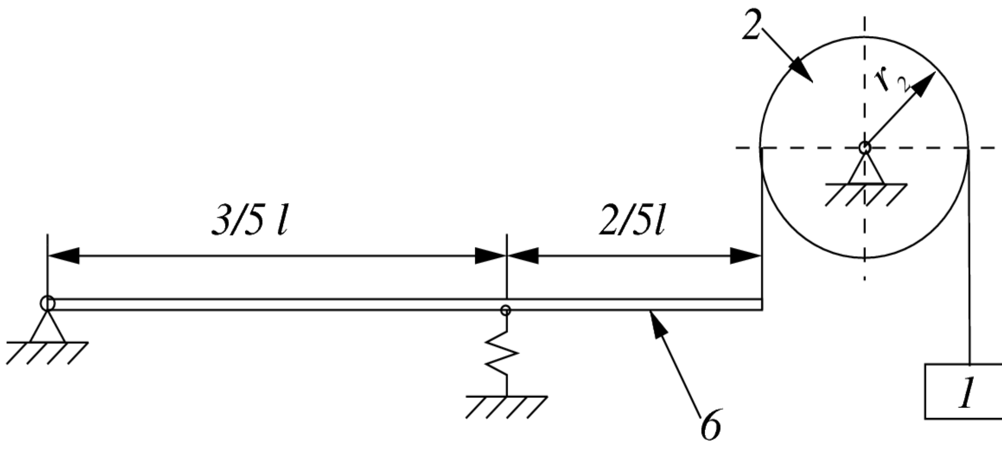
Вариант 11.



Дано: $m_1 = 1\,кг,\ m_2 = 2\,кг,\ m_6 = 3\,кг,\ c = 30\,Н/см,\ y_0 = 0{,}4\,см,\ \dot{y}_0 = 7\,м/с.$

Найти: $y = y(t) = ?,\ A = ?.$

Решение:

Воспользуемся уравнением Лагранжа II рода для консервативной системы. Приняв за обобщенную координату вертикальное отклонение y груза 1 от положения покоя, соответствующего статической деформации пружины, имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) = -\frac{\partial \Pi}{\partial y},$$

где T — кинетическая энергия системы, Π — потенциальная энергия системы.

Найдем кинетическую энергию системы $T = T_1 + T_2 + T_6$. Для этого выразим скорости центров масс тел и угловые скорости через обобщенную скорость $\dot{y}$

$$v_1 = \dot{y};\ \omega_2 = \frac{\dot{y}}{r_2};\ \omega_6 = \frac{\dot{y}}{l}$$

Соответственно, кинетические энергии:

$$T_1 = \frac{m_1 \dot{y}^2}{2};\ T_2 = \frac{J_2 \omega_2^2}{2};\ T_6 = \frac{J_6 \omega_6}{2.}$$

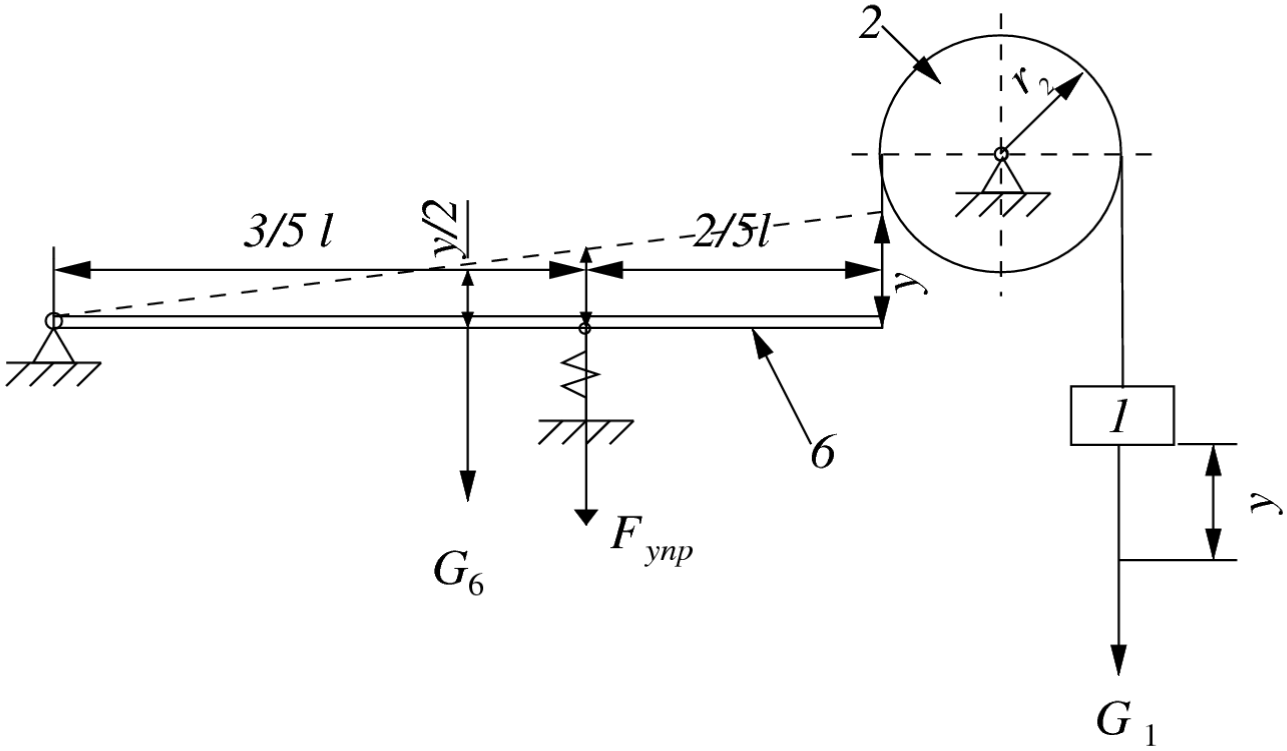
Моменты инерции тел 2 и 6 относительно их осей вращения:

$$J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2};\ J_6 = \frac{m_6 l^2}{3} \Rightarrow T_2 = \frac{m_2 \dot{y}^2}{4};\ T_6 = \frac{m_6 \dot{y}^2}{6}$$

Кинетическая энергия $T=\dot{y}^2\left(\frac{m_1}{2}+\frac{m_2}{4}+\frac{m_6}{6}\right)=\frac{3\,\dot{y}^2}{2}$

Потенциальная энергия системы: $\Pi=\Pi_1+\Pi_2$, где Π_1 - потенциальная энергия сил тяжести, Π_2 - потенциальная энергия деформированной пружины.

$\Pi_1=-G_1 y+G_6\frac{y}{2},$



Потенциальная энергия деформированной пружины:

$$\Pi_2=\frac{c\left(f_{cm}+\lambda_K\right)^2}{2}-\frac{cf_{cm}^2}{2},$$

где f_{cm} - статическая деформация пружины, $\lambda_к$ - перемещение точки крепления пружины K.

$$\Pi=\frac{y}{2}\left(G_6-2G_1\right)+\frac{c}{2}\left(f_{cm}^2+2\mathrm{f}_{cm}\lambda_K+\lambda_K^2-f_{cm}^2\right)=\frac{y}{2}\left(G_6-2G_1\right)+\frac{c}{2}\left(2\mathrm{f}_{cm}\lambda_K+\lambda_K^2\right)$$

$$\Pi=\frac{y}{2}\left(G_6-2G_1\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{6\mathrm{f}_{cm}y}{5}+\left(\frac{3\mathrm{y}}{5}\right)^2\right)$$

В положении покоя, соответствующем статической деформации пружины,

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right)_{y=0}=0\,;\Rightarrow\frac{G_6}{2}-G_1+\frac{3\mathrm{cf}_{cm}}{5}+\frac{9\mathrm{cy}}{5}=0\,;\Rightarrow f_{cm}=\frac{10\mathrm{G}_1-5\mathrm{G}_6}{6\mathrm{c}}$$

Подставим найденное значение в выражение для потенциальной энергии:

$$\Pi=\frac{y}{2}\left(G_6-2\mathrm{G}_1\right)+\frac{c}{2}\cdot\frac{10\mathrm{G}_1-5\mathrm{G}_6}{25\mathrm{c}}\,y+\frac{c}{2}\cdot\frac{9\mathrm{y}^2}{5}=\frac{9\mathrm{cy}^2}{50}$$

Найдем значения членов уравнения Лагранжа II рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=3\,\ddot{y}\,;\,\frac{\partial T}{\partial y}=0\,;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y}=\frac{9\text{cy}}{25}=1080\,y$$

Подставляем в само уравнение:

$$\ddot{y}+360\text{y}=0$$

$$\ddot{y}+k^2\,y=0$$

Циклическая частота колебаний $k=\sqrt{(360)}=18{,}97\,c^{-1}$

Период свободных колебаний: $T=\frac{2\pi}{k}=0{,}33\,c$

Уравнение движения груза 1: $y=C_1\cos kt+C_2\sin kt$

Для определения постоянных продифференцируем это уравнение:

$$\dot{y}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt$$

$$C_1=y_0=0{,}4\,;\,C_2=\frac{\dot{y}_0}{k}=\frac{700}{18{,}97}=36{,}90$$

В конечном счете, уравнение движения имеет вид:

$$\boxed{y(t)=0{,}4\cos 18{,}97\,t+36{,}90\sin 18{,}97\,t}$$

Амплитуда колебаний:

$$\boxed{A=\sqrt{y_0^2+\left(\frac{\dot{y}_0}{k}\right)}=\sqrt{0{,}4^2+18{,}97^2}=18{,}97\,см}$$