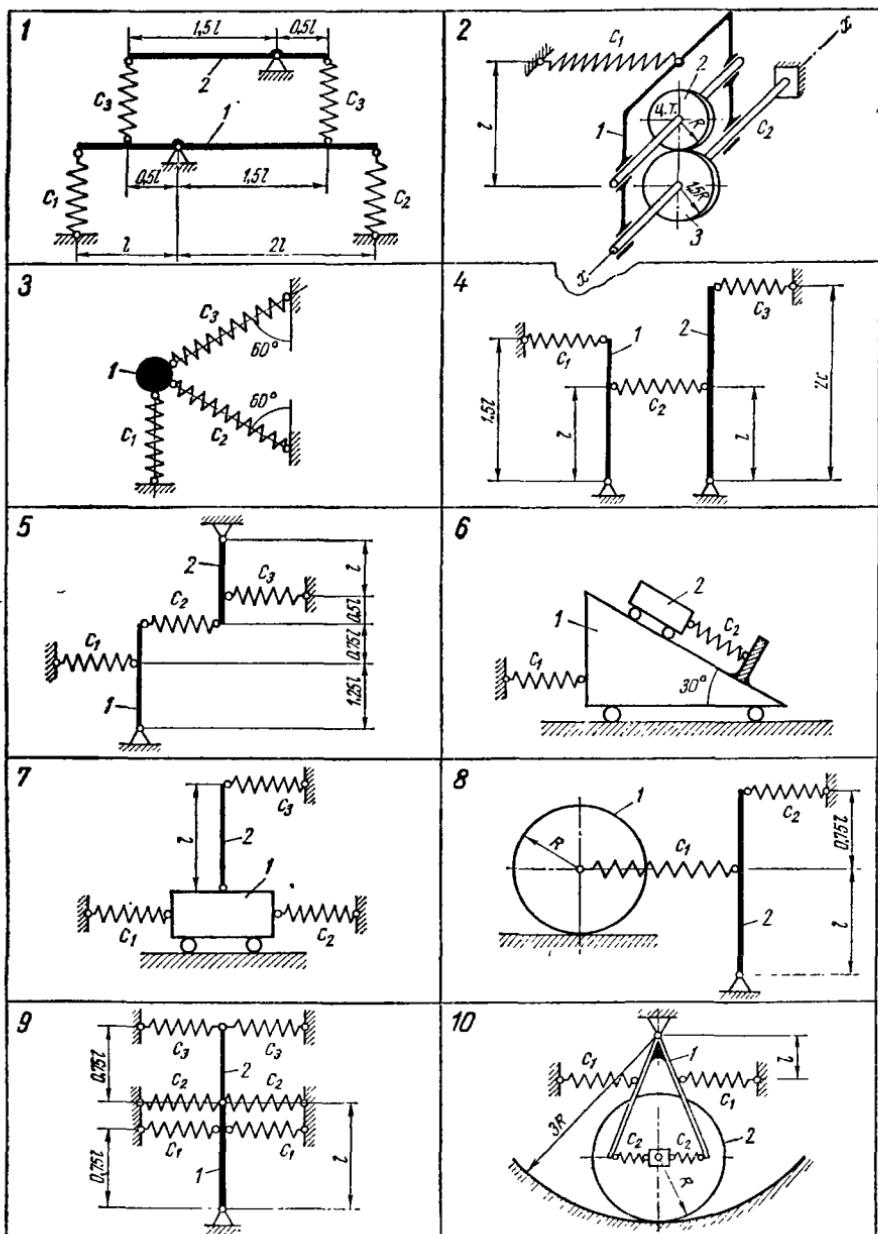
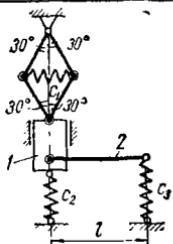
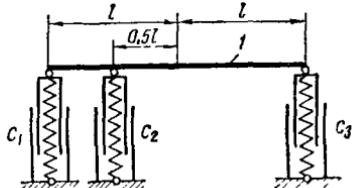


Рис. 248

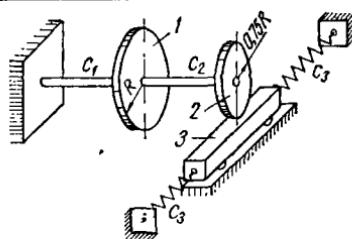
11



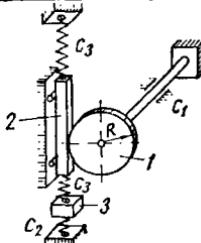
12



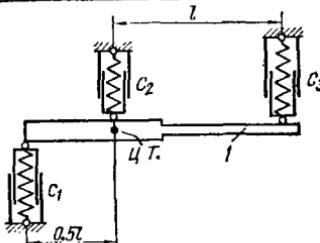
13



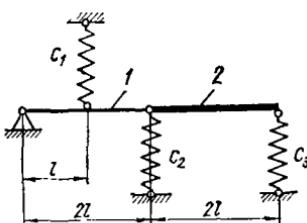
14



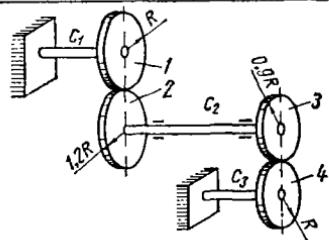
15



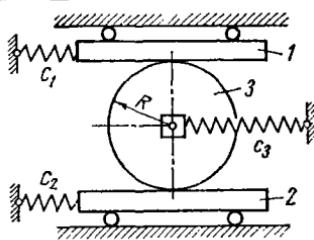
16



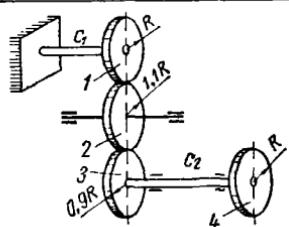
17



18



19



20

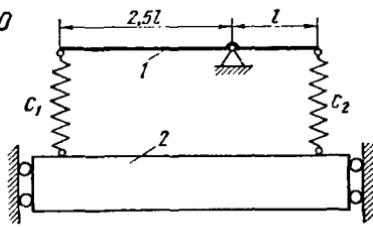
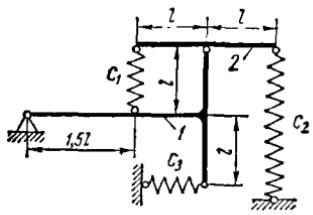
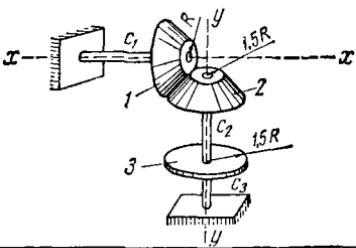


Рис. 249

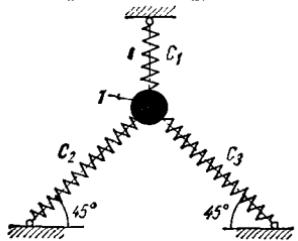
21



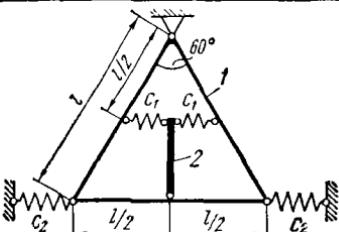
22



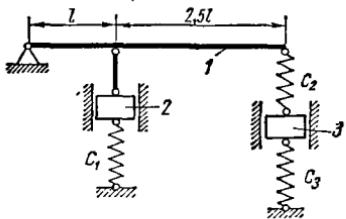
23



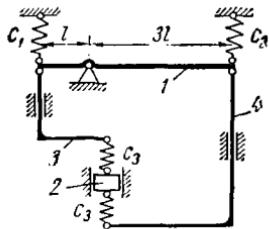
24



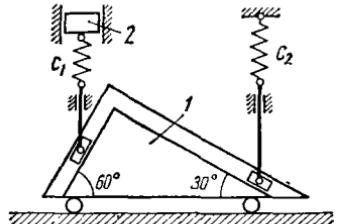
25



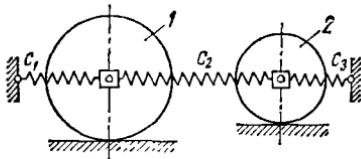
26



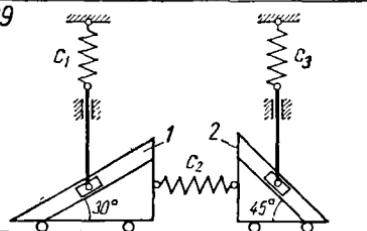
27



28



29



30

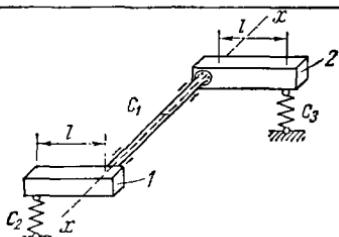


Рис. 250

Момент инерции

$$J_O = m_2 l^2 / 12 + m_2 d^2,$$

где l — длина стержня ED , равная 80 см; $d = OC$ — расстояние от центра тяжести C стержня до оси вращения O (рис. 252)

$$d = (l_1 + l_2) / 2 - l_1 = (l_2 - l_1) / 2 = (60 - 20) / 2 = 20 \text{ см.}$$

Момент инерции стержня

$$J_O = (3 \cdot 80^2) / 12 + 3 \cdot 20^2 = 2800 \text{ кгсм}^2 = 0,28 \text{ кгм}^2.$$

Потенциальная энергия системы равна работе сил при перемещении системы из отклоненного положения в нулевое (положение статического равновесия).

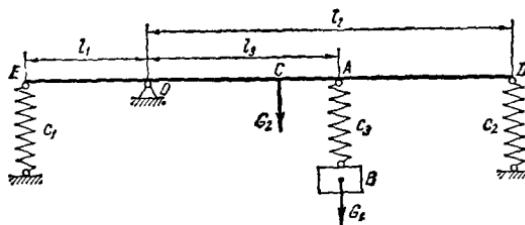


Рис. 251

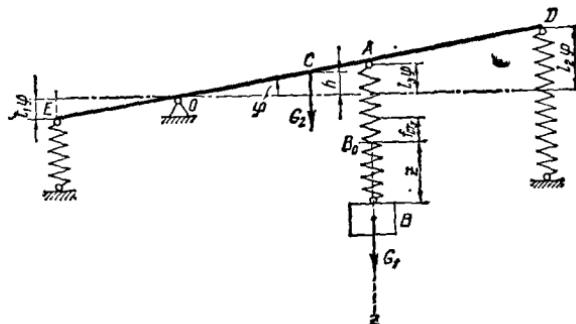


Рис. 252

Потенциальную энергию системы вычислим как сумму:

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II},$$

где Π_I — потенциальная энергия груза и рычага в поле сил тяжести; Π_{II} — потенциальная энергия деформированных пружин.

$$\Pi_I = -G_1 z + G_2 h.$$

Так как

$$h = OC \cdot \varphi = \frac{l_2 - l_1}{2} \varphi, \quad \text{то} \quad \Pi_I = -G_1 z + G_2 \frac{l_2 - l_1}{2} \varphi.$$

Таблица 64

Номер варианта (рис. 248—250)	Масса тел, кг	Радиус инерции тела / относительно оси вращения t_A , м	Радиус инерции тела / относительно оси вращения t_A , м	Коэффициенты жесткости упругих элементов						Примечания	
				c_1		c_2		c_3			
				Н/см	Нм/рад	Н/см	Нм/рад	Н/см	Нм/рад		
1	1	2	—	—	40	—	30	—	20	—	0,5
2	10	2	4	0,2	0,6	—	—	—	—	—	—
3	4	—	—	—	—	30	—	20	—	10	—
4	2	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	5	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	6	8	2	—	—	20	—	15	—	—	—
7	7	3	1	—	—	6	—	4	—	8	0,5
8	8	4	1	—	0,2	—	40	—	30	—	0,3
9	9	1	0,5	—	—	80	—	10	—	60	0,1
10	10	6	4	—	0,2	0,3	—	3	—	—	0,1
11	10	3	—	—	—	—	—	—	—	5	—
12	6	—	—	—	—	—	—	—	—	40	—
										0,4	0,5

t_4 — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести и перпендикулярной к плоскости рисунка

$$m_1 = m_1$$

$$m_1 = m_i$$

Система расположена в горизонтальной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы.

Chitewa

В *расслабленном* в горизонтальной плоскости, в которой происходит движение. В положении покоя пружины не деформированы. Тело *l* при颓ято за материальную точку в положении покоя пружины не деформированы. Тело *l* состоит из трех одинаковых стержней

$$m_4 = m_1$$

四三

Потенциальную энергию пружин найдем, рассматривая сначала перемещение системы из отклоненного положения в положение, соответствующее недеформированным пружинам, а затем из этого положения — в положение покоя.

Деформации пружин следующие: $\lambda_1 = l_1\varphi \pm f_{ct1}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_1 ; $\lambda_2 = l_2\varphi \pm f_{ct2}$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_2 ; $\lambda_3 = f_{ct3} + l_3\varphi + z$ — для пружины с коэффициентом жесткости c_3 .

Следовательно,

$$\Pi_{II} = (1/2) \cdot c_1 (l_1\varphi \pm f_{ct1})^2 - (1/2) \cdot c_1 f_{ct1}^2 + (1/2) \cdot c_2 (l_2\varphi \pm f_{ct2})^2 - (1/2) \cdot c_2 f_{ct2}^2 + (1/2) \cdot c_3 (f_{ct3} + l_3\varphi + z)^2 - (1/2) \cdot c_3 f_{ct3}^2$$

или после упрощений

$$\begin{aligned} \Pi_{II} = & (1/2) \cdot c_1 l_1^2 \varphi^2 + (1/2) \cdot c_2 l_2^2 \varphi^2 + (1/2) \cdot c_3 (l_3\varphi + z)^2 \pm \\ & \pm c_1 l_1 f_{ct1} \varphi \pm c_2 l_2 f_{ct2} \varphi + c_3 f_{ct3} (l_3\varphi + z). \end{aligned}$$

Потенциальная энергия всей системы

$$\begin{aligned} \Pi = & -G_1 z + [G_2 (l_2 - l_1)/2] \cdot \varphi + (1/2) \cdot c_1 l_1^2 \varphi^2 + (1/2) \cdot c_2 l_2^2 \varphi^2 + \\ & + (1/2) \cdot c_3 l_3^2 \varphi^2 + c_3 l_3 \varphi z + (1/2) \cdot c_3 z^2 \pm c_1 l_1 f_{ct1} \varphi \pm c_2 l_2 f_{ct2} \varphi + \\ & + c_3 f_{ct3} l_3 \varphi + c_3 f_{ct3} z. \end{aligned}$$

Из условий покоя рассматриваемой системы, находящейся под действием сил, имеющих потенциал, имеем:

$$(\partial \Pi / \partial z)_{z=0} = -G_1 + c_3 f_{ct3} = 0;$$

$$(\partial \Pi / \partial \varphi)_{z=0} = G_2 \frac{l_2 - l_1}{2} \pm c_1 l_1 f_{ct1} \pm c_2 l_2 f_{ct2} + c_3 l_3 f_{ct3} = 0.$$

Потенциальная энергия системы с учетом условий покоя имеет вид

$$\Pi = (1/2) \cdot c_1 l_1^2 \varphi^2 + (1/2) \cdot c_2 l_2^2 \varphi^2 + (1/2) \cdot c_3 l_3^2 \varphi^2 + c_3 l_3 z \varphi + (1/2) \cdot c_3 z^2.$$

Таким образом,

$$T = (1/2) \cdot m_1 \dot{z}^2 + (1/2) \cdot J_O \dot{\varphi}^2;$$

$$\Pi = (1/2) \cdot c_3 z^2 + c_3 l_3 z \varphi + (1/2) (c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2) \varphi^2$$

или

$$T = (1/2) (a_{11} \dot{z}^2 + 2a_{12} \dot{z} \dot{\varphi} + a_{22} \dot{\varphi}^2);$$

$$\Pi = (1/2) (c_{11} z^2 + 2c_{12} z \varphi + c_{22} \varphi^2).$$

Здесь a_{ij} — коэффициенты инерции:

$$a_{11} = m_1; \quad a_{12} = 0; \quad a_{22} = J_O;$$

c_{ij} — коэффициенты жесткости:

$$c_{11} = c_3, \quad c_{12} = c_3 l_3, \quad c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2.$$

Для рассматриваемой консервативной системы уравнения Лагранжа имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Вычислив производные

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = a_{11}\ddot{z}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = a_{11}\ddot{z}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial z} = c_{11}z + c_{12}\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = a_{22}\ddot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = a_{22}\ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = c_{12}z + c_{22}\varphi$$

и подставив их в уравнения Лагранжа, получим:

$$a_{11}\ddot{z} = -c_{11}z - c_{12}\varphi; \quad a_{22}\ddot{\varphi} = -c_{21}z - c_{22}\varphi,$$

где $c_{21} = c_{12}$.

Таким образом, для данной системы дифференциальные уравнения свободных колебаний имеют вид:

$$a_{11}\ddot{z} + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \quad a_{22}\ddot{\varphi} + c_{21}z + c_{22}\varphi = 0.$$

Частное решение этих уравнений:

$$z = A_1 \sin(kt + \beta); \quad \varphi = A_2 \sin(kt + \beta).$$

Обозначим μ отношение обобщенных координат, равное отношению амплитудных значений φ и z :

$$\varphi/z = A_2/A_1 = \mu.$$

Тогда

$$z = A_1 \sin(kt + \beta); \quad \varphi = \mu z = \mu A_1 \sin(kt + \beta).$$

Величина μ характеризует формы главных колебаний и называется *коэффициентом распределения*.

Подставив значения z и φ в систему дифференциальных уравнений, получим:

$$-a_{11}k^2 + c_{11} + c_{12}\mu = 0; \quad -a_{22}\mu k^2 + c_{21} + c_{22}\mu = 0,$$

откуда, после исключения μ , получим уравнение частот:

$$(c_{11} - a_{11}k^2)(c_{22} - a_{22}k^2) - c_{12}^2 = 0.$$

Так как

$$a_{11} = m_1 = 0,5 \text{ кг}, \quad c_{11} = c_3 = 40 \text{ Н/см} = 4000 \text{ Н/м};$$

$$c_{12} = c_3 l_3 = 4000 \cdot 0,3 = 1200 \text{ Н}, \quad a_{22} = J_O = 0,28 \text{ кгм}^2;$$

$$c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 6000 \cdot 0,2^2 + 4000 \cdot 0,6^2 + 4000 \cdot 0,3^2 = 2040 \text{ Нм},$$

то уравнение частот

$$(4000 - 0,5k^2)(2040 - 0,28k^2) - 1200^2 = 0$$

или

$$0,07k^4 - 1070k^2 + 3360000 = 0.$$

Квадраты корней этого уравнения

$$k_{1,2}^2 = \frac{1070 \pm \sqrt{1070^2 - 4 \cdot 0,07 \cdot 3360000}}{0,14};$$

$$k_1^2 = 4414, \quad k_2^2 = 10870.$$

Следовательно, частоты свободных колебаний

$$k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}; \quad k_2 = 104 \text{ с}^{-1}.$$

Коэффициенты распределения, соответствующие частотам k_1 и k_2 в общем случае имеют вид

$$\text{d) } \mu_1 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_1^2}{c_{12} - a_{12}k_1^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_1^2}{c_{22} - a_{22}k_1^2};$$

$$\mu_2 = -\frac{c_{11} - a_{11}k_2^2}{c_{12} - a_{12}k_2^2} = -\frac{c_{12} - a_{12}k_2^2}{c_{22} - a_{22}k_2^2}.$$

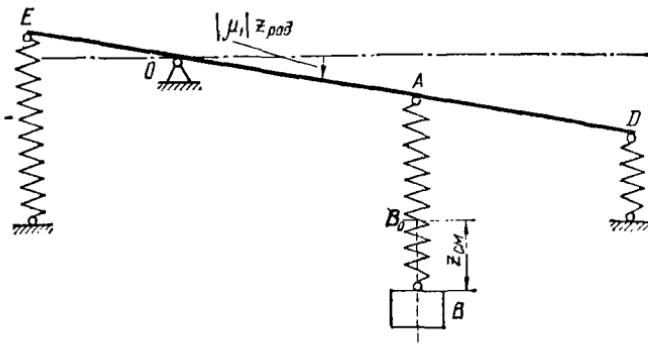
В данном случае

$$\mu_1 = -(4000 - 0,5 \cdot 4414)/1200 = -1,49 \text{ рад/м} = -0,0149 \text{ рад/см};$$

$$\mu_2 = -(4000 - 0,5 \cdot 10870)/1200 = 1,2 \text{ рад/м} = 0,0120 \text{ рад/см}.$$

Первое главное колебание системы

$$k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_1 = -0,0149 \text{ радиан/см}$$



Второе главное колебание системы

$$k_2 = 104 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_2 = 0,012 \text{ радиан/см}$$

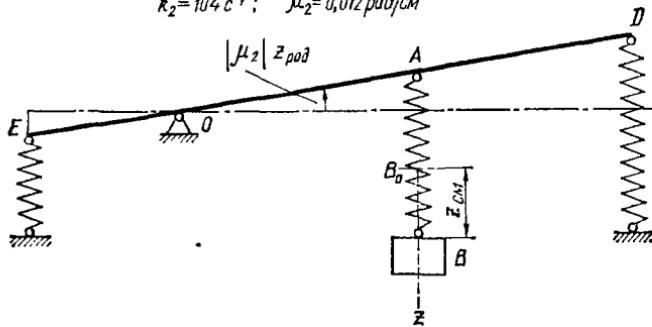


Рис. 253

Уравнения, определяющие первое главное колебание, примут следующий вид:

$$z_1 = A_1 \sin(66,4t + \beta_1); \quad \varphi_1 = -0,0149A_1 \sin(66,4t + \beta_1).$$

Уравнения, определяющие второе главное колебание:

$$z_2 = A_2 \sin(104t + \beta_2); \quad \varphi_2 = 0,012A_2 \sin(104t + \beta_2).$$

Общее решение дифференциальных уравнений представляет собой сумму частных решений:

$$z = z_1 + z_2 = A_1 \sin(66,4t + \beta_1) + A_2 \sin(104t + \beta_2);$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -0,0149A_1 \sin(66,4t + \beta_1) + 0,012A_2 \sin(104t + \beta_2).$$

Значения A_i и β_i определяются по начальным условиям задачи.

Коэффициенты распределения μ_1 и μ_2 показывают, что в первом главном колебании с частотой $k_1 = 66,4 \text{ c}^{-1}$ перемещению груза вниз, равному 1 см, соответствует поворот рычага по вращению часовой стрелки на угол, равный 0,0149 рад (рис. 253, а); во втором главном колебании с частотой $k_2 = 104 \text{ c}^{-1}$ тому же перемещению груза вниз на 1 см соответствует поворот рычага против вращения часовой стрелки на 0,0120 рад (рис. 253, б).

Формы колебаний можно представить в виде графиков. Для рассматриваемой задачи построим график сравнения перемещения груза B и точки A (точки прикрепления пружины к рычагу).

В первом главном колебании при перемещении груза B вниз на 1 см точка A перемещается также вниз на величину $\mu_1 l_3 = 0,0149 \times 30 = 0,447$ см (точки B и A находятся в одной фазе) (рис. 254, а).

Во втором главном колебании при перемещении груза B вниз на 1 см точка A перемещается вверх на величину $\mu_2 l_3 = 0,012 \times 30 = 0,36$ см (точки B и A находятся в противоположных фазах) (рис. 254, б).

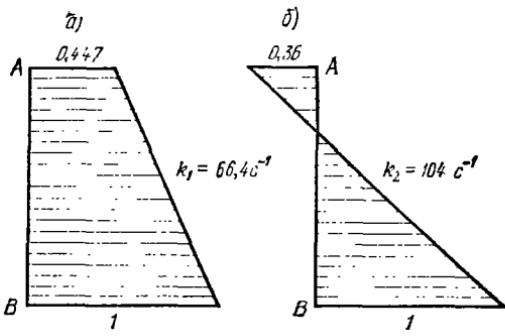


Рис. 254

Задание Д-26. Исследование вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы

Механическая система с двумя степенями свободы находится под действием силового гармонического возмущения в виде силы $P = P_0 \cos pt$ или момента $M = M_0 \cos pt$. Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы.

Схемы механических систем в положении покоя показаны на рис. 248 — 250. Необходимые сведения об инерционных и упругих свойствах системы, а также ее размеры приведены в табл. 64. Масами пружин и скручиваемых валов пренебречь.

В табл. 65 указано, к какому из тел системы приложена возмущающая сила \vec{P} или пара сил с моментом \vec{M} . Линия действия силы \vec{P} во всех случаях проходит через центр тяжести тела, к которому она приложена. В процессе колебаний линия действия силы остается либо вертикальной, либо горизонтальной (см. табл. 65).

Таблица 65

Номер варианта (рис. 248 — 250)	Вид возмущения	Номер тела, к которому приложено возмущение	Линия действия силы \vec{P}	Линейное смещение при $P = P_0$, м	Угловое смещение при $M = M_0$, рад
1	M	1	—	—	0,01
2	M	3	—	—	0,01
3	P	1	Вертикальна	0,002	—
4	M	2	—	—	0,005
5	M	1	—	—	0,02
6	P	1	Горизонтальна	0,001	—
7	P	1	»	0,002	—
8	P	1	»	0,001	—
9	M	1	—	—	0,005
10	M	1	—	—	0,01
11	P	1	Вертикальна	0,001	—
12	P	1	»	0,002	—
13	P	3	Горизонтальна	0,003	—
14	P	2	Вертикальна	0,001	—
15	M	1	—	—	0,01
16	M	1	—	—	0,02
17	M	2	—	—	0,005
18	P	2	Горизонтальна	0,002	—
19	M	1	—	—	0,005
20	P	2	Вертикальна	0,001	—
21	M	1	—	—	0,01
22	M	2	—	—	0,005
23	P	1	Горизонтальна	0,003	—
24	M	1	—	—	0,01
25	P	2	Вертикальна	0,005	—
26	M	1	—	—	0,02
27	P	1	Горизонтальна	0,004	—
28	P	1	»	0,003	—
29	P	2	»	0,002	—
30	M	1	—	—	0,005

Пара сил с моментом \bar{M} расположена в плоскости колебаний тела, к которому она приложена. Во всех вариантах положительное направление силы \vec{P} и момента \bar{M} , изменяющихся по гармоническому закону, можно выбирать произвольно.

В табл. 65 задано линейное или угловое смещение от положения покоя для тела, к которому приложено силовое возмущение при условии воздействия постоянной силы $P = P_0$ или момента $M = -M_0$ (случай пульсовой частоты изменения возмущения силы или момента). Для систем, находящихся под действием силы, смещение задается вдоль линии ее действия, а для систем, находящихся под действием пары сил, задается угловое смещение в плоскости действия этой пары сил.

Пример выполнения задания. Пренебрегая сопротивлением, исследовать вынужденные колебания системы с двумя степенями свободы, изображенной в положении покоя (рис. 255). Колебания происходят под действием пары сил, приложенной к стержню DE и расположенной в плоскости чертежа. Момент возмущающей пары изменяется

по закону:

$$M = M_0 \cos pt.$$

Дано: массы элементов системы $m_1 = 0,5$, $m_2 = 3$ кг, коэффициенты жесткости пружин $c_1 = 60$, $c_2 = 40$, $c_3 = 40$ Н/см; линейные размеры: $l_1 = 20$, $l_2 = 60$, $l_3 = 30$ см. Угол поворота стержня DE под действием пары сил с постоянным моментом $M = M_0$ равен: $\phi_0 = 0,01$ рад.

Решение. За обобщенные координаты примем: z — вертикальное смещение груза от положения покоя и φ — угол поворота рычага DE от положения покоя.

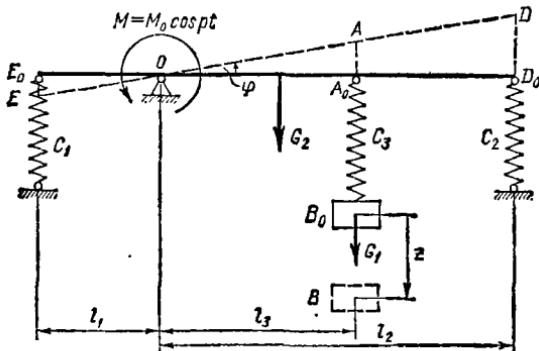


Рис. 255

На рис. 255 пунктиром показано положение системы при положительных обобщенных координатах.

Уравнения Лагранжа для рассматриваемой системы имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} + Q_z; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial P}{\partial \varphi} + Q_\varphi, \quad (1)$$

где Q_z и Q_φ — обобщенные возмущающие силы.

Выражения для кинетической и потенциальной энергии получены в примере к заданию Д-25, где исследовались свободные колебания рассматриваемой системы.

$$\begin{aligned} T &= (1/2) \cdot a_{11} \dot{z}^2 + a_{12} \dot{z} \dot{\varphi} + (1/2) \cdot a_{22} \dot{\varphi}^2; \\ P &= (1/2) \cdot c_{11} z^2 + c_{12} z \varphi + (1/2) \cdot c_{22} \varphi^2, \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (2)$$

где a_{ij} и c_{ij} — коэффициенты инерции и жесткости системы, равные

$$a_{11} = m_1 = 0,5 \text{ кг}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = J_0 = 0,28 \text{ кгм}^2;$$

$$c_{11} = c_3 = 4000 \text{ Н/м}, \quad c_{12} = c_{21} = c_3 l_3 = 1200 \text{ Н};$$

$$c_{22} = c_1 l_1^2 + c_2 l_2^2 + c_3 l_3^2 = 2040 \text{ Нм}.$$

Частоты свободных колебаний и соответствующие коэффициенты распределения получены в примере к заданию Д-25

$$\begin{aligned} k_1 &= 66,4 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}; \\ k_2 &= 104 \text{ с}^{-1}; \quad \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}. \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3)$$

Определим обобщенные силы Q_z и Q_φ , связанные с действием возмущающего момента:

$$Q_z = \delta A_{Mz}/\delta z; \quad Q_\varphi = \delta A_{M\varphi}/\delta \varphi, \quad (4)$$

где δA_{Mz} — элементарная работа возмущающего момента на перемещении системы, вызванном элементарным приращением обобщенной координаты z при $\varphi = \text{const}$; $\delta A_{M\varphi}$ — элементарная работа возмущающего момента на перемещении системы, вызванном элементарным приращением обобщенной координаты φ при $z = \text{const}$; δz , $\delta \varphi$ — элементарные приращения обобщенных координат.

Если принять направление возмущающего момента при $t = 0$ положительным и считать, что оно совпадает с направлением отсчета положительных значений угла φ , то из соотношений (4) получаем:

$$Q_z = 0; \quad Q_\varphi = M_0 \cos pt.$$

Следовательно, дифференциальные уравнения (1), описывающие вынужденные колебания системы в обобщенных координатах z и φ , имеют вид:

$$a_{11}z'' + c_{11}z + c_{12}\varphi = 0; \quad a_{22}\varphi'' + c_{21}z + c_{22}\varphi = M_0 \cos pt. \quad (5)$$

Частное решение системы дифференциальных уравнений (5), определяющее вынужденные колебания, находим в виде:

$$z = A_z \cos pt, \quad \varphi = A_\varphi \cos pt.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальные уравнения (5), получаем:

$$(c_{11} - a_{11}p^2) A_z + c_{12}A_\varphi = 0; \quad c_{21}A_z + (c_{22} - a_{22}p^2) A_\varphi = M_0.$$

Из этой системы двух алгебраических уравнений относительно A_z и A_φ находим:

$$A_z = - \frac{M_0 c_{12}}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - c_{12}^2}; \quad (6)$$

$$A_\varphi = \frac{M_0 (c_{11} - a_{11}p^2)}{(c_{11} - a_{11}p^2)(c_{22} - a_{22}p^2) - c_{12}^2}. \quad (7)$$

Амплитуды вынужденных колебаний равны абсолютным значениям A_z и A_φ .

Воспользуемся формулой (7) для определения амплитуды M_0 возмущающего момента. По условию задачи при $p = 0$ угол поворота стержня DE равен φ_0 , следовательно, при $p = 0$

$$A_{\varphi 0} = \varphi_0 = M_0 c_{11} / (c_{11} c_{22} - c_{12}^2),$$

откуда

$$M_0 = \varphi_0 \left(c_{22} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right) = 0,01 \left(2040 - \frac{1200^2}{4000} \right) = 16,8 \text{ Нм.}$$

Перемещение груза под действием постоянного момента $M = M_0$, приложенного к стержню DE , можно найти из соотношения (6) при $p = 0$:

$$A_{z0} = z_0 = - \frac{M_0 c_{12}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} = - \frac{16,8 \cdot 1200}{4000 \cdot 2040 - 1200^2} = - 0,003 \text{ м.}$$

Так как знаменатель в формулах (6) и (7) является квадратным многочленом относительно p^2 , а корнями этого многочлена являются квадраты частот свободных колебаний системы k_1^2 и k_2^2 , то формулы (6) и (7) можно представить в виде

$$A_z = - \frac{M_0 c_{12}}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2) (p^2 - k_2^2)} = - \frac{144000}{(p^2 - 4414) (p^2 - 10870)}; \quad (8)$$

$$A_\varphi = \frac{M_0 (c_{11} - a_{11} p^2)}{a_{11} a_{22} (p^2 - k_1^2) (p^2 - k_2^2)} = \frac{120 (4000 + 0,5 p^2)}{(p^2 - 4414) (p^2 - 10870)}. \quad (9)$$

Формулы (6), (7) или (8), (9) позволяют проследить за зависимостью A_z и A_φ от частоты p и построить соответствующие графики (рис. 256).

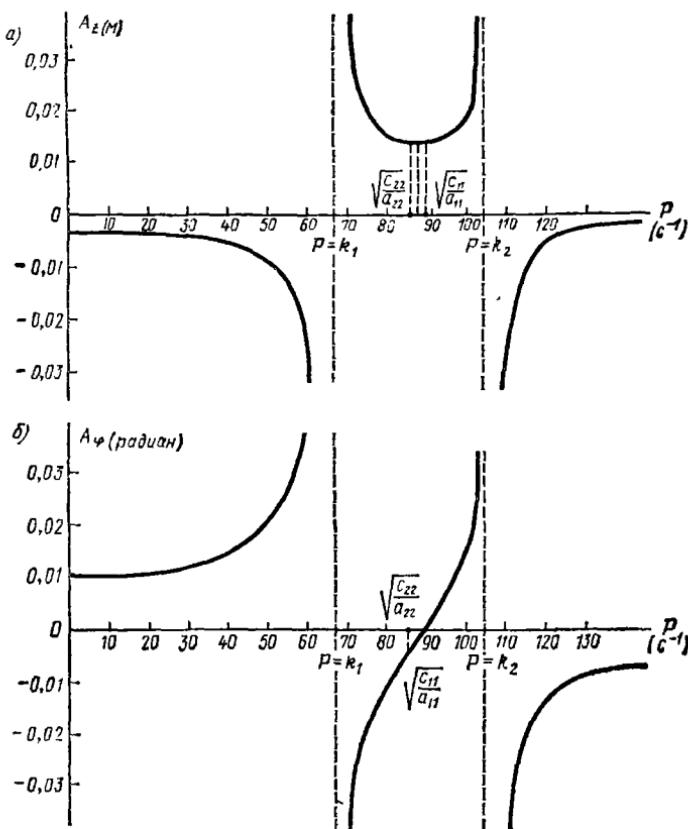


Рис. 256

Рассмотрим поведение A_z и A_φ для трех интервалов изменения циклической частоты возмущающего момента:

$$0 \leq p < k_1, \quad k_1 < p < k_2 \quad \text{и} \quad k_2 < p < \infty.$$

1. $0 \leq p < k_1$. Так как $k_1 < k_2$, то $p^2 - k_1^2 < 0$ и $p^2 - k_2^2 < 0$, следовательно, знаменатель формул (8) и (9) положителен. Из этого

вытекает, что в первом интервале $A_z < 0$ и $A_\varphi > 0$. С ростом величины p амплитуды колебаний стержня и груза возрастают, при этом колебания стержня происходят в одной фазе с изменением возмущающего момента, а колебания груза — в противофазе (рис. 257, *a*).

При $p = 0$ имеем: $A_\varphi = \varphi_0 = 0,01$ рад и $A_z = z_0 = -0,003$ м.

При $p = k_1 = 66,4$ с⁻¹ в системе наступает первый резонанс и функции A_z и A_φ претерпевают бесконечный разрыв (рис. 256).

2. $k_1 < p < k_2$. Так как $k_1 < k_2$, то $p^2 - k_1^2 > 0$, а $p^2 - k_2^2 < 0$. Следовательно, знаменатель формул (8) и (9) отрицателен. Из этого

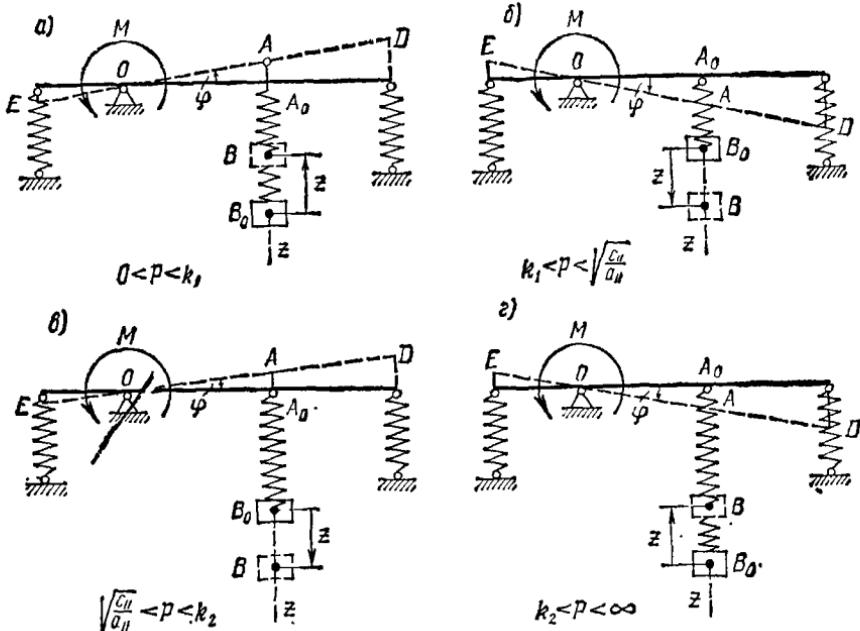


Рис. 257

следует, что во втором интервале $A_z > 0$, т. е. колебания груза происходят синфазно с изменением возмущающего момента (рис. 257, *b*, *c*).

При определении знака функции A_φ необходимо рассмотреть числитель формулы (9). Если $k_1 < p < \sqrt{c_{11}/a_{11}}$, то $A_\varphi < 0$, и колебания стержня происходят в противофазе с возмущающим моментом (рис. 257, *b*). Если $\sqrt{c_{11}/a_{11}} < p < k_2$, то $A_\varphi > 0$, и колебания стержня так же, как и груза, синфазны с изменением M (рис. 257, *c*).

При $p = \sqrt{c_{11}/a_{11}} = \sqrt{4000/0,5} = 89,4$ с⁻¹ — первая парциальная частота (частота собственных колебаний системы, изображенной на рис. 258, *a*) амплитуда вынужденных колебаний стержня равняется нулю ($A_\varphi = 0$ — случай антирезонанса). В этом случае груз массой m_1 может рассматриваться как гаситель колебаний стержня. Величину A_z в этом режиме проще определить по формуле (6):

$$A_z = M_0 c_{12} / c'_{12} = M_0 / c_{12} = 16,6 / 1200 = 0,014 \text{ м.}$$

Амплитуда колебаний стержня $|A_z|$ убывает до нуля при возрастании p от k_1 до $\sqrt{c_{11}/a_{11}}$, а затем с увеличением p от $\sqrt{c_{11}/a_{11}}$ до k_2 возрастает. При $p = \sqrt{c_{22}/a_{22}} = \sqrt{2040/0,28} = \sqrt{7290} = 85,4 \text{ c}^{-1}$ — вторая парциальная частота (частота собственных колебаний системы, изображенной на рис. 258, б) по формулам (6) и (7) находим:

$$A_z = M_0/c_{12} = 16,8/1200 = 0,014 \text{ м};$$

$$A_\varphi = -\frac{M_0 [c_{11} - a_{11}(c_{22}/a_{22})]}{c_{12}^2} = -\frac{16,8 (4000 - 0,5 \cdot 7290)}{1200^2} = -0,00414 \text{ рад.}$$

При изменении p в интервале от k_1 до k_2 функция A_z для амплитуды вынужденных колебаний груза имеет минимум, соответствую-

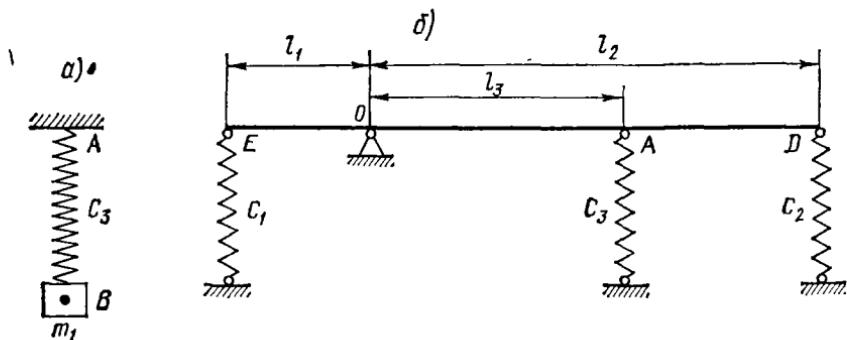


Рис. 258

щий максимуму знаменатся формул (6) и (7). Взяв от этого выражения производную по p и приравняв ее нулю, получим:

$$2a_{11}a_{22}p^2 - (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11}) = 0;$$

откуда найдем значение p , при котором A_z достигает минимума:

$$p = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{c_{22}}{a_{22}} + \frac{c_{11}}{a_{11}} \right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{2040}{0,28} + \frac{4000}{0,5} \right)} = 87,4 \text{ c}^{-1}. \quad (10)$$

При $p = k_2 = 104 \text{ c}^{-1}$ в системе наступает второй резонанс.

3. $k_2 < p < \infty$. Так как $k_1 < k_2$, то $p^2 - k_1^2 > 0$ и $p^2 - k_2^2 > 0$, следовательно, знаменатель формул (8) и (9) положителен. Учитывая, что $k_2 > \sqrt{c_{11}/a_{11}}$, можно заключить, что в этом интервале и $A_z < 0$, и $A_\varphi < 0$, т. е. колебания происходят в противофазе с возмущающим моментом (см. рис. 257, 2). С возрастанием p амплитуды вынужденных колебаний $|A_z|$ и $|A_\varphi|$ уменьшаются, стремясь к нулю.

Отношение функций A_φ и A_z , определяющих амплитуды вынужденных колебаний стержня и груза (коэффициент формы вынужденных колебаний), получим, разделив (9) на (8):

$$A_\varphi/A_z = -(c_{11} - a_{11}p^2)/c_{12} = -(4000 - 0,5p^2)/1200. \quad (11)$$

При $p = 0$

$$A_\varphi/A_z = -c_{11}/c_{12} = -4000/1200 = -3,33 \text{ рад/м.}$$

При $p = k_1 = 66,4 \text{ c}^{-1}$

$$A_\varphi/A_z = \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м.}$$

При $p = \sqrt{c_{11}/a_{11}} = 89,4 \text{ c}^{-1}$

$$A_\varphi/A_z = 0.$$

При $p = k_2 = 104 \text{ c}^{-1}$

$$A_\varphi/A_z = \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м.}$$

График зависимости A_φ/A_z от частоты возмущения p показан на рис. 259. При резонансах формы вынужденных и свободных колебаний совпадают (см. рис. 253).

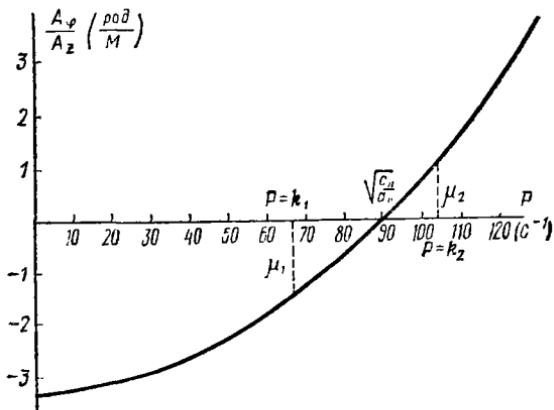


Рис. 259

Для исследования резонансных колебаний ($p = k_1$ и $p = k_2$) осуществим переход к главным координатам системы: η_1 и η_2 . Они связаны с координатами z и φ соотношениями:

$$z = \eta_1 + \eta_2; \quad \varphi = \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2. \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения колебаний механической системы с двумя степенями свободы в главных координатах η_1 и η_2 при обобщенных возмущающих силах:

$$Q_1 = H_1 \sin(pt + \delta); \quad Q_2 = H_2 \sin(pt + \delta),$$

соответствующих обобщенным координатам q_1 и q_2 , имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1 \eta_1 &= \frac{H_1 + \mu_1 H_2}{a_1} \sin(pt + \delta), \\ \ddot{\eta}_2 + k_2 \eta_2 &= \frac{H_1 + \mu_2 H_2}{a_2} \sin(pt + \delta), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

где

$$a_1 = c_{11} + 2a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_1^2; \quad a_2 = a_{11} + 2a_{12}\mu_2 + a_{22}\mu_2^2, \quad (14)$$

μ_1 и μ_2 — коэффициенты распределения обобщенных координат q_1 и q_2 при свободных колебаниях.

В данном случае

$$H_1 = 0; \quad H_2 = M_0; \quad \delta = \pi/2.$$

Поэтому дифференциальные уравнения (13) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + k_1^i \eta_1 &= \frac{\mu_1 M_0}{a_1} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right); \\ \ddot{\eta}_2 + k_2^i \eta_2 &= \frac{\mu_2 M_0}{a_2} \sin\left(pt + \frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При $p = k_1$ (первый резонанс) частный интеграл первого дифференциального уравнения системы (15) имеет вид:

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t.$$

Частный интеграл второго дифференциального уравнения

$$\eta_2 = \frac{\mu_2 M_0}{a_2 (k_2^i - k_1^i)} \sin\left(k_1 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Переходя к обобщенным координатам z и φ по формулам (12), получаем:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\mu_1 M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t + \frac{\mu_2 M_0}{a_2 (k_2^i - k_1^i)} \cos k_1 t; \\ \varphi &= \frac{\mu_1^i M_0}{2k_1 a_1} t \sin k_1 t + \frac{\mu_2^i M_0}{a_2 (k_2^i - k_1^i)} \cos k_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

При $p = k_2$ (второй резонанс) частные интегралы дифференциальных уравнений (15) имеют вид:

$$\eta_1 = \frac{\mu_1 M_0}{a_1 (k_1^i - k_2^i)} \sin\left(k_2 t + \frac{\pi}{2}\right); \quad \eta_2 = \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t,$$

откуда обобщенные координаты z и φ :

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{\mu_2 M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_1 M_0}{a_1 (k_2^i - k_1^i)} \cos k_2 t, \\ \varphi &= \frac{\mu_1^i M_0}{2k_2 a_2} t \sin k_2 t - \frac{\mu_2^i M_0}{a_1 (k_2^i - k_1^i)} \cos k_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Параметры, входящие в уравнения (16) и (17), имеют следующие числовые значения:

$$M_0 = 16,8 \text{ Нм}; \quad \mu_1 = -1,49 \text{ рад/м}; \quad \mu_2 = 1,2 \text{ рад/м}.$$

Согласно (14):

$$a_1 = 0,5 + 0,28 (-1,49)^2 = 1,13 \text{ кг};$$

$$a_2 = 0,5 + 0,28 \cdot 1,2^2 = 0,90 \text{ кг}.$$

Подставляя эти значения в формулы (16) и (17), получаем уравнения вынужденных колебаний при первом и втором резонансах.

Первый резонанс: $p = k_1 = 66,4 \text{ с}^{-1}$;

$$z = \frac{-1,49 \cdot 16,8}{2 \cdot 66,4 \cdot 1,13} t \sin 66,4t + \frac{1,2 \cdot 16,8}{0,90(10870 - 4414)} \cos 66,4t = \\ = -0,168t \sin 66,4t + 0,0035 \cos 66,4t;$$

$$\varphi = \frac{(-1,49)^2 \cdot 16,8}{2 \cdot 66,4 \cdot 1,13} t \sin 66,4t + \frac{(1,2)^2 \cdot 16,8}{0,90(10870 - 4414)} \cos 66,4t = \\ = 0,252t \sin 66,4t + 0,0042 \cos 66,4t.$$

Второй резонанс: $p = k_2 = 104 \text{ с}^{-1}$;

$$z = \frac{1,2 \cdot 16,8}{2 \cdot 104 \cdot 0,90} t \sin 104t - \frac{(-1,49) \cdot 16,8}{1,13(10870 - 4414)} \cos 104t = \\ = 0,108t \sin 104t + 0,0035 \cos 104t;$$

$$\varphi = \frac{1,2^2 \cdot 16,8}{2 \cdot 104 \cdot 0,90} t \sin 104t - \frac{(-1,49)^2 \cdot 16,8}{1,13(10870 - 4414)} \cos 104t = \\ = 1,30t \sin 104t - 0,0052 \cos 104t.$$

Полученные результаты позволяют оценить колебания, происходящие в системе при резонансе в том случае, когда силы сопротивления незначительны, а резонансные режимы кратковременны.

Таблица вариантов заданий, входящих в курсовые работы

Номера заданий												Номера заданий						
Варианты заданий						Номера заданий						Шифр						Варианты заданий
Варианты заданий			Номера заданий			Варианты заданий			Номера заданий			Шифр			Варианты заданий		Варианты заданий	
1	7	2	8	3	9	4	10	5	11	12	13	14	15	16	17	18	19	24
2	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	27
3	17	19	20	9	11	6	37	13	27	14	24	21	19	71	15	3	7	18
4	14	10	28	12	17	9	38	10	24	17	27	28	22	72	12	1	6	5
5	11	13	22	15	14	12	39	7	21	20	30	1	25	73	9	29	9	18
6	8	10	5	18	20	15	40	4	18	23	4	29	28	74	6	26	12	22
7	5	7	8	21	23	18	41	30	15	20	7	3	30	75	3	23	15	25
8	2	4	11	24	26	21	42	27	12	29	10	6	4	76	1	20	18	28
9	19	30	14	27	29	24	43	24	9	1	13	9	7	77	29	17	21	2
10	16	27	17	30	1	27	44	21	6	3	16	12	10	78	26	14	24	5
11	13	24	20	4	3	2	45	18	3	6	19	15	12	79	9	11	27	8
12	10	21	23	7	6	5	46	15	1	9	22	18	16	80	20	8	30	11
13	7	18	26	10	9	8	47	12	29	12	25	21	19	81	17	5	4	14

14	15	29	13	12	30	11	48	9	26	15	28	24	22	82	14	2	7	17	8	5
15	30	12	1	16	15	14	49	6	23	18	2	27	25	83	11	19	10	20	16	8
16	27	9	3	19	18	17	50	3	20	21	5	30	28	84	8	16	13	23	7	11
17	24	6	9	11	21	20	51	1	17	24	8	4	1	85	5	13	16	26	6	14
18	21	3	6	25	24	23	52	29	14	27	11	7	30	86	2	10	19	29	9	17
19	18	1	12	28	27	26	53	26	11	30	14	10	6	87	25	7	2	1	-22	20
20	15	29	18	5	4	29	54	23	8	4	17	13	9	88	21	4	5	9	25	23
21	12	26	15	2	30	2	55	20	5	7	20	16	12	89	7	27	8	12	28	26
22	9	23	21	8	7	5	56	17	2	10	23	19	15	90	19	24	11	15	2	29
23	6	20	24	11	10	8	57	28	19	13	26	22	18	91	30	21	14	18	5	30
24	3	17	27	14	13	11	58	25	16	19	29	25	21	92	27	18	17	21	8	4
25	1	14	30	17	16	14	59	22	13	16	6	28	24	93	24	15	20	24	11	7
26	29	11	4	20	19	17	60	18	10	15	9	2	27	94	21	12	23	27	14	10
27	28	8	7	23	22	20	61	16	4	5	12	5	17	95	18	9	26	30	17	13
28	23	5	10	26	25	23	62	13	30	8	15	11	3	96	15	6	29	4	9	16
29	20	2	13	29	28	26	63	10	27	11	18	8	16	97	12	3	1	7	23	22
30	14	19	22	3	2	29	64	7	24	14	21	14	9	98	9	1	3	10	26	25
31	11	16	25	6	5	30	65	4	21	17	24	17	12	99	6	29	6	13	19	28
32	8	13	28	9	8	4	66	30	18	20	27	20	15	100	26	28	16	1	2	16
33	5	10	2	12	11	7	67	27	15	23	30	23	18							
34	2	7	5	15	14	10	68	24	12	26	4	26	21							

ЛИТЕРАТУРА

- Бабаков И. М. Теория колебаний. «Наука», 1965.
- Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. «Наука», 1971.
- Бутенин Н. В. Теория колебаний. М., «Высшая школа», 1963.
- Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики, ч. I и II. «Наука», 1971 и последующие издания.
- Воронков И. М. Курс теоретической механики. Физматгиз, 1954.
- Гернет М. М. Курс теоретической механики. М., «Высшая школа», 1965.
- Доброполов В. В., Никитин Н. Н., Дворников А. А. Курс теоретической механики. М., «Высшая школа», 1968 и последующие издания.
- Космодемьянский А. А. Курс теоретической механики. Изд. 2 е, Учпедгиз, 1954.
- Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, ч. I и II. Физматгиз, 1954.
- Николаи Е. Л. Теоретическая механика. Физматгиз, 1952.
- Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. «Наука», 1964.
- Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. «Наука», 1971.
- Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара. «Наука», 1977.
- Савин Г. П., Кильчевский Н. А., Путята Т. В. Курс теоретической механики. Гостехиздат УССР, 1963.
- Тарг С. М. Курс теоретической механики. Изд. 3-е. Физматгиз, 1963 и последующие издания.
- Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, ч. I, М., «Высшая школа», 1971 и последующие издания.
- Яблонский А. А. Курс теоретической механики, ч. II, М., «Высшая школа», 1971 и последующие издания.
- Яблонский А. А., Норейко С. С. Курс теории колебаний. М., «Высшая школа», 1966 и последующие издания.

Сборники задач и руководства к решению задач

- Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осечкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М., «Высшая школа», 1968.
- Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, ч. I и II. Физматгиз, 1961 и последующие издания.
- Бражниченко Н. А. [и др.]. Сборник задач по теоретической механике. М., «Высшая школа», 1967 и последующие издания.
- Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. Физматгиз, 1971.
- Светлицкий В. А., Стасенко И. В. Сборник задач по теории колебаний. М., «Высшая школа», 1973.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Раздел первый Статика твердого тела	
I Плоская система сил	5
Система сходящихся сил	5
Задание С 1 Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы	5
Система произвольно расположенных сил	12
Задание С 2 Определение реакции опор твердого тела	12
Задание С 3 Определение усилий в стержнях плоской фермы способом Риттера	17
Задание С 4 Определение реакций опор составной балки	24
Задание С 5 Определение реакций опор составной конструкции (система двух тел)	29
Задание С 6 Определение реакций опор составной конструкции (система трех тел)	35
Задание С 7 Равновесие сил с учетом сцепления (трения покоя)	41
II Система сил, не лежащих в одной плоскости	48
Система сходящихся сил	48
Задание С 8 Определение усилий в стержнях пространственной конструкции	48
Система произвольно расположенных сил	48
Задание С 9 Приведение системы сил к простейшему виду	54
Задание С 10 Определение реакции опор твердого тела	54
Задание С 11 Определение реакций стержней, поддерживающих прямоугольную плиту	64
Центр тяжести	70
Задание С 12 Определение положения центра тяжести тела	70
Раздел второй Кинематика	
I. Кинематика точки	76
Прямолинейное и криволинейное движения точки	76
Задание К 1 Определение скорости и ускорения точки по заданным уравнениям ее движения	76
Задание К 2 Составление уравнений движения точки и определение ее скорости и ускорения	81
II. Кинематика твердого тела	88
Поступательное и вращательное движения твердого тела	88
Задание К 3 Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движении	88
Плоское движение твердого тела	93
Задание К 4 Определение скоростей точек твердого тела при плоском движении	93
Задание К 5 Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при плоском движении	99

Задание К-6. Определение скоростей и ускорений точек многозвенного механизма	106
Сферическое движение твердого тела	119
Задание К-7. Определение кинематических характеристик движения твердого тела и его точек по уравнениям Эйлера	119
Задание К-8. Определение скоростей и ускорений точек твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной поверхности и имеющего неподвижную точку	123
III. Сложное движение	130
Сложное движение точки	130
Задание К-9. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае поступательного переносного движения	130
Задание К-10. Определение абсолютной скорости и абсолютного ускорения точки в случае вращательного переносного движения	137
Сложное движение твердого тела. Сложение вращений вокруг параллельных и пересекающихся осей	144
Задание К-11. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора с цилиндрическими колесами	144
Задание К-12. Определение угловых скоростей звеньев планетарного редуктора с коническими колесами	150

Раздел третий. Динамика

I. Динамика материальной точки	157
Дифференциальные уравнения движения материальной точки	157
Задание Д-1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием постоянных сил	157
Задание Д-2. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки, находящейся под действием переменных сил	164
Задание Д-3. Исследование колебательного движения материальной точки	171
Задание Д-4. Исследование относительного движения материальной точки	182
Основные теоремы динамики материальной точки	189
Задание Д-5. Применение теоремы об изменении количества движения к определению скорости материальной точки	189
Задание Д-6. Применение основных теорем динамики к исследованию движения материальной точки	194
II. Динамика механической системы	201
Основные теоремы динамики механической системы	201
Задание Д-7. Применение теорем об изменении количества движения и о движении центра масс к исследованию движения механической системы	201
Задание Д-8. Применение теоремы об изменении кинетического момента к определению угловой скорости твердого тела	212
Задание Д-9. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы	220
Дифференциальные уравнения движения твердого тела	231
Задание Д-10. Исследование вращательного движения твердого тела	231
Задание Д-11. Исследование плоского движения твердого тела	240
Удар	246
Задание Д-12. Исследование соударений твердых тел	246
III. Аналитическая механика	266
Принцип возможных перемещений	266
Задание Д-13. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы	266
	387

	Стр.
Задание Д-14. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции	273
Принцип Даламбера	279
Задание Д-15. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей	279
Задание Д-16. Определение реакций опор при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси	286
Общее уравнение динамики	295
Задание Д-17. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы	295
Задание Д-18. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы	303
Уравнения Лагранжа второго рода	311
Задание Д-19. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы	311
Задание Д-20. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы	318
Устойчивость состояния покоя (равновесия) консервативной механической системы	320
Задание Д-21. Определение положений покоя (равновесия) консервативной механической системы с одной степенью свободы и исследование их устойчивости (по теореме Лагранжа—Дирихле)	320
Задание Д-22. Определение условий устойчивости заданного состояния покоя (равновесия) консервативной механической системы с одной и двумя степенями свободы (по теореме Лагранжа—Дирихле)	332
Колебания механической системы	344
Задание Д-23. Исследование свободных колебаний механической системы с одной степенью свободы	344
Задание Д-24. Исследование вынужденных колебаний механической системы с одной степенью свободы	352
Задание Д-25. Исследование свободных колебаний механической системы с двумя степенями свободы	363
Задание Д-26. Исследование вынужденных колебаний механической системы с двумя степенями свободы	373
Таблица вариантов заданий, входящих в курсовые работы	383
Литература	385

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической
C23 механике Под ред. проф. А. А. Яблонского. Учеб. пособие для
втузов. Изд. 3-е, испр. М., «Высш. школа», 1978.

388 стр , с ил

На обороте тит л авт А А Яблонский, С С Норейко, С А Вольф-
сон [и др].

Книга представляет собой сборник заданий для курсовых работ по теоретической
механике

В сборнике имеется 50 заданий по статике, кинематике и динамике для курсовых
работ, предусмотренных программой курса теоретической механики. Каждое задание
содержит тридцать вариантов. Приведены примеры выполнения этих заданий.

Предназначается в качестве учебного пособия для студентов высших техничес-
ких учебных заведений очной, вечерней и заочной систем обучения. Ее могут также
использовать инженеры и техники для углубления знаний по теоретической ме-
ханике.

С 20302—063
601(01)—78

531

*Александр Александрович Яблонский
Сигизмунд Сильвестрович Норейко
Саул Аронович Вольфсон
Наталья Васильевна Карпова
Борис Николаевич Квасников
Юрий Григорьевич Минкин
Нина Ивановна Никитина
Владимир Егорович Павлов
Юрий Михайлович Терентьев*

**СБОРНИК ЗАДАНИЙ
для курсовых работ
по теоретической
механике**

Редактор З. Е. Овсянникова
Художественный редактор Т. А. Дурасова
Художник график И. М. Борзовская
Переплет художника В. Н. Панферова
Технический редактор З. А. Муслимова
Корректор М. А. Минкова

ИБ № 1057

Сдано в набор 29/VI 1977 г. Подп. к печати 16/XI 1977 г. Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип № 1. Объем 24,5 печ. л. Усл. печ. л. 24,5 Уч. изд. л. 23,61 Изд. № ОТ-283/76 Тираж 150 000 экз. Заказ № 1359 Цена 80 коп.

План выпуска литературы издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1978 г. Позиция № 80

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственное объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли 197136, Ленинград, П-136, Гатчинская ул., 26

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

ВЫПУСТИТ В СВЕТ В 1978 ГОДУ

для студентов машиностроительных и немашиностроительных специальностей вузов, а также для учащихся, механических, машиностроительных и строительных техникумов следующие учебные пособия:

Левитская О.Н., Левитский Н.И. Курс теории механизмов и машин. Учебник 20 л с ил 82 к

Учебник написан по новой (1974 г.) программе для студентов механических специальностей вузов. При изложении всех разделов курса выделен материал, предназначенный для студентов немашиностроительных специальностей, и поэтому он может быть использован при изучении курсов «Теория механизмов и машин и детали машин» и «Прикладная механика».

В разделах кинематики и динамики механизмов рассматриваются пространственные механизмы промышленных роботов и манипуляторов. В разделе «Основы теории машин-автоматов» излагаются методы построения систем управления машин-автоматов с механическими, пневматическими и гидравлическими элементами.

Предназначается для студентов машиностроительных и немашиностроительных специальностей вузов.

Улитин Н.С., Лаусенбург Л.В., Першин А.Н. Сборник задач по технической механике. Учебное пособие 25 л с ил 87 к.

В сборник включены задачи по теоретической механике, сопротивлению материалов и статике сооружений, составленные в соответствии с программами для специальностей промышленно-гражданские сооружения, мосты, тоннели и метрополитены, гидротехнические и другие искусственные сооружения.

Наряду с задачами для аудиторных и текущих домашних работ в сборнике имеются многовариантные задачи для контрольных работ и индивидуальных домашних заданий. Типовые задачи снабжены решениями, остальные имеют ответы.

Предназначается для учащихся строительных специальностей техникумов.

Файн А.М. Сборник задач по теоретической механике. Учебное пособие 15 л с ил 60 к

В задачнике представлено около тысячи задач по теоретической механике. Подавляющая часть задач оригинальна. Тематика их отражает достижения современной техники. В условиях задач внимание уделено выбору рациональных способов решения, проверки

результатов исходя из принципов правдоподобия и правил размерности. Приведены контрольные вопросы, развивающие у учащихся навыки применения аксиом и методов теоретической механики в практической деятельности. Для контрольных работ даны десятивариантные задачи различной степени трудности.

Предназначается для учащихся технических и машиностроительных техникумов. Может быть использовано в техникумах других специальностей и в кружковой работе.

Уважаемые читатели!

Издательство «Высшая школа» выпускает учебники, учебные и методические пособия, плакаты. Подробнее познакомиться с учебной литературой Вам поможет аннотированный план выпуска литературы на 1978 год (вузы и техникумы), который имеется в книжных магазинах.

Предварительные заявки на книги Вы можете сделать в магазинах Книгоготорга или потребительской кооперации.