

К.1 – 18 вариант

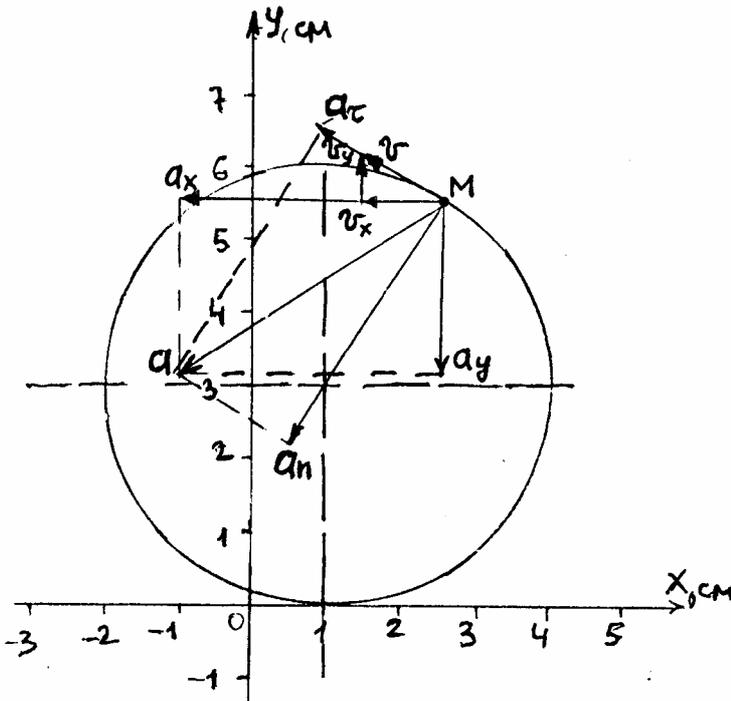
Дано:

$$x = 1 + 3 \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3), \text{ см}; \quad y = 3 \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3) + 3, \text{ см}; \quad (1); \quad t_1 = 1 \text{ с.}$$

По заданным уравнениям движения точки **М** установить вид её траектории и для момента времени $t = t_1$ (с.) найти положение точки на траектории, её скорость, полное, касательное и нормальное ускорения, а так же радиус кривизны траектории.

Решение:

Исключим время из уравнений (1): $\cos(\pi \cdot t^2 / 3) = \frac{x-1}{3}$; $\sin(\pi \cdot t^2 / 3) = \frac{y-3}{3}$. Так как $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, то $\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{3}\right)^2 = 1$ - это уравнение эллипса (окружности) вид его показан на рисунке.



Найдем координаты точки **М** при $t_1 = 1$ с.

$$x = 1 + 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1 + 1,5 = 2,5 \text{ см};$$

$$y = 3 \cdot \sin \frac{\pi}{3} + 3 = 2,60 + 3 = 5,60 \text{ см};$$

Вектор скорости точки:

$$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j};$$

Вектор ускорения:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j};$$

Здесь \vec{i}, \vec{j} - орты осей X и Y,

v_x, v_y, a_x, a_y - проекции скорости и ускорения на оси координат.

Найдем их, дифференцируя по времени уравнения (1):

$$v_x = \dot{x} = -3 \cdot \frac{2\pi \cdot t}{3} \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3) = -2 \cdot \pi \cdot t \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3);$$

$$a_x = \ddot{x} = -2\pi \cdot t \cdot \frac{2\pi \cdot t}{3} \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3) - 2\pi \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3) = -\frac{4\pi^2 \cdot t^2}{3} \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3) - 2\pi \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3);$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{3 \cdot 2\pi \cdot t}{3} \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3) = 2\pi \cdot t \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3);$$

$$a_y = \ddot{y} = -2\pi \cdot t \cdot \frac{2\pi \cdot t}{3} \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3) + 2\pi \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3) = -\frac{4\pi^2 \cdot t^2}{3} \cdot \sin(\pi \cdot t^2 / 3) + 2\pi \cdot \cos(\pi \cdot t^2 / 3);$$

При $t_1 = 1$ с.:

$$v_x = \dot{x} = -2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot \sin \cdot \frac{3,14}{3} = -5,44 \text{ см/с};$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1^2}{3} \cdot \cos \cdot \frac{3,14}{3} - 2 \cdot 3,14 \cdot \sin \cdot \frac{3,14}{3} = -6,58 - 5,44 = -12,02 \text{ см/с}^2;$$

$$v_y = \dot{y} = 2\pi \cdot 1 \cdot \cos \cdot \frac{3,14}{3} = 3,14 \text{ см/с};$$

$$a_y = \ddot{y} = -\frac{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1^2}{3} \cdot \sin \cdot \frac{3,14}{3} + 2 \cdot 3,14 \cdot \cos \cdot \frac{3,14}{3} = -11,40 + 3,14 = -8,26 \text{ см/с}^2;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-5,44)^2 + 3,14^2} = 6,28 \text{ см/с};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-12,02)^2 + (-8,26)^2} = 14,58 \text{ см/с}^2;$$

Модуль касательного ускорения:

$$a_\tau = \frac{|(v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y)|}{v} = \frac{|(-5,44) \cdot (-12,02) + 3,14 \cdot (-8,26)|}{6,28} = \frac{|(65,39 - 25,94)|}{6,28} = 6,28 \text{ см/с}^2;$$

Модуль нормального ускорения:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{14,58^2 - 6,28^2} = 13,16 \text{ см/с}^2;$$

Радиус кривизны в рассматриваемой точке:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{6,28^2}{13,16} = 3,0 \text{ см};$$

Ответ:

$$v = 6,28 \text{ см/с}; a_\tau = 6,28 \text{ см/с}^2; a_n = 13,16 \text{ см/с}^2; a = 14,58 \text{ см/с}^2; \rho = 3,0 \text{ см}.$$